

# 楕円モジュラー $j$ 関数の実二次点での「値」とマルコフ二次無理数

金子 昌信, 繁木 伸孝<sup>1</sup> (九州大学数理学研究院)

以下に記すのは殆どが実験による予想で, まだ何が隠れているのかいないのか, はっきりしないのであるが, 最近の Duke-Imamoglu-Tòth の仕事 [3, 4] を見るとまんざら無意味でもなさそうに思える.

$j$ -関数が実二次体に対しても何か意味を持ったら面白かろうとは昔から思っていて, 1999 年に米国オハイオ大学にひと月ほど滞在したときに, これから書くようなことをやりかけたものの計算機の性能がまだ低かったか私のプログラム能力の故か, 精度のよい実験も出来ず, Steve Rallis に話を聞いてもらったけれども理論的にも何が分かるでもなく, そのまま放ってあった. 8年後の2007年, また思い立って, 数値計算には向かないと思っていた Mathematica を使ってやり直してみると結構精度良く計算できて, 去年論文 [7] にいくつかの観察としてまとめた. その後修士学生の繁木氏とマルコフ二次無理数関連でさらに実験を重ねて得られた観察などを研究会で話させて頂いた. ここに記すのは既に [7] に書いたことと, 繁木氏の修士論文の一部である. 報告 [8] との重複がかなりあるが, ご容赦を請う. 文責は金子にある.

## 1. $j$ 関数についての復習

楕円モジュラー関数  $j(\tau)$  は

- 複素上半平面  $\mathcal{H} := \{\tau \mid \tau \in \mathbf{C}, \text{Im}(\tau) > 0\}$  上正則,
- $\text{SL}_2(\mathbf{Z})$ -不変, すなわち,  $j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = j(\tau), \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbf{Z}),$
- フーリエ展開が  $1/q + O(1)$  という形をしている ( $q = e^{2\pi i\tau}$ ),

という性質で加法定数を除き一意に決まる, もっとも基本的なモジュラー関数である. 通常よく知られた二つのモジュラー形式の比の形で

$$j(\tau) = \frac{E_4(\tau)^3}{\Delta(\tau)}$$

と定義され, これから最初のフーリエ係数が

$$j(\tau) = \frac{(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{d|n} d^3) q^n)^3}{q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}} = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \dots$$

と計算される. 係数はすべて自然数である. 古典的な Jacobi テータ級数

$$\theta_0 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{n^2/2}, \theta_1 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-q)^{n^2/2}, \theta_2 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{(n+1/2)^2/2}$$

を使った

$$j(\tau) = 2^7 (\theta_0^8 + \theta_1^8 + \theta_2^8) \left( \frac{1}{\theta_0^8} + \frac{1}{\theta_1^8} + \frac{1}{\theta_2^8} \right)$$

<sup>1</sup>現在小倉高校教諭



その後 Monster vertex operator algebra  $V^\natural$  という、物理の string theory を背景を持つ対象が発見され、無限次元の Kac-Moody リー環などを使いながら、Borcherds (1992) によって moonshine conjecture は証明された。モンスター VOA  $V^\natural$  は  $V^\natural = \bigoplus_{n=-1}^{\infty} V_n$  なる直和に分解する次数付きの無限次元ベクトル空間で、各  $V_n$  は monster  $\mathbb{M}$  の表現空間、そしてその次元が  $j(\tau) - 744$  の  $q^n$  の係数  $c_n$  に等しい。この表現指標の単位元以外での値を  $q^n$  の係数とする無限級数をとると、これがまた別の群のモジュラー関数となっているというのが Conway-Norton の発見であり、Borcherds の解決したことであって、話は  $j(\tau)$  に留まるものではないが、 $j(\tau)$  だけでも十分な意外性と魅力を持っている。

また整数論的に面白いかも知れないことは、

$$p \mid \#\mathbb{M} \iff \text{標数 } p \text{ のすべての超特異 } j \text{ 不変量} \in \mathbf{F}_p$$

という事実、すなわち  $\mathbb{M}$  の位数

$$\begin{aligned} \#\mathbb{M} &= 808017424794512875886459904961710757005754368000000000 \\ &= 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \end{aligned}$$

の素因子として現れる素数のリストが、ある数論的な性質を満たす素数のリストと一致するという事実である。Ogg が最初に発見したことで、説明をつけた人にはジャックダニエルのボトル一本、と論文に書いた。その後 Borcherds が moonshine を解決したときに Ogg から話があったらしいが、Borcherds は断ったそうである。(「僕はウイスキーを飲まないのだから…」と言っていた。) もっとも Borcherds の証明がこの事実の説明をつけているとは思われない。

虚数乗法と moonshine, この二つは今のところ全く関係がないように見える。しかし、モンスターの位数を割る素数に関連して上に書いた、素体  $\mathbf{F}_p$  に入る超特異  $j$  不変量の個数は虚二次体の類数で書き表される。きっと何らかのつながりはあるのではないかと想像する。つながりのもう一つの傍証として、 $j(\tau)$  の フーリエ係数を虚二次無理数での値で表す公式 [6] がある。それは、

$$j(\tau) \text{ の } q^n \text{ の係数} = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{r \in \mathbf{Z}} \mathbf{t}(n - r^2) + \sum_{r \geq 1, \text{odd}} ((-1)^n \mathbf{t}(4n - r^2) - \mathbf{t}(16n - r^2)) \right\}$$

というものである ( $n \geq 1$ )。無限和に見えるが実質有限和である。ここで  $\mathbf{t}(d)$  は判別式が  $-d$  の虚二次点  $\tau_d$  での値  $j(\tau_d) - 744$  の「トレース」で、整数となる。 $j(\tau_d)$  は類数次数の代数的整数で、定数項 744 を減じてからトレースをとる。 $d$  の値により「トレース」というのが正確でない場合もあるが、詳細は省く。実は  $\mathbf{t}(d)$  はそういった虚数乗法の知識が無くとも、漸化式

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(4n - 1) &= -240\sigma_3(n) - \sum_{2 \leq r \leq \sqrt{4n+1}} r^2 \mathbf{t}(4n - r^2), \\ \mathbf{t}(4n) &= -2 \sum_{1 \leq r \leq \sqrt{4n+1}} \mathbf{t}(4n - r^2) \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

によって完全に決まる。 $\sigma_3(n) = \sum_{d \mid n} d^3$  ( $n > 0$ ) は約数の 3 乗和で、 $\sigma_3(0) = 1/240 (= \frac{1}{2}\zeta(-3))$  と約束する。空な和は 0 とし、 $d$  が  $d < -1$  または  $d \equiv 1, 2 \pmod{4}$  のときは  $\mathbf{t}(d) = 0$  とする。 $\mathbf{t}(-1) = -1$ ,  $\mathbf{t}(0) = 2$ ,  $\mathbf{t}(3) = -248$ ,  $\mathbf{t}(4) = 492, \dots$  など。

ところで  $\mathbf{t}(d)$  がこの一組の漸化式を満たすことは、 $\mathbf{t}(d)$  の母関数があるモジュラー形式になるという Zagier の定理と同値であり、上の公式もこの定理を使って導かれた。

公式を用いた計算例をいくつか挙げる.

$$c_1 = 2t(0) - t(3) - t(15) - t(7) = 2 \times 2 - (-248) - (-192513) - (-4119) = 196884,$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{2}(t(7) + t(-1) - t(31) - t(23) - t(7)) = (t(-1) - t(31) - t(23)) / 2 \\ &= (-1 - (-39493539) - (-3493982)) / 2 = 21493760, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{1}{3}(t(3) + 2t(-1) - t(11) - t(3) - t(47) - t(39) - t(23) - t(-1)) \\ &= (t(-1) - t(11) - t(47) - t(39) - t(23)) / 3 \\ &= (-1 - (-33512) - (-2257837845) - (-331534572) - (-3493982)) / 3 = 864299970. \end{aligned}$$

## 2. $j(\tau)$ の実二次点での「値」

$j$ -関数が実二次体の数論に対しても何か役割を果たすことがあるだろうか. 昔からの素朴な好奇心が以下の実験の動機であった.

上半平面の境界である実軸は  $j(\tau)$  の自然境界であることが知られているから, 普通の意味での  $j(\tau)$  の実二次点での値というものはない. しかし Hecke にならって実二次点での双曲的なフーリエ展開というべきものを考え, その定数項を取り出して「値」と見よう (一種の「正規化」というのが以下のお話である).

$w$  を実二次無理数とする. いまモジュラー群  $SL_2(\mathbf{Z})$  の元  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  が  $w$  を固定するとする:

$$\gamma w = \frac{aw + b}{cw + d} = w.$$

このとき簡単な計算で

$$\frac{\gamma\tau - w}{\gamma\tau - w'} = \varepsilon^2 \frac{\tau - w}{\tau - w'} \quad (w' = w \text{ の共役}),$$

なる式が, ある単数  $\varepsilon$  にたいし成り立つことが分かる.  $w$  を固定する  $\gamma$  は無数にあつて, それに応じて対応する単数  $\varepsilon$  も無数にあるが, それらはすべてある「基本単数」 $\varepsilon_0$  によって  $\varepsilon = \pm\varepsilon_0^m$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ) なる形で書き表されることが知られている. そこで (記述の面倒を避けるため,  $w > w'$  と仮定しておく.  $w - w'$  の符号を考慮して一般の場合も同様に定義できる.)

$$z := \frac{\tau - w}{\tau - w'} \quad (\iff \tau = \frac{w - w'z}{1 - z})$$

なる変数変換を行うと,

$$j(\tau) = j\left(\frac{w - w'z}{1 - z}\right) \text{ は } z \mapsto \varepsilon_0^2 z \text{ で不変}$$

ということが出てくる. よって更に  $z = e^u$  とおくと

$$j\left(\frac{w - w'e^u}{1 - e^u}\right) \text{ は } u \mapsto u + 2\log \varepsilon_0 \text{ で不変}$$

ということが分かる. そこでこれをフーリエ展開する:

$$j\left(\frac{w - w'e^u}{1 - e^u}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \frac{u}{2\log \varepsilon_0}}.$$

この展開の定数項を取り出して、 $j(\tau)$  の  $w$  での（「正規化された」）値と思うことにしよう、  
 というのである。実際はある積分の値である。

**定義**  $j(\tau)$  の  $w$  における「値」

$$\begin{aligned} \text{val}(w) &= a_0 \\ &= \frac{1}{2 \log \varepsilon_0} \int_{\sigma_0}^{\sigma_0 + 2 \log \varepsilon_0} j\left(\frac{w - w' e^u}{1 - e^u}\right) du. \end{aligned}$$

( $\sigma_0 \in \mathbf{C}$ ,  $0 < \text{Im}(\sigma_0) < \pi$ ) 2 番目の等式はコーシーの定理による。

$\text{val}$  という記号は Dedekind の 1877 年の論文 [2] で  $j(\tau)$  の代わりに用いられていた記号を借用している。 $\text{val}$  は 'Valenz'（ドイツ語で、辞書には原子価、(染色体の) 数価、(言語学での) 結合価、とある）。

定義の積分は、

$$\frac{\sqrt{D}}{2 \log \varepsilon_0} \int_{\tau_0}^{\gamma_0 \tau_0} \frac{j(\tau) d\tau}{Q(\tau)}$$

とも書かれる。ここに  $D > 0$  は  $w$  の判別式で、 $\gamma_0$  は  $\varepsilon_0$  に対応する  $\text{SL}_2(\mathbf{Z})$  の元、 $\tau_0$  は  $\mathcal{H}$  の任意の点、

$$Q(\tau) = a\tau^2 + b\tau + c = a(\tau - w)(\tau - w'), \quad b^2 - 4ac = D, \quad a > 0, b, c \in \mathbf{Z}$$

である。(新谷の有名な論文 [9] で出てくる積分の重さ 0 版。)

定義からすぐに従う性質として、

**命題** (基本性質)

- 1)  $w_1$  と  $w_2$  が  $\text{SL}_2(\mathbf{Z})$ -同値であれば  $\text{val}(w_1) = \text{val}(w_2)$ .
- 2)  $\text{val}(w) = \text{val}(w')$ .
- 3)  $\overline{\text{val}(w)} = \text{val}(-w')$ .

などが分かる。1) より  $\text{val}$  は実二次点の  $\text{SL}_2(\mathbf{Z})$ -同値類の一つの不変量を与えているから、この値の数論的性格を問うことは基本的な問題であると思う。

### 3. 観察

序に述べたように、Mathematica で数値積分を実行して  $\text{val}(w)$  を計算してみると、いくつかの現象が見えてきた。証明はまだつけられていない。従って以下の観察として述べられている文章はすべて「と思われる」を補って読んで頂きたい。

#### 観察その 1 黄金比での値

$$\text{val}((1 + \sqrt{5})/2) = 706.324813540\dots$$

が  $\text{val}(w)$  のすべての実数値（または実部、絶対値）のうちの最小値になっている。また、 $\text{val}(w)$  のすべての実数値（実部、絶対値）は区間

$$[706.3248\dots, 744]$$

に入る.

黄金比  $(1 + \sqrt{5})/2$  は判別式 5 で, これが最小である. 744 は  $j(\tau)$  無限遠点におけるフーリエ展開の定数項であった. 無限遠点は任意の有理数と  $SL_2(\mathbf{Z})$ -同値であることを注意しておく.

**観察その 2** 一種の「ディオファントス連続性」.

これは不正確だが,  $w$  がよりよい有理近似を持つと  $\text{val}(w)$  は大きくなる, といった現象が観察される. 例えば, 連分数展開で

$$w = [n] = n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{\ddots}}}$$

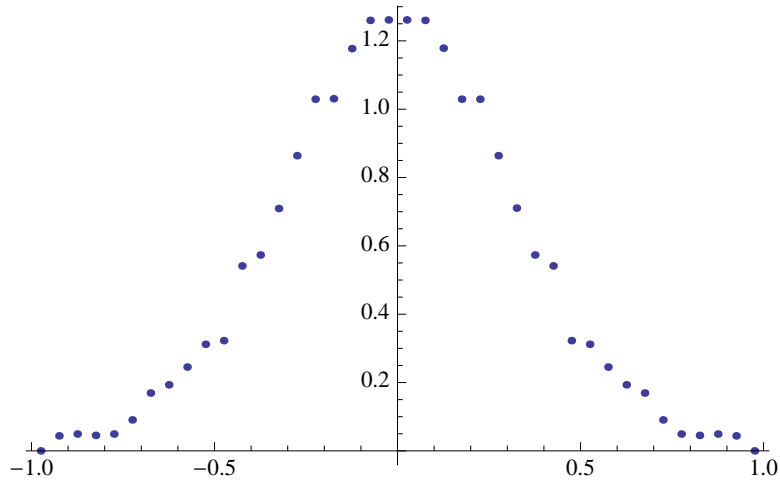
と表される数での値を計算してみると次の表のようになる.  $n = 1$  の場合が黄金比で, これがある意味で有理数で最も近似されにくい無理数である.

$w$	$D$	$\text{val}(w)$	$\log \varepsilon$
[1]	5	706.3248135408125820559603...	0.9624236501192...
[2]	8	709.8928909199123368059253...	1.7627471740390...
[3]	13	713.2227192129106375260272...	2.3895264345742...
[4]	20	715.8658310509644567882877...	2.8872709503576...
[5]	29	717.9165510885627097946754...	3.2944622927421...
[6]	40	719.5292195149241565812037...	3.6368929184641...
[7]	53	720.8247553829016929089184...	3.9314409432993...
[8]	68	721.8878326202869588905005...	4.1894250945222...
[9]	85	722.7768914565219262830724...	4.4186954172306...
[10]	104	723.5327700907464960378584...	4.6248766825455...
[20]	404	727.6296000047325464824629...	5.9964459005959...
[30]	904	729.4314438625732480951697...	6.8046132909611...
[50]	2504	731.2426027524741005593885...	7.8248455312825...
[100]	10004	733.1113065597372736130899...	9.2105403419828...

この表で  $n$  が増える, つまり連分数を途中で打ち切った有理近似がよくなるとともに, 値は大きくなっていく. この他色々なパターンで実験しても, 必ずしも判別式などは単調ではないが  $\text{val}$  の値は観察 1 で述べた区間で単調に増加したり減少したりする, という現象が観察される.

**観察その 3**  $\text{val}(w)$  の虚部は常に区間  $(-1, 1)$  に入る.

その分布をグラフにすると (判別式約 20000 まで, データ数約 15000):

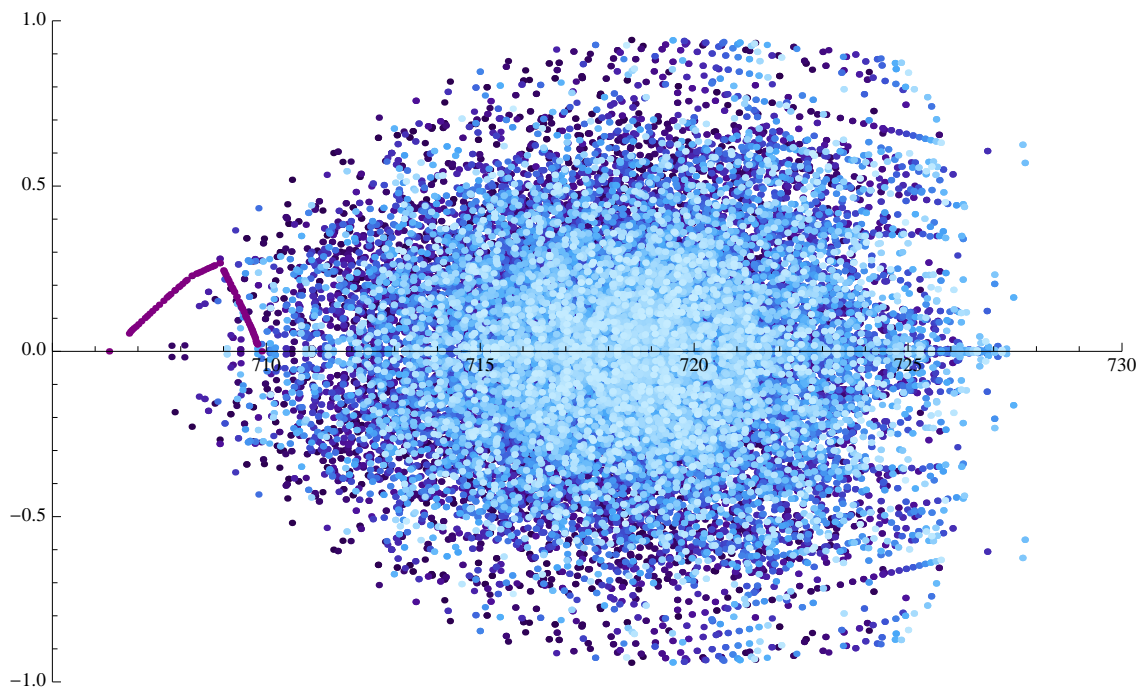


これは、 $-1$  から  $1$  までを  $20$  等分し、 $\text{val}(w)$  の虚部がそれぞれの小区間に入る  $w$  の個数を勘定して、全体の積分が  $1$  になるよう正規化したグラフである。区間  $(-1, 1)$  に入るということは、何かの固有値としての解釈をもつということであろうか。このグラフの形は何を示唆しているのだろうか。今のところ皆目見当がつかないが、興味と空想を誘う現象ではある。

$\text{val}(w)$  の最初のいくつかの非実数値を表にする：

$w$	$D$	$\text{val}(w)$
$(12 + \sqrt{34})/11$	136	$710.60045194400248945 \dots + 0.51979382819610620 \dots i$
$(10 + \sqrt{34})/11$	136	$710.60045194400248945 \dots - 0.51979382819610620 \dots i$
$(33 + \sqrt{205})/34$	205	$714.16034018225715592 \dots + 0.75363913959038068 \dots i$
$(25 + \sqrt{205})/30$	205	$714.16034018225715592 \dots - 0.75363913959038068 \dots i$
$(21 + \sqrt{221})/22$	221	$708.90991972070874730 \dots + 0.26703973546028996 \dots i$
$(23 + \sqrt{221})/22$	221	$708.90991972070874730 \dots - 0.26703973546028996 \dots i$
$(47 + \sqrt{305})/56$	305	$716.13898693848579303 \dots + 0.82184193359696810 \dots i$
$(35 + \sqrt{305})/46$	305	$716.13898693848579303 \dots - 0.82184193359696810 \dots i$
$(23 + \sqrt{79})/25$	316	$712.65948582687702503 \dots + 0.32545553768732463 \dots i$
$(13 + \sqrt{79})/15$	316	$712.65948582687702503 \dots - 0.32545553768732463 \dots i$
$(17 + \sqrt{79})/15$	316	$712.65948582687702503 \dots + 0.32545553768732463 \dots i$
$(17 + \sqrt{79})/21$	316	$712.65948582687702503 \dots - 0.32545553768732463 \dots i$

判別式  $50000$  までの  $w$  について  $\text{val}(w)$  をプロットしたものが次の図である。横軸が実部、縦軸が虚部を表す。



何やら面白い形になっているが、データ数をもっと増えたとき、満遍なく  $[706.3248\dots, 744] \times (-1, 1)$  を埋め尽くすのか、より狭い存在範囲があるのか、あればどの範囲か、興味のあるところである。

図の左の方にある山型の線（実は点の集まり）は、以下に述べるマルコフ二次無理数での val の値のプロットである。まずマルコフ (Markoff, 確率論のマルコフ過程の Markov と同じ人だが綴りはどうも使い分けられているらしい) の理論を簡単に復習する。出発点は次のフルヴィツの定理である。

**定理** (Hurwitz, 1891) 任意の実無理数  $\alpha$  にたいし、次の不等式を満たすような有理数  $p/q$  が無限に存在する：

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

この定理の定数  $1/\sqrt{5}$  は最良である。しかし、 $\alpha$  として  $(1 + \sqrt{5})/2$  と  $\text{GL}_2(\mathbf{Z})$ -同値（一次分数変換で移りあうこと）なもの除外すると、 $1/\sqrt{5}$  は  $1/\sqrt{8}$  に置き換えることができる。さらに、 $\alpha$  が  $\sqrt{2}$  と同値でないならば、 $1/\sqrt{8}$  は  $5/\sqrt{221}$  に置き換えることができる。さらに... と、このプロセスが無限に続くことを示すのがマルコフの定理である。すなわち、「マルコフ数」と呼ばれる数列

$$\{m_i\}_{i=1}^{\infty} = \{1, 2, 5, 13, 29, 34, 89, 169, 194, 233, 433, \dots\},$$

および付随した二次無理数  $\theta_i$  ( $\theta_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ ,  $\theta_2 = \sqrt{2}, \dots$ ) と単調増加数列  $L_i$  (3 に収束) があり以下が成り立つ：

**定理** (Markoff, 1880) 各  $i$  について、実無理数  $\alpha$  が  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{i-1}$  のいずれとも  $\text{GL}_2(\mathbf{Z})$  同値でないならば、

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{L_i q^2}$$

を満たすような有理数  $p/q$  が無限に存在する。

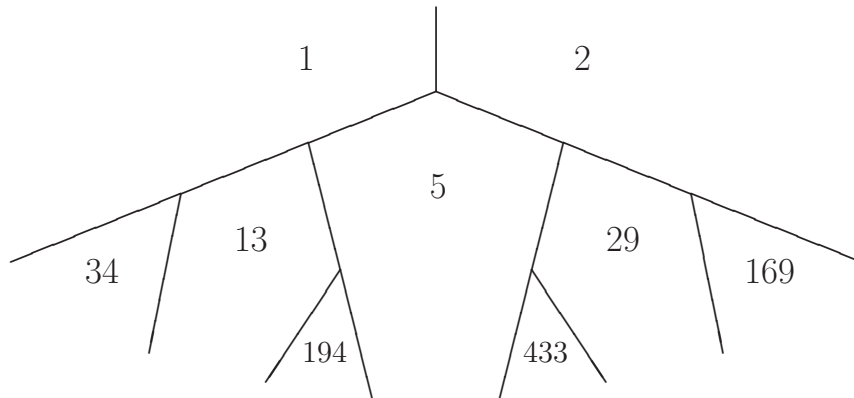


フルヴィツの定理はマルコフの定理に含まれるが、マルコフはディオファントス近似の言葉ではなく、二次形式の言葉で定理を述べ、フルヴィツは直接に上の形の定理を証明した。

マルコフ数  $m_i$  はディオファントス方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

の解として現れる数である。この方程式は一つの変数に関しては二次方程式なので、自明な解  $(1, 1, 1)$  から出発して、二つを固定して二次方程式を解くと新しい解が見つかる。具体的には  $(p, q, r)$  が解なら  $(p, q, 3pq - r)$  と  $(p, r, 3pr - q)$  が解となっていて、これによって解の全体が見つかるということが証明出来、マルコフ数全体に tree の構造が入ることが分かる。



一つのマルコフ数はこの tree のただ1カ所にのみ現れるか、というのはまだ未解決の問題である。

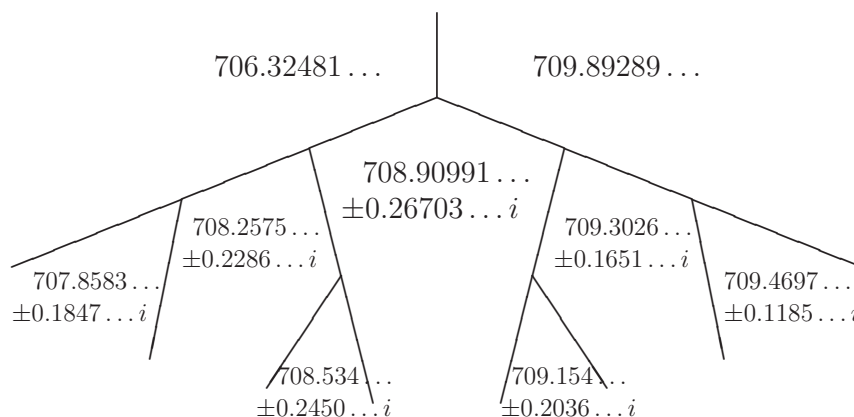
さてマルコフ二次無理数  $\theta_i$  (定義は省略したが、 $m_i$  を最大とするような解の三つ組みから定まる) についてそこでの val の値を計算し、以下を観察した。

**観察その4** 値が実であるのは

$$\text{val}(\theta_1) = \text{val}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = 706.32481354\dots \quad \text{および} \quad \text{val}(\theta_2) = \text{val}(\sqrt{2}) = 709.89289091\dots$$

に限り、その他の  $\text{val}(\theta_i)$  ( $i \geq 3$ ) は実ではない。

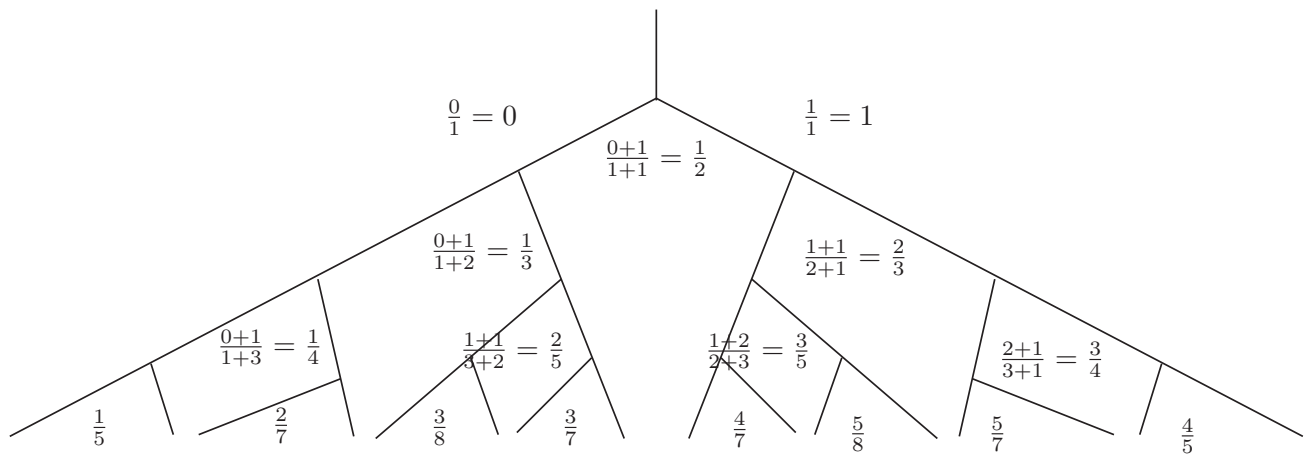
**観察その5** 三つのマルコフ数  $m, m', m''$  がこの順で、上の tree でいうと  $1, 2, 5$  や  $5, 2, 29$  のような位置関係にあるとし、 $\theta, \theta', \theta''$  を付随する二次無理数とする。このとき、 $\theta''$  の実、虚部は  $\theta$  と  $\theta'$  のそれらの間にある。(虚部の正負の記述に関する予想は略す。)



**観察その6** マルコフ数  $m$  を一つ取ると, マルコフ tree の中で一つの領域  $D$  が定まる.  $D$  の辺を下にたどると, 隣接した領域のマルコフ数に対応した二次無理数の列  $\{\theta_k^L\}$  および  $\{\theta_k^R\}$  が定まる.  $\theta^{(m)}$  を  $m$  に付随した二次無理数とするとき

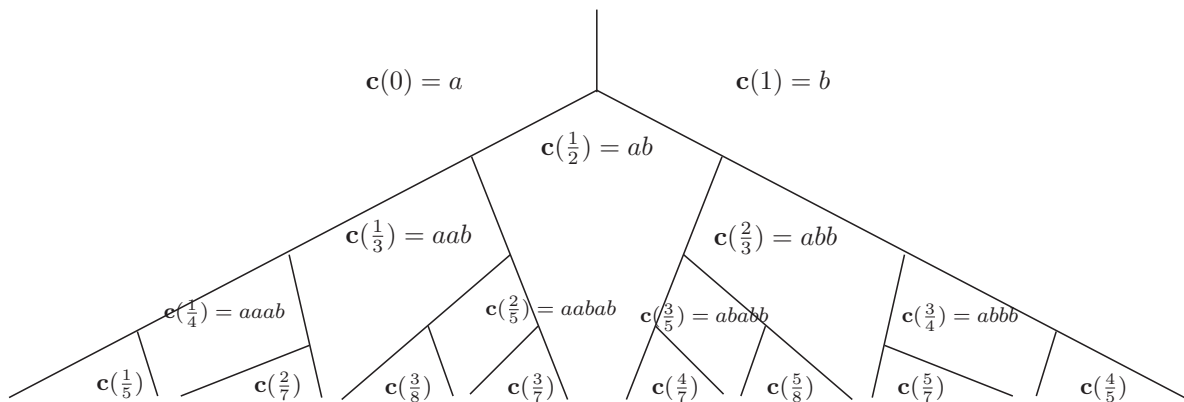
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{val}(\theta_k^L) = \text{val}(\theta^{(m)}) \quad \text{かつ} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \text{val}(\theta_k^R) = \overline{\text{val}(\theta^{(m)})}.$$

これらの観察は, マルコフ数をファレイ分数でパラメトライズするという, 本質的には Harvey Cohn によるアイデアによって書き直すと分かりやすい. それを次に説明する. マルコフ数の tree に下の図の要領で 0 から 1 の間の有理数をあてはめる.  $0 = \frac{0}{1}, 1 = \frac{1}{1}$  から出発して, 分母どうし, 分子どうしを足すという, ファレイ分数を構成するアルゴリズムで二つの数の下にある数を構成していくのである. 分数  $r$  の位置に対応するマルコフ数を  $m(r)$  とする.



Farey tree

次に, 各ファレイ分数に二つの文字  $a, b$  の自由語を,  $c(0) = a, c(1) = b$  から出発し,  $(r', r, r'')$  を隣接3分数とするととき  $c(r) = c(r')c(r'')$  (連結積) で帰納的に対応させる.

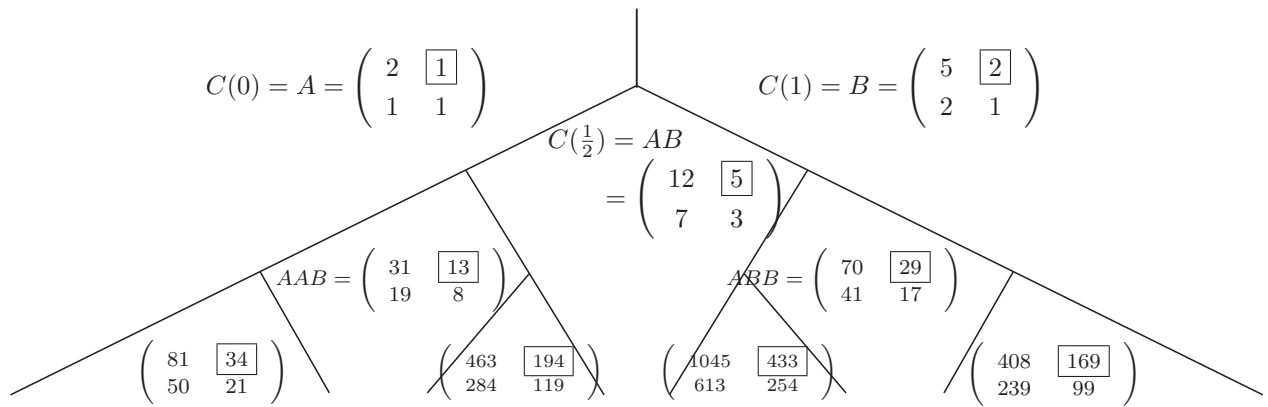


Farey word tree

そして, 分数  $r$  ( $0 \leq r \leq 1$ ) に対し行列  $C(r)$  を, 自由語  $c(r)$  に行列を

$$a \mapsto A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \mapsto B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

なる変換と, 連結積は行列の積に置き換えることで対応させる.



Cohn matrix tree

このとき、Markoff, Frobenius, Cohn らの理論により (Bombieri [1] がよいサーベイである)

行列  $C(r)$  の右上成分 (およびトレースの3分の1) が対応するマルコフ数  $m(r)$  であり, この行列の固定点 (の一方)  $\theta(r)$  が対応するマルコフ二次無理数, かつそれは, 対応している自由語の  $a$  を 1, 1 に,  $b$  を 2, 2 に置き換えて得られる数字列を循環節を持つような, 純循環連分数展開を持つ.

例えば,

$$m_9 = 194 = M\left(\frac{2}{5}\right) \longleftrightarrow \mathbf{c}\left(\frac{2}{5}\right) = aabab \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 463 & 194 \\ 284 & 119 \end{pmatrix}$$

であり,

$$\theta\left(\frac{2}{5}\right) = \theta_9 = \frac{463\theta_9 + 194}{284\theta_9 + 119} = [1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2]$$

となっている. 最後の右辺の記号は  $\{1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2\}$  を循環節を持つ純循環連分数

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}}}}}$$

を表している.

このようにしてマルコフ二次無理数をファレイ分数でラベル付けをしたとき, 上で述べた観察は

**観察その7** 対応  $r \mapsto \text{val}(\theta(r))$  は連続

と述べられる. 分母が7以下の分数についての例を表にすると以下の通り. 実部は単調に増加し, 虚部は  $r = 1/2$  の時をピークとして連続的に変化している. この様子が先に示した  $\text{val}$  の値のプロット図の左方の山型の線である.

$r$	$\mathbf{c}(r)$	$\text{val}(\theta(r))$
$0/1$	$a$	706.3248135408125821 ...
$1/7$	$aaaaaab$	707.2692561396631393 ... + 0.1141395581120447229 ... $i$
$1/6$	$aaaaab$	707.4080288468731756 ... + 0.1309034208870322692 ... $i$
$1/5$	$aaaab$	707.5945659988763180 ... + 0.1533867749061698028 ... $i$
$1/4$	$aaab$	707.8583723826967448 ... + 0.1847653353838999688 ... $i$
$2/7$	$aaabaab$	708.0348125012714204 ... + 0.2041556894313982860 ... $i$
$1/3$	$aab$	708.2575882428467797 ... + 0.2286358266649360649 ... $i$
$2/5$	$aabab$	708.5346656664794211 ... + 0.2450132134683238542 ... $i$
$3/7$	$aababab$	708.6465206449353398 ... + 0.2515790406999367673 ... $i$
$1/2$	$ab$	708.9099197207087473 ... + 0.2670397354602899677 ... $i$
$4/7$	$abababb$	709.0875535649402100 ... + 0.2209805094289926201 ... $i$
$3/5$	$ababb$	709.1545395813431970 ... + 0.2036114408517187755 ... $i$
$2/3$	$abb$	709.3026116673876565 ... + 0.1651964739421995694 ... $i$
$5/7$	$abbabbb$	709.3999659857307715 ... + 0.1380102986089410898 ... $i$
$3/4$	$abbb$	709.4697680246572326 ... + 0.1185180790830461506 ... $i$
$4/5$	$abbbb$	709.5631046996452132 ... + 0.0923765232488907946 ... $i$
$5/6$	$abbbbb$	709.6227038601741827 ... + 0.0756822399800070116 ... $i$
$6/7$	$abbbbbb$	709.6640585451801062 ... + 0.0640983587355711778 ... $i$
$1/1$	$b$	709.8928909199123368 ...

繁木はその修士論文において, 上記の対応  $a \mapsto 1, 1, b \mapsto 2, 2$  を一般化して  $a, b$  に様々な数字列を対応させて, その数字列を循環節に持つような純循環連分数で表される実二次無理数での  $\text{val}$  の値を考え, それがパラメータ  $r$  にどのように依存するかを観察した. するとやはりマルコフ二次無理数のときと同様のある種の連続性が見られる. 虚部が出る場合は  $1/2$  がピークにならず  $1/3$  にピークを持つような例もある. 繁木の講演では Mathematica で作成したグラフを, 数字列を変化させながら視覚的に見せていたが, 残念ながらここではそれを再現できない. また, 特定のパターンについては予想らしきものを立てることは出来るものの, 一般的に組織だった予想として提出出来るだけの観察はまだ出来ていない.

値が実数かどうかについては, 基本単数のノルムが  $-1$  のときは常に実数になるが (それは,  $-w$  が  $w$  と  $\text{SL}_2(\mathbf{Z})$ -同値になるので, 2節の命題から従う), ノルムが  $1$  のとき,

**予想**  $w$  を判別式  $D$  の実二次無理数とし, 判別式  $D$  の整環の基本単数のノルムが  $1$  であるとす. このとき  $\text{val}(w)$  が実数となるのは  $w$  と  $-w'$  が  $\text{SL}_2(\mathbf{Z})$ -同値になるとき, またそのときに限る.

この条件は, イdeal類群の言葉で言うと,  $w$  の  $\text{SL}_2(\mathbf{Z})$ -同値類に対応する狭義イdeal類群でのイdeal類の位数が  $1$  か  $2$ , ということである. 第2節の命題 (基本性質) から, この条件が十分であることはすぐに分かる. 問題はそのときに限るか, ということにあり, 数値実験はそれを支持するよう見えるが, 証明が出来ていない. なお,  $w$  と  $-w'$  が  $\text{SL}_2(\mathbf{Z})$ -同値になるかどうかの一つの判定法として繁木は次を証明した.

**命題** 実二次無理数  $w$  について、 $w$  と  $-w'$  が  $SL_2(\mathbf{Z})$ -同値になるための必要十分条件は、 $w$  の通常の連分数展開の循環節が、少なくとも一方は奇数長であるような、二つの回文型数列を連結した形となっていることである。

よく知られるように、二つの実二次無理数が  $GL_2(\mathbf{Z})$ -同値であることと、それらの通常の連分数展開の循環節が巡回同値であることが同値であり、 $SL_2(\mathbf{Z})$ -同値かどうかは「負の連分数展開」の循環節で同様に判定できる。上の命題はそれを通常の連分数の言葉に書き直したもので、証明はさほど難しくはないが、通常の連分数でうまく話が済んでいるのは一寸面白いと思う。知られているかと思い文献を探したが見つからなかった。ご存じの方がおられたらご教示下されれば幸いである。

以上、 $\text{val}(w)$  についていくつかの観察を記してきたが、その整数論的な意味はまだ全く分かっていない。ただし、最近 W. Duke, Ö. Imamoglu, Á. Tóth の三人によって、虚二次点の場合に出てきた  $t(d)$  のような、 $\text{val}(w)$  のある種の平均を考えると、それを母関数とするような非正則なモジュラー形式（重さ  $1/2$ ）が存在することが示された。彼らの仕事は Borcherds, Zagier の結果を非正則モジュラー形式に枠組みを広げて一般化する興味深いものである。 $\text{val}(w)$  にしてもその平均にしても、数論的な量との関連はまだ分からないものの、何か奥に存在することを予感させる仕事であり、更なる発展が期待される。

## 参考文献

- [1] E. Bombieri, *Continued fractions and the Markoff tree*, Expo.Math., **25**, 187–213 (2007).
- [2] R. Dedekind, *Schreiben an Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **83**, 265–292 (1877).
- [3] W. Duke, Ö. Imamoglu, and Á. Tóth, *Cycle integrals of the  $j$ -function and mock modular forms*, preprint, 2009.
- [4] W. Duke, Ö. Imamoglu, and Á. Tóth, *Real quadratic analogues of traces of singular invariants*, preprint, 2010.
- [5] E. Hecke, *Darstellung von Klassenzahlen als Perioden von Integralen 3. Gattung aus dem Gebiet der elliptischen Modulfunktionen*, Abh. Math. Sem. Hamburg, **4**, 211–223 (1925).
- [6] M. Kaneko, *Traces of singular moduli and the Fourier coefficients of the elliptic modular function  $j(\tau)$* , “Number Theory” (R. Gupta and K. Williams eds.), CRM Proceedings and Lecture Notes, vol. **19**, 173–176, (1999).
- [7] M. Kaneko, *Observations on the “values” of the elliptic modular function  $j(\tau)$  at real quadratics*, Kyushu J. Math., **63-2**, 353–364 (2009).
- [8] 金子昌信, 楯円モジュラー  $j$  関数をめぐって, 第 21 回 有限群論草津セミナー (2009.7.31–8.3) 報告集, 38–48 (2010).
- [9] T. Shintani, *On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight*, Nagoya Math. J., **58**, 83 – 126 (1975).