等質 Siegel 領域の Cayley 変換について

野村 隆昭　　京大・理

本稿でいう Cayley 変換は，等質 Siegel 領域 D を複素ユークリッド空間内の有界領域に双正則 (biholomorphic) に写す写像 $\mathcal{C}$ で，

(1) 像 $\mathcal{C}(D)$ はある意味で「標準的」である（ここでは，D が対称領域であるならば，$\mathcal{C}(D)$ は有界対称領域の Harish-Chandra 実現と自然に同一視できるもの — と捉えることにする），

(2) $\mathcal{C}$ が双有理的 (birational) 写像であることは当然として，一次分数変換の一般化であることが視覚的にわかる，

(3) $\mathcal{C}^{-1}$ についても一次分数変換の一般化であることが視覚的にわかる

というものであるべきだという考えが出発点にある．もとより Siegel 領域は有界領域に正則同値なのであるから，その中で「標準的」な有界領域（有界等質領域の標準的実現）とは何か — という問いに答えようというものである．

Penney は [3] で，(1), (2) について満足のいく Cayley 変換を導入したが，(3) には触れていない．また Penney より前に論文 [1] において，D が準対称であるとき，対称領域のときの Cayley 変換の自然な一般化として Dorfmeister が Cayley 変換を導入していて，それは (1) ～ (3) の要請を満足する．しかしながら，準対称領域において Penney の Cayley 変換が Dorfmeister の Cayley 変換になるかどうかは [3] では明らかにされていなかった．

本稿では Penney の Cayley 変換の定義に若干の修正を加え，(1) ～ (3) をみたしつつ，準対称領域において Dorfmeister の Cayley 変換に自然に同一視できるものを導入する．

Siegel 領域 D の定義データを (V, U, Ω, Q) とする：

$$D := D(\Omega, Q) = \{(u, w) \in U \times V_{\mathbb{C}}\ ;\ w + w^* - Q(u, u) \in \Omega\}.$$

D の Bergman 核 κ は，$\Omega + iV$ 上の正則函数 η を用いて

$$\kappa((u_1, w_1), (u_2, w_2)) = \eta(w_1 + w_2^* - Q(u_1, u_2))$$

と表されることが知られている．この η を用いて「分母」$\mathcal{I}(x)$ を定義する：

$$\mathcal{I}(x) := -\nabla \log \eta(x) \in V^* \quad (x \in \Omega).$$

Penney の「分母」は η の代わりに Ω の特性函数 ϕ を用いるものである：

$$\phi(x) := \int_{\Omega^*} e^{-\langle x, \lambda \rangle}\, d\lambda \qquad (x \in \Omega,\ \text{ただし } \Omega^* \subset V^* \text{ は } \Omega \text{ の双対錐}).$$

<u>Facts:</u> (1) $x \in \Omega \implies \mathcal{I}(x) \in \Omega^*$.
(2) $\mathcal{I}$ は有理写像 $W \to W^*$ $(W := V_{\mathbb{C}})$ に解析接続される． $\square$

$E \in \Omega$（講演では明示的に定義）を固定して，Cayley 変換を

$$C(w) := \mathcal{I}(E) - 2\,\mathcal{I}(w + E) \in W^* \qquad (w \in V + i\Omega),$$
$$\mathcal{C}(u, w) := \big(2\,\mathcal{I}(w + E) \circ Q(u, \cdot),\, C(w)\big) \qquad ((u, w) \in D).$$

で定義する（$z \in \mathbb{C} \implies 1 - 2(z+1)^{-1} = (z-1)(z+1)^{-1}$ に注意）．

定理. (1) (Penney) $\mathcal{C}(D)$ は有界.
(2) $\mathcal{C} : D \to \mathcal{C}(D)$ は双有理的，双正則である．
(3) $\mathcal{C}^{-1}$ も明示的に書き下せる（公式は講演中に述べる）． $\square$

注意. 準対称領域では $\mathcal{C}$ は次のように書き直されて，Dorfmeister の Cayley 変換になっていることがわかる（記号等は講演中に説明をする）．

$$\mathcal{C}(u, w) \equiv \big(2\,\varphi(w + E)^{-1} u,\, (w - E)(w + E)^{-1}\big).$$

References

[1] J. Dorfmeister, Quasisymmetric Siegel domains and the automorphisms of homogeneous Siegel domains, Amer. J. Math., **102** (1980), 537–563.

[2] T. Nomura, On Penney's Cayley transform of a homogeneous Siegel domain, J. Lie Theory, **11** (2001), to appear.

[3] R. Penney, The Harish-Chandra realization for non-symmetric domains in $\mathbb{C}^n$, in "Topics in geometry in memory of Joseph D'Atri", Ed. by S. Gindikin, Birkhäuser, Boston, 1996, 295–313.