管状領域と複素三角群の一軌道

伊師 英之 （横浜市大・国際総合科学）
野村 隆昭 （九大・数理）

複素 r 次対称行列 w に対して，$\Delta_1(w), \dots, \Delta_r(w)$ をその首座小行列式とする．もし $\mathrm{Re}\, w \gg 0$（正定値），すなわち w が Siegel 右半空間に属するならば，

$$(1) \qquad \mathrm{Re}\,\frac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)} > 0 \quad \text{for } k = 1, \dots, r \qquad （ただし\ \Delta_0(w) \equiv 1\ とする）$$

であることが知られている．本講演では，この事実 (1) について，下記の三つを報告する．

1. 一般の対称右半空間，すなわち，一般の対称管状領域で (1) が成り立つ．ただし，$\Delta_k(w)$ は，Jordan 代数の枠組みにおける首座小行列式とする．

2. 自然に定義される $\Delta_k(w)$ に対して，(1) を成り立たせる非対称な等質管状領域の系列を提示する．10 次元以下に限ると，この系列での最低次元である管状領域（8 次元である）でのみ (1) が成り立つことも，[3] の分類に従った個別撃破でわかっている．

3. (1) の証明で使われる補題：

右半空間に属する w を $w = na\,{}^{\mathrm{t}}n$（n は複素下真三角行列，a は複素対角行列）と表したとき，a のどの成分の実部も正である —

は，一般の等質管状領域でも成り立つ．

さらに副産物として，次の事もわかったので報告する．

4. 等質開凸錐 Ω に付随する基本相対不変式 (cf. [1]) は，Ω に付随するクランの複素化の右かけ算作用素の行列式の既約成分として特徴づけられる．

<u>1 について</u>： (1) の証明に使われる次の補題 1 が，一般の複素半単純 Jordan 代数（ユークリッド型 Jordan 代数の複素化）でも成り立つこと，及び上の **3** で述べた補題が一般の場合にも成り立つことから証明される．

補題 1. 複素下真三角行列 n と複素対角行列 $a = \mathrm{diag}\,[a_1, \dots, a_r]$ によって，複素 r 次対称行列 w が $w = na\,{}^{\mathrm{t}}n$ と表されるとき，$a_k = \dfrac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)}$ $(k = 1, \dots, r)$ である．

<u>2 について</u>： 以下 I_m は m 次の単位行列を表すものとする．次の形で表示される実ベクトル空間 V を考える（$\mathbb{R}^m$ は縦ベクトルの空間と見る）：

$$V := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_{11}I_m & x_{21}I_m & \boldsymbol{y} \\ x_{21}I_m & x_{22}I_m & \boldsymbol{z} \\ {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y} & {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{z} & x_{33} \end{pmatrix} \ ; \ \begin{matrix} \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m, \\ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^m, \end{matrix} \ x_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

$m = 1$ なら $V = \mathrm{Sym}(3, \mathbb{R})$ であるので，以下 $m \geqq 2$ と仮定する．このとき，$V \subsetneqq \mathrm{Sym}(2m+1, \mathbb{R})$ である．開凸錐としては次で定義される Ω を考える：

$$\Omega := \{x \in V \ ; \ x \gg 0\}.$$

Ω には次の A, N による半直積群 $H := N \rtimes A$ が単純推移的に作用している：

$$A := \left\{ a = \begin{pmatrix} a_1 I_m & 0 & 0 \\ 0 & a_2 I_m & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \; ; \; a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0 \right\},$$

$$N := \left\{ n = \begin{pmatrix} I_m & 0 & 0 \\ \xi I_m & I_m & 0 \\ {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{n}_1 & {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{n}_2 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{matrix} \boldsymbol{n}_1 \in \mathbb{R}^m, \\ \boldsymbol{n}_2 \in \mathbb{R}^m, \end{matrix} \; \xi \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ω に付随する基本相対不変式 (on $W := V_{\mathbb{C}}$) は次で与えられる：

$$\begin{cases} \Delta_1(x) := x_{11}, \\ \Delta_2(x) := x_{11}x_{22} - x_{21}^2, \\ \Delta_3(x) := x_{11}x_{22}x_{33} + 2x_{21}\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z} - x_{33}x_{21}^2 - x_{22}\nu(\boldsymbol{y}) - x_{11}\nu(\boldsymbol{z}), \end{cases}$$

ただし，$\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}$ は $\mathbb{R}^m$ における $\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{z}$ の標準内積を $\mathbb{C}^m$ に複素双線型に拡張したものであり，$\nu(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}$ である（$\nu(\boldsymbol{z})$ も同様）．

定理 2. $w \in W$ が右半空間 $\Omega + iV$ に属するならば，$\mathrm{Re}\,\dfrac{\Delta_k(w)}{\Delta_{k-1}(w)} > 0$ $(k = 1, 2, 3)$ が成り立つ．

<u>Ω の双対開凸錐について</u>：

$$V' := \left\{ x' = \begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{21} & {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y}' \\ x'_{21} & x'_{22} & {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{z}' \\ \boldsymbol{y}' & \boldsymbol{z}' & x'_{33} I_m \end{pmatrix} \; ; \; \begin{matrix} \boldsymbol{y}' \in \mathbb{R}^m, \\ \boldsymbol{z}' \in \mathbb{R}^m, \end{matrix} \; x'_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

$m \geqq 2$ を仮定しているので，$V' \subsetneqq \mathrm{Sym}(m+2, \mathbb{R})$ である．次の pairing で，V' を V の双対ベクトル空間とみる：

$$\langle x, x' \rangle = \sum_{j=1}^{3} x_{jj}x'_{jj} + 2\,\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}' + 2\,\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{z}' + 2x_{21}x'_{21}. \tag{2}$$

そして，$\Omega' := \{x' \,;\, x' \gg 0\}$ とすると，Ω' は (2) に関する Ω の双対開凸錐である：

$$\Omega' = \left\{ x' \in V' \,;\, \langle x, x' \rangle > 0 \quad \text{for } \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \right\}.$$

参 考 文 献

[1] H. Ishi, *Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications*, J. Lie Theory, **11** (2001), 155–171.

[2] H. Ishi and T. Nomura, *Tube domain and an orbit of a complex triangular group*, preprint, 2006 (submitted).

[3] S. Kaneyuki and T. Tsuji, *Classification of homogeneous bounded domains of lower dimension*, Nagoya Math. J. **53** (1974), 1–46.