等質 Siegel 領域上の Berezin 変換と Laplace-Beltrami 作用素

野村 隆昭　　京大・理

D を既約な等質 Siegel 領域とし，前講演と同じく D に単純推移的に作用する分裂可解 Lie 群を G とする．D の Bergman 核を κ とする．実数 $\lambda > \lambda_0$ に対して（これは，D 上の重み付き Bergman 空間が消えない条件で，λ_0 $(0 < \lambda_0 < 1)$ は明示的に与えることができる），Berezin 核 A_λ は

$$A_\lambda(z_1, z_2) := \left[\frac{|\kappa(z_1, z_2)|^2}{\kappa(z_1, z_1)\,\kappa(z_2, z_2)}\right]^\lambda \qquad (z_1, z_2 \in D)$$

で与えられる．本稿での議論に関係のない定数を除いてしまうと，D 上の Berezin 変換とは A_λ を積分核とする $L^2(D, d\lambda)$ 上の積分作用素である（$d\lambda$ は D 上の G-不変測度）．D は G と微分同相なので，

$$a_\lambda(x) := A_\lambda(x \cdot \mathbf{e}, \mathbf{e}) \qquad (x \in G)$$

とすると，Berezin 変換は G 上のたたみ込み作用素 B_λ として書き直せる：

$$B_\lambda f(x) = \int_G a_\lambda(y^{-1}x) f(y)\, dy = f * a_\lambda(x) \qquad (f \in L^2(G)).$$

$\lambda > \lambda_0$ のとき，$a_\lambda \in L^1(G)$ であることに注意しておこう．

一方，G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は正規 j 代数の構造を持ち，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の認容線型形式 ω は $\mathfrak{g}$ に実内積 $\langle\, x \,|\, y \,\rangle_\omega := \langle\, [Jx, y], \omega \,\rangle$ を与え，それにより G 上に左不変な Riemann 計量が入る．その計量に関する G 上の Laplace-Beltrami 作用素を $\mathcal{L}_\omega$ とする．$\mathfrak{g}$ の普遍包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ の元 X を G 上の右不変な微分作用素と見るとき X のままで，左不変な微分作用素と見るとき $\widetilde{X}$ で表すことにする：すなわち，$X \in \mathfrak{g}$ のときは

$$Xf(x) := \frac{d}{dt} f\bigl(\exp(-tX)x\bigr)\Big|_{t=0}, \quad \widetilde{X}f(x) = \frac{d}{dt} f\bigl(x \exp tX\bigr)\Big|_{t=0}.$$

$\Psi \in \mathfrak{g}$ を選んで，$\operatorname{tr}\operatorname{ad}(X) = \langle X \mid \Psi \rangle_\omega$ とすると，浦川肇氏により次の事実が示されている（一般の連結 Lie 群で成り立つが，本稿のコンテクストで書き下しておく）：

命題 1 [2]. 内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_\omega$ に関する $\mathfrak{g}$ の正規直交基底 $\{X_k\}_{k=1}^{2N}$ をとって，$\Lambda = X_1^2 + \cdots + X_{2N}^2 \in U(\mathfrak{g})$ とするとき，$\mathcal{L}_\omega = -\widetilde{\Lambda} + \widetilde{\Psi}$ と表される．ここで元 $\Lambda \in U(\mathfrak{g})$ は正規直交基底 $\{X_k\}$ の取り方に依らず定まっていることに注意． □

定理 2. B_λ と $\mathcal{L}_\omega$ が可換 $\iff$ D は対称であり，考えている計量は Bergman 計量の実部として得られる Riemann 計量の正の定数倍． □

この定理が前講演の定理からどのような手順で導かれるかを書いておこう：

(1) B_λ と $\mathcal{L}_\omega$ が可換 $\iff$ $(\widetilde{\Lambda} - \widetilde{\Psi})a_\lambda = (\Lambda - \Psi)a_\lambda$.

$a_\lambda(x) = a_\lambda(x^{-1})$ $(\forall x \in G)$ なので，形式的な計算から

(2) $(\widetilde{X}a_\lambda)(x) = (Xa_\lambda)(x^{-1})$ for $\forall X \in U(\mathfrak{g})$ and $\forall x \in G$.

$\mathcal{C}$ を前々講演で定義した Cayley 変換 $D \to \mathcal{C}(D)$ とするとき，少々長たらしい計算によって次を得る：

(3) $(\Lambda - \Psi)a_\lambda(g) = \lambda\, a_\lambda(g)\big(\lambda\|\mathcal{C}(g\cdot \mathbf{e})\|_\omega^2 - \langle \Psi, \alpha \rangle\big)$ for some $\alpha \in \mathfrak{g}^*$.

これら (1) ～ (3) により

(4) B_λ が $\mathcal{L}_\omega$ と可換 $\iff$ $\|\mathcal{C}(g\cdot\mathbf{e})\|_\omega = \|\mathcal{C}(g^{-1}\cdot\mathbf{e})\|_\omega$ for $\forall g \in G$.

従って前講演の定理から本稿の定理を得る．

References

[1] T. Nomura, Berezin transforms and Laplace-Beltrami operators on homogeneous Siegel domains, Preprint submitted for publication.

[2] H. Urakawa, On the least positive eigenvalue of the Laplacian for compact group manifolds, J. Math. Soc. Japan, **31** (1979), 209–226.