等質 Siegel 領域の対称性と Poisson-Hua 核の調和性

野村 隆昭（京大・理）

於：明治大学

2002年3月29日

Siegel 領域

V : 有限次元実ベクトル空間

$\cup$

Ω : 正則開凸錐　（正則 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 直線を全然含まない）

$W := V_{\mathbb{C}}$　（$w \mapsto w^*$: V に関する共軛）

U : 有限次元複素ベクトル空間

$Q : U \times U \to W$, Hermitian sesquilinear Ω-positive

i.e., $\begin{cases} Q(u', u) = Q(u, u')^* \\ Q(u, u) \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \quad (0 \neq \forall u \in U) \end{cases}$

$$D := \{(u, w) \in U \times W \; ; \; w + w^* - Q(u, u) \in \Omega\}$$

（II 型の）Siegel 領域

- $U = \{0\}$ のときは $D = \Omega + iV$
  （チューブ領域 or I 型の Siegel 領域）

<u>仮定.</u>　D は 等質

i.e., $\mathrm{Hol}(D) \curvearrowright D$ 推移的

Pjatetskii-Shapiro 代数 — 正規 j 代数 —

$\exists G$: 分裂可解 Lie 群 s.t.

$G \curvearrowright D$ 単純推移的 ($\rightsquigarrow G \approx D$: 微分同相)

$\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ は Pjatetskii-Shapiro 代数の構造を持つ：

$\exists J$: $\mathfrak{g}$ 上の可積分な概複素構造，

$\exists \omega$: $\mathfrak{g}$ 上の認容線型形式 *i.e.*,

$\langle x | y \rangle_\omega := \langle [Jx, y], \omega \rangle$ は $\mathfrak{g}$ に J 不変な正定値内積を定義する．

例 (Koszul '55). Koszul 形式．

$$\langle x, \beta \rangle := \mathrm{tr}\big(\mathrm{ad}(Jx) - J\,\mathrm{ad}(x)\big) \quad (x \in \mathfrak{g}).$$

β は認容線型形式である．

• 実際，β が定める $\mathfrak{g}$ の内積 $\langle x | y \rangle_\beta$ は，D $(\approx G)$ の Bergman 計量から定まる $\mathfrak{g}$ のエルミート内積の実部と正の定数倍しか違わない．

Poisson-Hua 核

$S(z_1, z_2)$: D の Szegö 核 ($=$ Hardy 空間の再生核)

Hardy 空間. D 上の正則函数 F で次の条件をみたすものがなす Hilbert 空間：

$$\boxed{\sup_{t\in\Omega}\int_U dm(u)\int_V \left|F\left(u, t+\tfrac{1}{2}Q(u,u)+ix\right)\right|^2 dx < \infty}$$

Σ : D の Shilov 境界

$$\Sigma = \left\{(u,w) \in U \times W\,;\, 2\,\mathrm{Re}\,w = Q(u,u)\right\}$$

$S(z,\zeta)$ は $z \in D$, $\zeta \in \Sigma$ のときも意味を持つ．

$$P(z,\zeta) := \frac{|S(z,\zeta)|^2}{S(z,z)} \quad (z \in D,\ \zeta \in \Sigma) :$$

D の Poisson-Hua 核

$(\mathfrak{g}, J, \omega)$: Pjatetskii-Shapiro **代数**

$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{n}$ $\begin{cases} \mathfrak{a} : \text{可換 s.t. } \mathfrak{a} \curvearrowright \mathfrak{g} \text{（随伴作用）は対角化可能} \\ \mathfrak{n} : \mathfrak{a}\text{-root 空間の和（正ルートのみ）} \end{cases}$

つねに $ax+b$ 代数の直積を含む：

$\exists H_1, \ldots, H_r$: $\mathfrak{a}$ **の基底** $(r := \operatorname{rank} \mathfrak{g})$ s.t.

$E_j := -JH_j \in \mathfrak{n}$ **とおくとき，** $[H_j, E_k] = \delta_{jk} E_k$.

可能なルート

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_k \pm \alpha_j)\ (j < k), \quad \alpha_k, \quad \tfrac{1}{2}\alpha_k$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$: $H_1, \ldots, H_r$ **に双対な** $\mathfrak{a}^*$ **の基底**

$\mathfrak{g}(0) := \mathfrak{a} + \sum_{k>j} \mathfrak{g}_{(\alpha_k - \alpha_j)/2}$, $\mathfrak{g}(1/2) := \sum \mathfrak{g}_{\alpha_k/2}$: J **不変**

$\mathfrak{g}(1) := \sum_{k \geqq j} \mathfrak{g}_{(\alpha_k + \alpha_j)/2} = J\mathfrak{g}(0)$ $(\mathfrak{g}_{\alpha_k} = \mathbb{R}E_k\ (\forall k))$.

- $[\mathfrak{g}(j), \mathfrak{g}(k)] \subset \mathfrak{g}(j+k)$.

$V := \mathfrak{g}(1)$, $E := E_1 + \cdots + E_r$, $G(0) := \exp \mathfrak{g}(0)$,

$\Omega := G(0)E$: V **の正則開凸錐になる（実は** $G(0) \approx \Omega$**）**

$W := V_{\mathbb{C}}$, $U := (\mathfrak{g}(1/2), -J)$,

$Q(u, u') := \frac{1}{2}([Ju, u'] - i[u, u'])$: Ω-positive **になる．**

$D := \{(u, w) \in U \times W \,;\, w + w^* - Q(u, u) \in \Omega\}$

$\mathsf{e} := (0, E) \in D$.

$\langle x | y \rangle_\omega$: J 不変な $\mathfrak{g}$ 上の正定値内積
$\rightsquigarrow$ G 上の左不変な Riemann 計量
$\rightsquigarrow$ $\mathscr{L}_\omega$: G 上の Laplace-Beltrami 作用素．

$\Psi_\omega \in \mathfrak{g}$ をとって，$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, x) = \langle x | \Psi_\omega \rangle_\omega \ (\forall x \in \mathfrak{g})$.

$\Psi_\omega \in \mathfrak{a}$ が示される．

補題 (Urakawa '79)． $\mathscr{L}_\omega = -\Lambda_\omega + \Psi_\omega$. ただし $\Lambda_\omega := X_1^2 + \cdots + X_{\dim \mathfrak{g}}^2 \in U(\mathfrak{g})$: 内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_\omega$ に関する $\mathfrak{g}$ の正規直交基底の平方和．

D : 対称 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall z \in D,\ \exists \sigma_z \in \mathrm{Hol}(D)$ s.t.

$$\begin{cases} \sigma_z^2 = \text{identity}, \\ z \text{ は } \sigma_z \text{ の孤立固定点}. \end{cases}$$

$$P_\zeta^G(g) := P(g \cdot \mathrm{e},\ \zeta) \quad (g \in G,\ \zeta \in \Sigma).$$

定理． $\zeta \in \Sigma$: 固定．
$\mathscr{L}_\omega P_\zeta^G = 0$
$\Longleftrightarrow \begin{cases} (1) & D \text{ は対称}, \\ (2) & \mathfrak{n} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \text{ への } \omega \text{ と } \beta \text{ の制限は} \\ & \text{正の定数倍しか違わない}. \end{cases}$

初めから $\omega = \beta$ としておくと

> 系 (Hua–Look ('59), Korányi ('65), Xu ('79).
> $P(\cdot, \zeta)$ が Bergman 計量で調和 $(\forall \zeta \in \Sigma)$
> $\iff$ D が対称.

$\mathscr{C}_S$: Szegö 核に付随する Cayley 変換.
$\mathscr{C}_S$ は D を双有理的，双正則に有界領域に写す.

$\psi(g) := g \cdot \mathrm{e}$ 　により　 $G \approx D$
$d\psi : (\mathfrak{g}, -J) \cong Z := U + W$（複素線型同型）

$\langle \cdot | \cdot \rangle_\omega$ から $(\mathfrak{g}, -J)$ にエルミート内積が自然に定義
$\rightsquigarrow$ それを Z に $d\psi$ でうつす
$\rightsquigarrow$ さらに $U^\dagger + W^*$ に自然にうつして $(\cdot | \cdot)_\omega$ で表す.
(ただし，$U^\dagger + W^*$ は $\mathscr{C}_S(D)$ の ambient VS で，
$U^\dagger$ は U 上の複素反線型形式の全体を表す.)

• Szegö 核は $G(0)$ の 1 次元表現 χ から微分同相 $G(0) \approx \Omega$ と解析接続を経て定義されている.
$\alpha \in \mathfrak{g}(0)$ をとって，$\chi(\exp T) = e^{-\langle T, \alpha \rangle} \quad (T \in \mathfrak{g}(0))$.

> 定理. $\|\mathscr{C}_S(\zeta)\|_\omega^2 = \langle \Psi_\omega, \alpha \rangle \;\; (\forall \zeta \in \Sigma)$
> $\iff$ D は対称かつ $\omega|_\mathfrak{n}$ は $\beta|_\mathfrak{n}$ の正の定数倍.

> 定理.
> $\mathscr{L}_\omega P_\zeta^G(e) = \big(-\|\mathscr{C}_S(\zeta)\|_\omega^2 + \langle \Psi_\omega, \alpha \rangle\big) P_\zeta^G(e).$