Cayley 変換による対称 Siegel 領域の特徴付け

野村 隆昭　　　　京大・理

先の講演で導入した Cayley 変換 $\mathcal{C}$ を用いて，対称 Siegel 領域の解析的な特徴付けが得られた [3] ので，これを報告する．

D を既約な等質 Siegel 領域とし，D に単純推移的に作用する分裂可解 Lie 群を G とする．以下前講演の記号をそのまま用いる．特に $\mathcal{C}$ は前講演での Cayley 変換 $D \to \mathcal{C}(D)$ を表すものとする．従って，$\mathcal{C}(D) \subset U^\dagger \oplus W^*$ であり，$U^\dagger$ は U 上の反線型形式全体を表す．

点 $\mathbf{e} := (0, E) \in D$ における D の接空間 $T_{\mathbf{e}}(D) = U \oplus W$ には D の Bergman 計量から定まるエルミート内積がある．それにより複素ベクトル空間 $U^\dagger \oplus W^*$ に自然にエルミート内積が入り（Hilbert-Schmidt 式に定義すればよい），その内積からノルム $\|\cdot\|$ が定義される．

定理 1.　$\|\mathcal{C}(g \cdot \mathbf{e})\| = \|\mathcal{C}(g^{-1} \cdot \mathbf{e})\|$ が任意の $g \in G$ に対して成り立つ $\iff$ D は対称．　□

G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ には正規 j 代数の構造が入る(定義は講演中に述べる)．この正規 j 代数 $\mathfrak{g}$ 上の認容線型形式 ω を用いて定理 1 を少し一般化することができる．すなわち，D の計量としては初めから Bergman 計量をとるのではなく，この認容線型形式 ω から導かれるものとしておき，ノルム $\|\cdot\|_\omega$ はその計量から得られるものとする．このとき，定理の主張は

定理 2.　$\|\mathcal{C}(g \cdot \mathbf{e})\|_\omega = \|\mathcal{C}(g^{-1} \cdot \mathbf{e})\|_\omega$ が任意の $g \in G$ に対して成立 $\iff$ D は対称かつ考えている計量は Bergman 計量の正の定数倍．　□

D の Cayley 像 $\mathcal{D} := \mathcal{C}(D)$ の方で定理を述べると，よりインパクトがあるかもしれない．特に D が対称領域のときは，$\mathcal{D}$ が有界対称領域の

Harish-Chandra 実現と自然に同一視されること，そしてその同一視のもとで微分 $\mathcal{C}'(\mathbf{e})$ がスカラー写像になることを踏まえると，「 $\Longleftarrow$ 」の証明が見えてくる．

$\boxed{\textbf{定理 } 3.}$ $\|g \cdot 0\|_\omega = \|g^{-1} \cdot 0\|_\omega$ が任意の $g \in \mathcal{C} \circ G \circ \mathcal{C}^{-1}$ に対して成立 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{D}$ は対称かつ考えている計量は Bergman 計量の正の定数倍． $\square$

定理 3 で初めから Bergman 計量しか考えないなら，$\mathcal{C} \circ G \circ \mathcal{C}^{-1}$ のところを，$\mathcal{D}$ の正則同相のなす Lie 群の連結成分 $\mathrm{Hol}(\mathcal{D})^\circ$ に置き換えても OK である．

これらの定理の証明，特に「 $\Longrightarrow$ 」の部分，は相当ハードな計算と，D'Atri と Miatello による既約準対称 Siegel 領域の特徴付け [2]

(1) 対応する正規 j 代数におけるある種のルート空間の次元の一定性

及び，Satake と Dorfmeister による定義データでの対称 Siegel 領域の特徴付け [1]，[4]，すなわち極めて簡略化した言い方をすれば，

(2) 対応する正規 j 代数が Jordan 3 重系とその極大 tripotent による Peirce 分解より来ている

ということを用いる．

References

[1] J. E. D'Atri and J. Dorfmeister, Flat totally geodesic submanifolds of quasisymmetric Siegel domains, Geom. Dedicata, **28** (1988), 321–336.

[2] J. E. D'Atri and I. D. Miatello, A characterization of bounded symmetric domains, Trans. Amer. Math. Soc., **276** (1983), 531–540.

[3] T. Nomura, A characterization of symmetric Siegel domains through a Cayley transform, Preprint submitted for publication.

[4] I. Satake, Algebraic structures of symmetric domains, Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, Tokyo-Princeton, 1980.