擬逆元写像による対称錐の特徴付け

甲斐　千舟　　（京大・理）
野村　隆昭　　（京大・理）

有限次元ベクトル空間の中の等質錐 Ω は適当な内積に関してその双対錐と一致するとき対称錐と呼ばれる．ここでは，等質錐が対称錐になるための必要十分条件を複素化ベクトル空間上の擬逆元写像を使って与える．また，いかなる内積に関して対称錐になるかを明示する．

V を有限次元ベクトル空間，$\Omega \subset V$ を既約な等質錐とする．

$$G(\Omega) := \{g \in GL(V)\ ;\ g\Omega = \Omega\}$$

と定義する．このとき，Ω に単純推移的に作用するような，$G(\Omega)$ の部分群 H が存在する．E を Ω の任意の点とし，H から Ω への写像 $h \mapsto hE$ を考えると，これは微分同相である．この写像の，H の単位元における微分の逆写像として得られる線型同型を L で表す:

$$L : V \ni x \mapsto L_x \in \mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H)$$

$a \triangle b := L_a b\ (a, b \in V)$ と定めると V は clan と呼ばれる非結合的代数となり E は単位元になる ([4])．単位元をもつ clan は性質の良い直和分解をもつ (normal 分解):

$$V = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R}E_i \oplus \sum_{j<k} V_{kj}.$$

r は Ω のランク，あるいは clan V のランクと呼ばれ，E_i はべき等元である．

$$\mathfrak{a} := \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R}L_{E_i},\ \mathfrak{n} := \sum_{j<k} \mathfrak{h}_{kj} \quad (\{\mathfrak{h}_{kj} := \{L_x\ ;\ x \in V_{kj}\})$$

とおく．$\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_r) \in \mathbb{R}^r$ に対し，$A := \exp \mathfrak{a}$ の一次元表現 $\chi_{\mathbf{u}}$ を次のように定める:

$$\chi_{\mathbf{u}}\Bigl(\exp\Bigl(\sum_{i=1}^{r} t_i E_i\Bigr)\Bigr) := \exp\Bigl(\sum_{i=1}^{r} u_i t_i\Bigr).$$

$N := \exp \mathfrak{n}$ とおくと $H = A \ltimes N$ となるから，$\chi_{\mathbf{u}}$ を N 上自明であるとして H の一次元表現に拡張しておく．$\Omega = HE$ に注意して，Ω 上の関数 $\triangle_{\mathbf{u}}$ を

$$\triangle_{\mathbf{u}}(x) := \chi_{\mathbf{u}}(h) \quad (x = hE,\ h \in H)$$

で定める．

V 上の線型形式 E_i^* を $x = \sum_{i=1}^r x_i E_i + \sum_{j<k} x_{kj}$ $(x_i \in \mathbb{R}, x_{kj} \in V_{kj})$ に対し $\langle x, E_i^* \rangle = x_i$ で定め，$E_{\mathbf{u}}^* := \sum_{i=1}^r u_i E_i^*$ とする．
$\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{R}^r$ $(s_1, \ldots, s_r > 0)$ をとる．V に次のような内積を入れる:

$$\langle x|y \rangle_{\mathbf{s}} := \langle x \triangle y, E_{\mathbf{s}}^* \rangle.$$

写像 $I_{\mathbf{s}} : \Omega \to V$ を

$$\langle I_{\mathbf{s}}(x)|y \rangle_{\mathbf{s}} = -D_y \log \triangle_{-\mathbf{s}}(x)$$

が任意の V の元 y に対して成立するように定義する (D_y は y 方向の微分)．$I_{\mathbf{s}}$ は V の複素化空間上の双有理写像に解析接続され，これを擬逆元写像と呼ぶ ([3])．

$n_{kj} := \dim V_{kj}$ とおき，$\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_r) \in \mathbb{R}^r$ を $d_i := 1 + 1/2(\sum_{\alpha > i} n_{\alpha i} + \sum_{\beta < i} n_{i\beta})$ で定義する．内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{s}}$ で V とその双対空間を同一視して Ω の双対錐を V に埋め込んだものを $\Omega^{\mathbf{s}}$ で表す．

定理　次の (A),(B),(C) は同値である:
(A)　$I_{\mathbf{s}}(\Omega + iV) = \Omega^{\mathbf{s}} + iV$
(B)　$\mathbf{s}$ は $\mathbf{d}$ の正の定数倍，かつ Ω は対称錐
(C)　$\mathbf{s}$ は $\mathbf{d}$ の正の定数倍，かつ $\Omega = \Omega^{\mathbf{s}}$

(C) から (A) は仮定のもとで, Ω に対応する Jordan 代数における逆元写像に擬逆元写像が正の定数倍を除いて一致すること ([1]) から従う．

(B) から (C), および (A) から (B) の証明が重要である．前者は内積を Ω の特性関数の対数をとり二階微分したもので表して議論を行うことにより示される．後者の証明においては, 擬逆元写像の $H_{\mathbb{C}}$ 同変性 ($H_{\mathbb{C}}$ は H のリー群としての複素化) を用いてチューブ領域の特定の元に対してその像を計算することにより，パラメーター $\mathbf{s}$，および $\{n_{kj}\}_{j<k}$ についての不等式を導出して解析を行う．$\{n_{kj}\}_{j<k}$ がすべて等しいことを示せば，Vinberg の得た定理 ([5]) から Ω が対称錐であることが従う．

参考文献

[1] J. Faraut and A. Korańyi, Analysis on Symmetric Cones, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[2] C. Kai and T. Nomura, in preparation.

[3] T. Nomura, On Penny's Cayley transform of a homogeneous Siegel domain, J. Lie Theory **11** (2001), 185-206.

[4] E. B. Vinberg, The theory of convex homogeneous cones, Trudy Moskov. Mat. Obsc., **12**, 303-358; Trans. Moscow Math. Soc., **12**, 303-358.

[5] E. B. Vinberg, The structure of the group of automorphisms of a homogeneous convex cone, Trudy Moskov. Mat. Obsc., **13**, 56-83; Trans. Moscow Math. Soc., **13**, 63-93.