等質開凸錐，クラン，そして基本相対不変式

野 村 隆 昭（九大・数理）

伊豆長岡

2010 年 11 月 10 日

等質開凸錐

V : 内積を持つ有限次元実ベクトル空間

$V \supset \Omega$: 正則 (**regular**) 開凸錐　(正則 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 直線を全く含まない)

- $G(\Omega) := \{g \in GL(V)\ ;\ g(\Omega) = \Omega\}$**:** Ω の線型同型群
  $GL(V)$ の閉部分群，従って線型 **Lie** 群.

- Ω : 等質 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $G(\Omega) \curvearrowright \Omega$: 推移的

例 : $V = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R}) \supset \Omega := \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})^{++}$**:**
$GL(r, \mathbb{R}) \curvearrowright \Omega$　**by**　$GL(r, \mathbb{R}) \times \Omega \ni (g, x) \mapsto gx\,{}^t g \in \Omega$

自己双対な等質開凸錐 (対称錐) になっている.

Ω が 自己双対 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \langle \cdot | \cdot \rangle$ **s.t.** $\Omega = \left\{ y \in V\ ;\ \langle x | y \rangle > 0 \quad (\forall x \in \overline{\Omega} \backslash \{0\}) \right\}$

(この右辺は内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関する Ω の双対錐である)

対称錐 $\rightleftarrows$ **Euclid 型 Jordan 代数**

$\Omega \rightleftarrows V$：**ambient VS** （$\equiv$ **ref. pt.** での接空間）における代数的構造

- 双線型な積 xy が定義された V が**Jordan 代数**

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ \forall x, y \in V \text{ に対して, } \begin{cases} (1) \quad xy = yx, \\ (2) \quad x^2(xy) = x(x^2y) \end{cases}$$

- 実 **Jordan** 代数が**Euclide 型** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$：内積 **s.t.**

$$\langle\, xy \,|\, z\,\rangle = \langle\, x \,|\, yz\,\rangle \qquad (\forall x, y)$$

既約対称錐のリスト：

$\Omega = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})^{++} \subset V = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$, $\quad A \circ B := \frac{1}{2}(AB + BA)$

$\Omega = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{C})^{++} \subset V = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{C})$

$\Omega = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{H})^{++} \subset V = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{H})$

$\Omega = \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})^{++} \subset V = \mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})$

$\Omega = \Lambda_n \subset V = \mathbb{R}^n$（$n$ 次元 **Lorentz** 錐；$n = 3, 4, \ldots$）

非自己双対等質開凸錐：

Vinberg 錐 (1960)

$$V = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 \end{pmatrix} \; ; \; x_1, \ldots, x_5 \in \mathbb{R} \right\} \supset \Omega := \left\{ x \in V \; ; \; \begin{matrix} x_1 > 0 \\ x_1 x_3 - x_2^2 > 0 \\ x_1 x_5 - x_4^2 > 0 \end{matrix} \right\}$$

最低次元の非自己共役等質開凸錐

既約等質開凸錐の分類 **(dim** ≤ 10**)**　**(Kaneyuki–Tsuji, 1974)**

線型同型を除いて **135** 個，その内自己双対なものは **12** 個.

$\mathbb{R}_{>0}$**,**　$\Lambda_n \subset \mathbb{R}^n$　(**Lorentz** 錐で，$\dim = 3, 4, \ldots, 10$)

$\mathrm{Sym}(3, \mathbb{R})^{++}$ **(**6**-**dim**),**　$\mathrm{Herm}(3, \mathbb{C})^{++}$ **(**9**-**dim**),**　$\mathrm{Sym}(4, \mathbb{R})^{++}$ **(**10**-**dim**)**

Vinberg の理論より (1963)

等質開凸錐 $\rightleftarrows$ 単位元を持つクラン

$\Omega \rightleftarrows V$：**ambient VS** （$\equiv$ **ref. pt.** での接空間における代数的構造）

- 双線型な積 $x \triangle y = L(x)y = R(y)x$ が定義された V がクラン

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (1)\ \ [L(x), L(y)] = L(x \triangle y - y \triangle x), \\ (2)\ \ \exists s \in V^* \ \textbf{s.t.}\ \langle x \triangle y, s \rangle \text{ は } V \text{ に内積を定義する}, \\ (3)\ \ \text{各 } L(x) \text{ は実固有値のみを持つ}. \end{cases}$$

(1) 対称錐の場合:

- $G(\Omega)$ は簡約可能 **(reductive)**.
- V の **Jordan** 代数構造：

  $V \equiv T_e(\Omega) \equiv$ **Cartan** 分解 $\mathfrak{g}(\Omega) = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ の **$\mathfrak{p}$-part**

  実際 $\mathfrak{p} = \{M(x)\ ;\ x \in V\}$：**Jordan** 乗法作用素の空間.
- **Jordan** 積は可換.

(2) 一般の等質開凸錐の場合:

- $G(\Omega)$ の岩沢可解部分群の単純推移的作用
- V のクラン構造：

  $V \equiv T_e(\Omega) \equiv \mathfrak{g}(\Omega)$ の岩沢部分 **Lie** 代数 $\mathfrak{s} := \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$

  実際 $\mathfrak{s} = \{L(x)\ ;\ x \in V\}$：クランの左乗法作用素の空間.
- クラン積は一般に非可換.
- 対称錐の場合にも，もちろん，クラン構造を考えることができる.

Ω：等質開凸錐
$G(\Omega)$：Ω の線型同型群
S：$G(\Omega)$ の岩沢部分群.
S は分裂可解 **Lie** 群で，Ω に単純推移的に働く.

Ω 上の函数 f が相対不変（S に関して）
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\chi$：S の 1 次元表現 **s.t.**

$$f(gx) = \chi(g)f(x) \quad (\textbf{for all } g \in S,\, x \in \Omega).$$

定理 [**Ishi 2001**]. $\exists$ 既約で相対不変な V 上の多項式函数

$$\Delta_1, \ldots, \Delta_r \qquad (r := \mathrm{rank}(\Omega) := \dim \mathfrak{a})$$

s.t. V 上の任意の相対不変な多項式函数 $P(x)$ は次のように書ける：

$$P(x) = c\,\Delta_1(x)^{m_1} \cdots \Delta_r(x)^{m_r} \quad (c = \mathrm{const.},\ (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geqq 0}).$$

より intrinsic な $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ の記述

定理 [Ishi–N., 2008].
$W = V_{\mathbb{C}}$：クラン V の複素化,
$R(w)$：W において $w \in W$ を右からかける作用素：$R(w)z = z \triangle w$.
$\Longrightarrow$ $\det R(w)$ の既約因子は丁度 $\Delta_1(w), \dots, \Delta_r(w)$.

- $\Delta_1, \dots, \Delta_r$：$\Omega$ に付随する 基本相対不変式.
- $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ の零点集合を避けるだけで，擬逆元写像 $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(w)$ の正則性 **(holomorphy)** が保証される
  $\because$ $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(w) = E^*_{\mathbf{s}} \circ R(w)^{-1}$

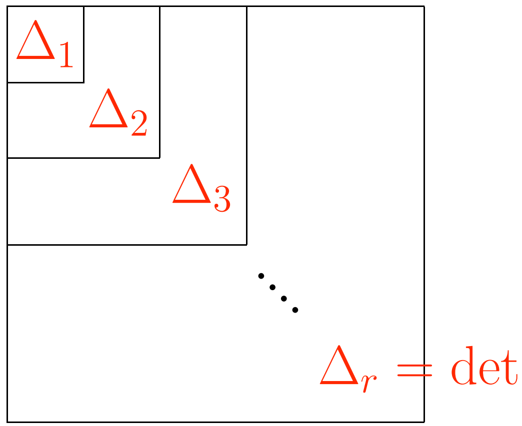
$E^*_{\mathbf{s}}$：認容線型形式，$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^r_{>0}$
$\leftrightarrow$ **Siegel** 領域上の等質 **Kähler** 計量

例：$\Omega = \mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})^{++} \subset V = \mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$.

$GL(r,\mathbb{R})$ は Ω に $\rho(g)x := gx\,{}^t g$ $(g \in GL(r,\mathbb{R}),\ x \in \Omega)$ により作用する.

$$GL(r,\mathbb{R}) \supset S := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ * & & & a_r \end{pmatrix} \ ;\ a_1 > 0, \ldots, a_r > 0 \right\}.$$

基本 S 相対不変式 は



$$\begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ {}^tY & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tB \\ O & {}^tC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX\,{}^tA & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

$V = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ のクラン積：$x \triangle y = \underline{x}\, y + y\,{}^t(\underline{x})$,

ただし，$x = (x_{ij}) \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ に対して，

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{11} & & & \\ x_{21} & \frac{1}{2}x_{22} & & \text{\Large 0} \\ \vdots & & \ddots & \\ x_{r1} & x_{r2} & & \frac{1}{2}x_{rr} \end{pmatrix} \in \mathfrak{s} := \mathrm{Lie}(S).$$

従って，$x = \underline{x} + {}^t(\underline{x})$ となっていることに注意.

この場合，$\det R(y) = \Delta_1(y) \cdots \Delta_r(y)$.

注意： この式は先の定理を認めれば，次数比較のみ，計算なしで得られる.

- 実際，$\deg \det R(y) = V = \frac{1}{2} \cdot r(r+1)$.
- 一方，$\deg\big(\Delta_1(y) \cdots \Delta_r(y)\big) = 1 + \cdots + r = \frac{1}{2} \cdot r(r+1)$.

一般の対称錐 $\Omega \subset V$ の場合：まず V は **Euclid** 型 **Jordan** 代数である.

- $\Delta_k(y)$ を k**-th Jordan algebra principal minor of** $y \in V$ とする（**Jordan** 枠を一つ固定しておく）.
- 岩沢部分群 $S \subset G(\Omega)$ は Ω に単純推移的に作用
  $\rightsquigarrow$ 軌道写像 $S \ni g \mapsto ge \in \Omega$ は微分同相（$e \in \Omega$ は V の単位元）
  S の単位元における微分 $\mathfrak{s} \ni X \mapsto Xe \in V$ は線型同型写像.
- その逆写像を $V \ni v \mapsto X_v \in \mathfrak{s}$ と書く $\rightsquigarrow$ $X_v e = v$ **for any** $v \in V$.

- **Euclid** 型 **Jordan** 代数 V は次でクランの構造を持つ：

$$x \triangle y := X_x y = R(y)x.$$

命題 [N, Preprint]. $\det R(y) = \Delta_1(y)^d \cdots \Delta_{r-1}(y)^d \Delta_r(y)$.
ただし, $d = 1$ **for** $\mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$, $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$ **for** $\mathrm{Herm}(r, \mathbb{K})$ $(\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O})$,
$r = 2$, $d = n - 2$ **for** $\Omega = \Lambda_n$ $(n \geqq 3)$.

- この公式はなかなか面白い：$\dim V = r + \frac{d}{2} \cdot r(r-1)$ であり,

$$\deg\bigl(\Delta_1(y)^d \cdots \Delta_{r-1}(y)^d \Delta_r(y)\bigr) = d\bigl(1 + \cdots + (r-1)\bigr) + r = r + \frac{d}{2} \cdot r(r-1).$$

右乗法作用素の帰納的構造

- $\det R(y)$ を計算するだけならそれほど難しいことではない.
  対応する S の 1 次元表現は割とすぐに計算できるので ...

$$V = \begin{array}{|c|c|} \hline V' & \Xi \\ \hline \Xi & \mathbb{R}c_r \\ \hline \end{array}$$

$$\operatorname{rank}(V) = r, \ \operatorname{rank}(V') = r - 1$$

$$V = V' \oplus \Xi \oplus \mathbb{R}c_r$$

$$W := \Xi \oplus \mathbb{R}c_r$$

- W はクラン V における両側イデアルである.

分解 $V = V' \oplus \underbrace{\Xi \oplus \mathbb{R}c_r}_{W}$ に従って,

$$R_v = \left(\begin{array}{c|c|c} R'(v') & \multicolumn{2}{c}{O} \\ \hline * & \phi(v') & \langle \cdot \,|\, c_r \rangle_W \, \xi \\ \cline{2-3} & \langle \cdot \,|\, \xi \rangle_W \, c_r & v_r I_{V_{rr}} \end{array}\right) \qquad (v = v' + \xi + v_r c_r)$$

$\langle \cdot | \cdot \rangle$: W において改めて正規化した内積,
$\phi(v')\xi_0 := R(v')\xi_0$ **(by definition)**

$$\boxed{\;\Xi\;} \;\triangle\; \boxed{\quad V' \quad}$$

命題 : $R(V')\Xi \subset \Xi$, かつ $v' \mapsto \phi(v') := R(v')\big|_{\Xi} \in \mathrm{End}(\Xi)$ は V' の **Jordan algebra representation**:

$$\phi(v_1' v_2') = \frac{1}{2}(\phi(v_1')\phi(v_2') + \phi(v_2')\phi(v_1'))$$

問：Ω：既約な等質開凸錐で階数は r.
このとき，Ω が自己双対 $\Longleftrightarrow$ 基本相対不変式の次数が $1, 2, \ldots, r$.

[$\Rightarrow$] **Jordan algebra principal minors** の次数は $1, 2, \ldots, r$.
[$\Leftarrow$] 任意階数 ≥ 3 で偽.
$\exists\Omega$：非自己双対な等質開凸錐 **s.t.** 基本相対不変式の次数が $1, 2, \ldots, r$.

例

I_m: m 次単位行列,　　$\mathbb{R}^{rm}$：サイズが $r \times m$ の実縦ベクトル全体

$$V := \left\{ x = \left(\begin{array}{c|c} x_0 \otimes I_m & \boldsymbol{y} \\ \hline {}^t\boldsymbol{y} & z \end{array} \right) \ ; \ x_0 \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R}),\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{rm},\ z \in \mathbb{R} \right\}.$$

$V \subset \mathrm{Sym}(rm+1, \mathbb{R})$ に注意.

$m = r = 2$ のとき, x は次の 5 次正方行列：

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{21} & 0 & y_{11} \\ 0 & x_{11} & 0 & x_{21} & y_{12} \\ x_{21} & 0 & x_{22} & 0 & y_{21} \\ 0 & x_{21} & 0 & x_{22} & y_{22} \\ y_{11} & y_{12} & y_{21} & y_{22} & z \end{pmatrix} \qquad (\text{この場合は } \dim V = 8).$$

• Ω としては, V に属する行列で, 正定値なもの全体をとる：

$$\Omega := \{ x \in V \ ; \ x \gg 0 \} \qquad (\mathrm{rank}(\Omega) = r + 1).$$

仮定： $m \geqq 2$, $r \geqq 2$:

$(m = 1 \Rightarrow \Omega = \mathrm{Sym}(r+1, \mathbb{R})^{++}, \quad r = 1 \Rightarrow \Omega = \Lambda_{m+2})$

Ω の等質性：

$$A := \left\{ a = \left(\begin{array}{c|c} a_0 \otimes I_m & 0 \\ \hline 0 & a_{r+1} \end{array} \right) \;;\; \begin{array}{l} a_0 := \mathrm{diag}[a_1, \ldots, a_r] \;\; \textbf{with} \\ a_1 > 0, \ldots, a_r > 0 \textbf{ and } a_{r+1} > 0 \end{array} \right\},$$

$$N := \left\{ n = \left(\begin{array}{c|c} n_0 \otimes I_m & 0 \\ \hline {}^t\boldsymbol{\xi} & 1 \end{array} \right) \;;\; \begin{array}{l} n_0 \in GL(r, \mathbb{R}) \text{ は真に下三角,} \\ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{rm} \end{array} \right\}.$$

$H := N \ltimes A \curvearrowright \Omega$ の作用は $H \times \Omega \ni (h, x) \mapsto h\, x\, {}^t h \in \Omega$.

この作用は単純推移的である．実際 $x \in \Omega$ が与えられたとき，

方程式 $x = na\,{}^t n = na^{1/2} I_{rm+1} a^{1/2} ({}^t n)$ $(a \in A,\, n \in N)$ は一意解を持つ：

a_k については

$$a_k = \frac{\Delta_k(x)}{\Delta_{k-1}(x)} \quad (k = 1, 2, \ldots, r+1).$$ ただし，$\Delta_0(x) \equiv 1$ で，

$$\begin{cases} \Delta_k(x) := \Delta_k^0(x_0) & (k = 1, \ldots, r), \\ \Delta_{r+1}(x) := z \det(x_0) - {}^t\boldsymbol{y}({}^{\mathrm{co}}x_0 \otimes I_m)\boldsymbol{y}. \end{cases}$$

${}^{\mathrm{co}}T$: T の余因子行列 — 従って，$T({}^{\mathrm{co}}T) = ({}^{\mathrm{co}}T)T = (\det T)I$.

- $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x), \Delta_{r+1}(x)$ は基本相対不変式である.
  $\deg \Delta_k(x) = k$ $(k = 1, 2, \ldots, r+1)$ であるけれど, Ω は自己双対ではない.

- 多項式 $\Delta_{r+1}(x) = z \det(x_0) - {}^t\boldsymbol{y}({}^{\mathrm{co}}x_0 \otimes I_m)\boldsymbol{y}$ の理解

各 $x = \left(\begin{array}{c|c} x_0 \otimes I_m & \boldsymbol{y} \\ \hline {}^t\boldsymbol{y} & z \end{array}\right) \in V$ に対して

$$
{}^{\mathrm{d}}x := \left(\begin{array}{ccc|c} x_{11} & \cdots & x_{r1} & \boldsymbol{y}_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{r1} & \cdots & x_{rr} & \boldsymbol{y}_r \\ \hline {}^t\boldsymbol{y}_1 & \cdots & {}^t\boldsymbol{y}_r & z \end{array}\right), \quad x_0 = (x_{ij}), \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_r \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_j \in \mathbb{R}^m.
$$

このとき $\Delta_{r+1}(x) = \det {}^{\mathrm{d}}x$. ただし, $\det {}^{\mathrm{d}}x$ はあたかもそれが通常の行列式であるかのように計算し, ${}^t\boldsymbol{y}_i$ と $\boldsymbol{y}_j$ の積は内積 $\boldsymbol{y}_i \cdot \boldsymbol{y}_j$ とする.

予想：
Ω：既約等質開凸錐で階数は r,
Ω^*：Ω の双対錐.
Ω に付随する基本相対不変式と Ω^* に付随する基本相対不変式の次数について，それらが共に $1, 2, \ldots, r$ ならば，Ω は自己双対である.

- 先の Ω（ただし $r = 3$）に対して，
  Ω^* に付随する基本相対不変式の次数は，$1, 2, 4$.
- 条件付きで，予想は渡辺有介氏の修士論文（京大，**2006**）で証明されている.

双対錐に線型同型な非自己双対既約等質開凸錐

- $\Omega \subset V$（内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を持つ）が自己双対
  $\iff \exists T$：正定値自己共役 **s.t.** $T(\Omega) = \Omega^*$.
  $$\left(\Omega^* := \left\{ y \in V \;;\; \langle\, x \,|\, y \,\rangle > 0 \quad \textbf{for } \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \right\}\right)$$

- $T(\Omega) = \Omega^*$ となる正定値自己共役な T がなくても,
  正定値性を要求しなければ，そのような T があるかもしれない.

- 可約でも構わないのであれば，$\Omega_0 \oplus \Omega_0^*$ を考えればよいので,
  ここでは既約性は重要な意味を持つ.

- **Faraut–Korányi** の本の **Exercise** では，**Vinberg** 錐が双対錐と
  線型同型でないことを示すための **Hint** が与えられている.
  Vinberg 錐が自己双対でないことは，その直接の帰結という訳である.

$$V := \left\{ x := \left(\begin{array}{cc|c|c} x_1 & 0 & {}^t\boldsymbol{x}' & \xi_1 \\ 0 & x_1 & {}^t\boldsymbol{0} & \xi_2 \\ \hline \boldsymbol{x}' & \boldsymbol{0} & X & \boldsymbol{x}'' \\ \hline \xi_1 & \xi_2 & {}^t\boldsymbol{x}'' & x_2 \end{array}\right) \; ; \; \begin{array}{l} x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ X \in \mathrm{Sym}(m, \mathbb{R}) \\ \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{x}'' \in \mathbb{R}^m \end{array} \right\}.$$

$V \subset \mathrm{Sym}(m+3, \mathbb{R})$ であることに注意.
$\Omega := \{x \in V \; ; \; x \gg 0\}$ とする.

$m = 1$ のときは次の 4 次行列：$x = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & x' & \xi_1 \\ 0 & x_1 & 0 & \xi_2 \\ x' & 0 & X & x'' \\ \xi_1 & \xi_2 & x'' & x_2 \end{pmatrix}.$

Ω の等質性

$$\mathbf{S} := \left\{ h := \left(\begin{array}{cc|c|c} h_1 & 0 & {}^t\mathbf{0} & 0 \\ 0 & h_1 & {}^t\mathbf{0} & 0 \\ \hline \boldsymbol{h}' & \mathbf{0} & H & \mathbf{0} \\ \hline \zeta_1 & \zeta_2 & {}^t\boldsymbol{h}'' & h_2 \end{array}\right) \; ; \; \begin{array}{l} h_1 > 0,\ h_2 > 0 \\ \boldsymbol{h}' \in \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{h}'' \in \mathbb{R}^m,\ \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}, \\ H \in GL(m, \mathbb{R}) \text{ は対角線成分が} \\ \hfill \text{正の下三角行列} \end{array} \right\}.$$

$\mathbf{S}$ は Ω に $\mathbf{S} \times \Omega \ni (h, x) \mapsto hx{}^th$ で作用する．
この作用は単純推移的である． 実際， $\mathbf{S} = \mathbf{N} \rtimes \mathbf{A}$， ただし

$$\mathbf{A} := \left\{ a := \left(\begin{array}{cc|c|c} a_1 & 0 & {}^t\mathbf{0} & 0 \\ 0 & a_1 & {}^t\mathbf{0} & 0 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & A & \mathbf{0} \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{0} & a_2 \end{array}\right) \; ; \; \begin{array}{l} a_1 > 0,\ a_2 > 0, \\ A \in GL(m, \mathbb{R}) \text{ は対角成分が} \\ \hfill \text{正の対角行列} \end{array} \right\},$$

$$\mathbf{N} := \left\{ n := \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & {}^t\mathbf{0} & 0 \\ 0 & 1 & {}^t\mathbf{0} & 0 \\ \hline \boldsymbol{n}' & \mathbf{0} & N & \mathbf{0} \\ \hline \nu_1 & \nu_2 & {}^t\boldsymbol{n}'' & 1 \end{array}\right) \; ; \; \begin{array}{c} \boldsymbol{n}', \boldsymbol{n}'' \in \mathbb{R}^m,\ \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R} \\ N \in GL(m, \mathbb{R}) \text{ は対角成分が } 1 \text{ の} \\ \text{下三角行列} \end{array} \right\}.$$

$x = na{}^tn$ ($x \in \Omega$**: given**) を解く際に， 次の基本相対不変式が現れる：

基本相対不変式： $x=\left(\begin{array}{cc|c|c} x_1 & 0 & {}^t\boldsymbol{x}' & \xi_1 \\ 0 & x_1 & {}^t\mathbf{0} & \xi_2 \\ \hline \boldsymbol{x}' & \mathbf{0} & X & \boldsymbol{x}'' \\ \hline \xi_1 & \xi_2 & {}^t\boldsymbol{x}'' & x_2 \end{array}\right) \in V$ に対して

$$\Delta_1(x) := x_1,$$

$$\Delta_j(x) := \det\left(\begin{array}{c|c} x_1 & {}^t\boldsymbol{x}'_{j-1} \\ \hline \boldsymbol{x}'_{j-1} & X_{j-1} \end{array}\right) \qquad (j=2,\dots,m+1)$$

$$\left(X_k := \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{k1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}'_k := \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \right),$$

$$\Delta_{m+2}(x) := x_1 \cdot \det\begin{pmatrix} x_1 & {}^t\boldsymbol{x}' & \xi_1 \\ \boldsymbol{x}' & X & \boldsymbol{x}'' \\ \xi_1 & {}^t\boldsymbol{x}'' & x_2 \end{pmatrix} - \xi_2^2 \cdot \det\left(\begin{array}{c|c} x_1 & {}^t\boldsymbol{x}' \\ \hline \boldsymbol{x}' & X \end{array}\right)$$

- $\deg \Delta_{m+2} = m+3$.

$$x = \left(\begin{array}{cc|c|c} x_1 & 0 & {}^t\boldsymbol{x}' & \xi_1 \\ 0 & x_1 & {}^t\mathbf{0} & \xi_2 \\ \hline \boldsymbol{x}' & \mathbf{0} & X & \boldsymbol{x}'' \\ \hline \xi_1 & \xi_2 & {}^t\boldsymbol{x}'' & x_2 \end{array}\right) \in V, \quad y = \left(\begin{array}{cc|c|c} y_1 & 0 & {}^t\boldsymbol{y}' & \eta_1 \\ 0 & y_1 & {}^t\mathbf{0} & \eta_2 \\ \hline \boldsymbol{y}' & \mathbf{0} & Y & \boldsymbol{y}'' \\ \hline \eta_1 & \eta_2 & {}^t\boldsymbol{y}'' & y_2 \end{array}\right) \in V \text{ に対して}$$

$$\langle\, x \,|\, y \,\rangle := x_1 y_1 + \mathrm{tr}(XY) + x_2 y_2 + 2(\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{x}'' \cdot \boldsymbol{y}'' + \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2).$$

この内積に関して Ω^* を考える：

$$\Omega^* := \left\{ y \in V \,;\, \langle\, x \,|\, y \,\rangle > 0 \quad \textbf{for } \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \right\}.$$

$T_0 \in \mathrm{End}(V)$ を次で定義： $T_0 x = \left(\begin{array}{cc|c|c} x_2 & 0 & {}^t\boldsymbol{x}''J & \xi_1 \\ 0 & x_2 & {}^t\mathbf{0} & \xi_2 \\ \hline J\boldsymbol{x}'' & \mathbf{0} & JXJ & J\boldsymbol{x}' \\ \hline \xi_1 & \xi_2 & {}^t\boldsymbol{x}'J & x_1 \end{array}\right) \quad (x \in V).$

ただし， $J = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}(m, \mathbb{R}).$

定理. $\Omega^* = T_0(\Omega).$

- **Long-term project**

  等質開凸錐や等質 **Siegel** 領域上の L^2 空間の（既約 **or** 群不変）分解.
  — **Damek–Ricci** 空間での例の高階数化 —
  その際に，双対錐と線型同型な等質開凸錐上は良い具体例.