Cayley 変換像の凸性による
対称管状領域の特徴付け

甲斐 千舟　(京大・理)
野村 隆昭　(京大・理)

Cayley 変換
$$w \mapsto \frac{w-1}{w+1} = 1 - 2(w+1)^{-1} \qquad (w \in \mathbb{C}) \tag{1}$$
によって右半平面は開単位円板に写される．管状領域 $\Omega + iV$ が対称であるときは, 対称錐 Ω に付随する Jordan 代数 V の逆元写像を用いて上式の $(w+1)^{-1}$ にあたるものを与えることによって, $\Omega + iV$ の Cayley 変換が自然に定義される．その像は複素化された Jordan 代数 W のスペクトルノルムに関する単位球となり, 特に凸集合である．対称とは限らない一般の管状領域の Cayley 変換は, パラメーター付けされた擬逆元写像を用いて定義される．管状領域が非対称な場合には, 対称な時とは違って標準的な逆元写像は無く, パラメーター付けが意味をもってくる．

V を有限次元実ベクトル空間, $\Omega \subset V$ を等質錐とする．すなわち, 直線を含まない開凸錐 Ω に線型自己同型群
$$G(\Omega) = \{g \in GL(V) \mid g\Omega = \Omega\}$$
が推移的に作用しているとする．このとき $G(\Omega)$ の分裂型可解部分群 H で Ω に単純推移的に作用するものが存在する．任意に $E \in \Omega$ をとり, 固定する．軌道写像 $H \ni T \mapsto TE \in \Omega$ は微分同相写像であるから, これを H の単位元で微分することにより線型同型写像 $\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H) \ni L \mapsto LE \in T_E(\Omega) = V$ を得る．この逆写像を $V \ni x \mapsto L_x \in \mathfrak{h}$ と表す．V に積 $\triangle$ を
$$x \triangle y := L_x y \qquad (x, y \in V)$$
で導入する．$(V, \triangle)$ は E を単位元とする非結合的代数 (clan) になる．Clan $(V, \triangle)$ は normal 分解と呼ばれる直和分解をもつ: 正整数 r と冪等元 $E_1, \ldots, E_r$ が存在して, $1 \le j < k \le r$ をみたす整数 j, k に対して
$$V_{kj} := \left\{x \in V \;\middle|\; \forall c = \sum \lambda_i E_i, c \triangle x = 2^{-1}(\lambda_j + \lambda_k)x, x \triangle c = \lambda_j x\right\}$$
とおくとき,
$$E = E_1 + \cdots + E_r, \qquad V = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R}E_i + \sum_{1 \le j < k \le r} V_{kj}.$$

$\mathfrak{a} := \sum \mathbb{R}L_{E_i}$ とおく．$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{h}$ の極大可換部分 Lie 代数である．各 $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{R}^r$ に対し, $A := \exp \mathfrak{a}$ の一次元表現 $\chi_{\mathbf{s}}$ を
$$\chi_{\mathbf{s}}\left(\exp\left(\sum t_i L_{E_i}\right)\right) := \exp\left(\sum s_i t_i\right)$$
で定義する．$\mathfrak{n}_{kj} := \{L_x \in \mathfrak{h} \,|\, x \in V_{kj}\}$ $(1 \le j < k \le r), \mathfrak{n} := \sum_{j<k} \mathfrak{n}_{kj}$ とおく．$\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{h}$ の冪零部分 Lie 代数であり, $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{n}$ である．$N := \exp \mathfrak{n}$ とおくと,

$H = A \ltimes N$ となる. $\chi_{\mathbf{s}}$ を $\chi_{\mathbf{s}}|_N \equiv 1$ として H の一次元表現に拡張し同じ記号で表す. 微分同相写像 $H \ni T \mapsto TE \in \Omega$ を用いて $\chi_{\mathbf{s}}$ を Ω に移した函数を $\Delta_{\mathbf{s}}$ とする:

$$\Delta_{\mathbf{s}}(hE) := \chi_{\mathbf{s}}(h) \qquad (h \in H).$$

パラメーター $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{R}^r$ は $s_1, \ldots, s_r > 0$ を満たすとする (これを $\mathbf{s} > 0$ と書く). V 上の双線型形式 $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{s}}$ を

$$\langle x|y \rangle_{\mathbf{s}} := D_x D_y \log \Delta_{-\mathbf{s}}(E) \qquad (x, y \in V)$$

により定義すると, これは V 上の正定値内積を定める. ただし, V 上の C^∞ 級函数 f と $v, x \in V$ に対し $D_v f(x) = \frac{d}{dt} f(x + tv)\big|_{t=0}$ である. $x \in \Omega$ の擬逆元 $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(x)$ を次のように定める:

$$\langle \mathcal{I}_{\mathbf{s}}(x)|y \rangle_{\mathbf{s}} = -D_y \log \Delta_{-\mathbf{s}}(x) \qquad (y \in V).$$

$\mathcal{I}_{\mathbf{s}} : \Omega \to V$ を擬逆元写像と呼ぶ. 一方, Ω の双対錐を内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{s}}$ を用いて V に実現したものを $\Omega^{\mathbf{s}}$ とする:

$$\Omega^{\mathbf{s}} := \{x \in V \mid \forall y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}, \langle x|y \rangle_{\mathbf{s}} > 0\}.$$

$\Omega^{\mathbf{s}}$ から出発して $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}$ の定義と同様の操作を進めることにより, 双対擬逆元写像 $\mathcal{I}^*_{\mathbf{s}} : \Omega^{\mathbf{s}} \to V$ を得る.

$\mathcal{I}_{\mathbf{s}}$ は $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(E) = E, \mathcal{I}_{\mathbf{s}}(\Omega) = \Omega^{\mathbf{s}}$ を満たす. $W := V_{\mathbb{C}}$ とおくと, $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}, \mathcal{I}^*_{\mathbf{s}}$ は共に W 上の双有理写像に解析接続され, $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}^{-1} = \mathcal{I}^*_{\mathbf{s}}$ である. $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}, \mathcal{I}^*_{\mathbf{s}}$ はそれぞれ管状領域 $\Omega + iV, \Omega^{\mathbf{s}} + iV$ 上で正則である. 内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{s}}$ を W に複素双線型に拡張し, 同じ記号で表す. W 上の線型作用素 A の $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{s}}$ に関する転置写像を ${}^{\mathbf{s}}A$ と書く. H の複素化を $H_{\mathbb{C}}$ とおく. $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}$ は $H_{\mathbb{C}}$ 共変である: $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(hx) = {}^{\mathbf{s}}h^{-1}\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(x)$ $(h \in H_{\mathbb{C}})$. また, 実形 V に関する W の複素共役を $w \mapsto \overline{w}$ で表すと, $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(\overline{w}) = \overline{\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(w)}$ $(w \in W)$. Ω によって決まるパラメーター $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_r)$ を

$$d_i := \operatorname{Tr} L_{E_i} \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

で定める. 管状領域 $\Omega + iV$ が対称ならば, E を単位元とする Jordan 代数の構造が W に入る. このとき $\mathcal{I}_{\mathbf{d}}$ は Jordan 代数の逆元写像に一致する.

(1) に倣って管状領域 $\Omega + iV$ の Cayley 変換 $\mathcal{C}_{\mathbf{s}}$ を

$$\mathcal{C}_{\mathbf{s}}(w) := E - 2\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(w + E) \qquad (w \in \Omega + iV)$$

と定義する. また, $\Omega^{\mathbf{s}} + iV$ の双対 Cayley 変換 $\mathcal{C}^*_{\mathbf{s}}$ を次のように定める:

$$\mathcal{C}^*_{\mathbf{s}}(w) := E - 2\mathcal{I}^*_{\mathbf{s}}(w + E) \qquad (w \in \Omega^{\mathbf{s}} + iV).$$

定理. Ω を既約な等質錐とし, $\mathbf{s} > 0$ とする. このとき次の二つは同値である:
(A) $\mathcal{C}_{\mathbf{s}}(\Omega + iV), \mathcal{C}^*_{\mathbf{s}}(\Omega^{\mathbf{s}} + iV)$ は共に凸である.
(B) $\Omega + iV$ は対称であり, ある正数 $p > 0$ が存在して $\mathbf{s} = p\mathbf{d}$ となる.

参考文献

[1] C. Kai and T. Nomura, *A characterization of symmetric cones through pseudoinverse maps*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[2] C. Kai and T. Nomura, *A characterization of symmetric tube domains by convexity of Cayley transform images*, Kyoto-Math., 2004-4.