等質 Siegel 領域の対称性と Poisson–Hua 核の調和性

野村 隆昭　　　京大・理

等質 Siegel 領域 $D = D(\Omega, Q)$ を考える．Ω は実ベクトル空間 V の正則開凸錐，U は複素ベクトル空間，$Q : U \times U \to W := V_{\mathbb{C}}$ は Ω-positive なエルミート写像である．D は一般化された右半平面として実現しておく：

$$D := \{(u, w) \in U \times W \,;\, w + w^* - Q(u, u) \in \Omega\}.$$

Σ を D の Shilov 境界とする：

$$\Sigma := \{(u, w) \in U \times W \,;\, 2\,\mathrm{Re}\, w = Q(u, u)\}.$$

D の Szegö 核 S から Poisson–Hua 核 $P(z, \zeta)$ $(z \in D,\ \zeta \in \Sigma)$ が定義される： $P(z, \zeta) := |S(z, \zeta)|^2 S(z, z)^{-1}$.

一方，D に単純推移的に作用する分裂可解 Lie 群を G とする．G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は正規 j 代数の構造を持つ．付随する $\mathfrak{g}$ 上の可積分な概複素構造を J で表す．さらに $\mathfrak{g}$ 上の認容線型形式 ω が存在して，$\mathfrak{g}$ に実内積 $\langle\, x \,|\, y \,\rangle_\omega := \langle\, [Jx, y], \omega \,\rangle$ を与え，それにより G 上に左不変な Riemann 計量が入る．その計量に関する G 上の Laplace–Beltrami 作用素を $\mathcal{L}_\omega$ とする．認容線型形式の例としては，次で定義される Koszul 形式 β がある：

$$\langle x, \beta \rangle := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(Jx) - J\,\mathrm{ad}(x)) \qquad (x \in \mathfrak{g}).$$

D の base point $\mathbf{e}$ を固定して（講演では明示的に与える），軌道写像 $\psi(g) := g \cdot \mathbf{e}$ $(g \in G)$ で G と D を同一視するとき，内積 $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle_\beta$ による G 上の Riemann 計量は，正の定数倍を無視して，D の Bergman 計量（の実部）に等しい．$P^G_\zeta(g) := P(\psi(g), \zeta)$ とおく．

定理 1.　固定された任意の $\zeta \in \Sigma$ に対して $\mathcal{L}_\omega P^G_\zeta = 0 \iff$

(1) D は対称領域,

(2) 導来部分代数 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ への ω と β の制限は正の定数倍しか違わない．//

定理 1 は，特に非対称領域において，Poisson–Hua 核は，Siegel 領域のいかなる標準的なエルミート計量でも調和にならないことを示している．定理 1 において始めから $\omega = \beta$ としておくと，Hua–Look (1959), Korányi (1965), Xu (1978) による結果を系として得る：

系. $P(\cdot, \zeta)$ が Bergman 計量で調和 $(\forall \zeta \in \Sigma) \iff D$ が対称. //

定理 1 の証明には，下に述べる定理 2 の幾何学的ノルム等式による対称 Siegel 領域の特徴付けを用いる．$d\psi$ は複素ベクトル空間の間の同型 $(\mathfrak{g}, -J) \cong Z := U + W$ を与えているので，$\langle \cdot | \cdot \rangle_\omega$ から自然に定義される $(\mathfrak{g}, -J)$ のエルミート内積を Z に移してそれを $(\cdot | \cdot)_\omega$ とする．一方 Szegö 核に付随する D の Cayley 変換 $\mathcal{C}_S$ を定義することができる．Σ も依然として $\mathcal{C}_S$ の正則領域に含まれていることに注意しておく．像 $\mathcal{C}_S(D)$ は $U^\dagger + W^*$ の有界領域である．ただし，$U^\dagger$ は U 上の反双線型形式の全体を表し，W^* は W の双対ベクトル空間である．Z のエルミート内積 $(\cdot | \cdot)_\omega$ を $U^\dagger + W^*$ に自然に移す（同じ記号で表す）．また $\Psi_\omega \in \mathfrak{g}$ をとって，$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, x) = \langle x \,|\, \Psi_\omega \rangle_\omega$ が任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して成り立つようにしておく．

定理 2. $\|\mathcal{C}_S(\zeta)\|_\omega^2 = \langle \Psi_\omega, \alpha \rangle$ が任意の $\zeta \in \Sigma$ に対して成り立つ $\iff D$ が対称で $\omega|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ は $\beta|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ の正の定数倍.
ただし α は Szegö 核 S から自然に得られる $\mathfrak{g}^*$ の元である．//

定理 2 と定理 1 を次の定理 3 が繋ぐ．

定理 3. $\mathcal{L}_\omega P_\zeta^G(e) = \big(-\|\mathcal{C}_S(\zeta)\|_\omega^2 + \langle \Psi_\omega, \alpha \rangle\big) P_\zeta^G(e)$. //

定理 3 の証明は，Lie 代数上の内積から得られる連結 Lie 群上の左不変な Riemann 計量に関する Laplace–Beltrami 作用素を普遍包絡代数の元で表示し（Urakawa [2] による），少々長たらしい計算を経てなされる．

References

[1] T. Nomura, Geometric connection of the Poisson kernel with a Cayley transform for homogeneous Siegel domains, Preprint (submitted).

[2] H. Urakawa, On the least positive eigenvalue of the Laplacian for compact group manifolds, J. Math. Soc. Japan, **31** (1979), 209–226.