いくつかの種数0モジュラー関数のフーリエ係数公式

九州大学大学院数理学府修士課程[1]　大田 香織
九州大学大学院数理学研究院　金子 昌信

楕円モジュラー関数 $j(\tau)$ は，$E_4(\tau)$，$\Delta(\tau)$ をそれぞれ $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ 4 の Eisenstein 級数，重さ 12 の尖点形式で，先頭のフーリエ係数が 1 となるよう正規化されたものとするとき，

$$j(\tau)=\frac{E_4(\tau)^3}{\Delta(\tau)}=\frac{\left(1+240\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d|n}d^3\right)q^n\right)^3}{q\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}},\quad (q=e^{2\pi i\tau})$$

で定義される複素上半平面上の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 不変な関数である．そのフーリエ展開は

$$j(\tau)=\frac{1}{q}+744+196884q+21493760q^2+\cdots=\frac{1}{q}+744+\sum_{n=1}^{\infty}c_nq^n$$

の形で，係数 c_n は定義からすぐに見てとれるように正の整数である．係数の数論的な性質としては素数冪を法とした合同式が古くから調べられているくらいであると思うが，ほかに散在型単純群モンスターの表現次数との関係，いわゆる “Monstrous Moonshine” は意外で著しい結果としてよく知られる（たとえば [2] 参照）．この係数について講演者の一人は以前次の公式を発見，証明した．

Theorem ([3])**.**

$$c_n=\frac{1}{n}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\left\{\mathbf{t}(n-r^2)-\frac{(-1)^{n+r}}{4}\mathbf{t}(4n-r^2)+\frac{(-1)^r}{4}\mathbf{t}(16n-r^2)\right\}.$$

ここに $\mathbf{t}(d)$ は有理整数で（定義は以下），$d>0$ のときは大体，判別式 $-d$ の CM 点（虚 2 次点）での $j(\tau)-744$ の値 (代数的整数になることが知られている) のトレースである．$d<-1$ ならば $\mathbf{t}(d)=0$ となっており，上の和は実質有限和である．係数 c_n を表す公式として，これをベッセル関数，Kloosterman 和を含んだ無限級数で与えるいわば解析的公式が知られているが（[8], [9]），上の公式は c_n を $j(\tau)$ の虚 2 次点での値（いわゆる singular moduli）による有限和で表す，数論的公式と言える．一種の跡公式と言うこともできる．今のところこれといった応用がないのであるが，[1] によれば，この公式によって c_n を計算するのが一番効率が良いそうである．

今回この結果と類似の公式を，レベル $N=2,3,4$ の合同部分群 $\Gamma_0(N)$ および $\Gamma_0(N)^*$ に対する “Hauptmodul” $j_N(\tau), j_N^*(\tau)$ のフーリエ係数について得ることが出来たので，ご報告したい．

---
[1] 2007 年 3 月まで．現在山口県立高森高校教諭

関数 $j_N(\tau), j_N^*(\tau)$ はそれぞれ種数が 0 の群 $\Gamma_0(N), \Gamma_0(N)^*$ に関する重さ 0 のモジュラー関数で，無限遠の尖点にのみ極を持ち，そこでのフーリエ展開が $q^{-1}+O(q)$ の形をしているものである．$N=2,3,4$ の場合については，Dedekind のエータ関数を使って具体的に

$$
\begin{aligned}
j_2(\tau) &= \left(\frac{\eta(\tau)}{\eta(2\tau)}\right)^{24} + 24 = \frac{1}{q} + 276q - 2048q^2 + 11202q^3 - \cdots, \\
j_2^*(\tau) &= \left(\frac{\eta(\tau)}{\eta(2\tau)}\right)^{24} + 24 + 2^{12}\left(\frac{\eta(2\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{24} \\
&= \frac{1}{q} + 4372q + 96256q^2 + 1240002q^3 + \cdots, \\
j_3(\tau) &= \left(\frac{\eta(\tau)}{\eta(3\tau)}\right)^{12} + 12 = \frac{1}{q} + 54q - 76q^2 - 243q^3 + \cdots, \\
j_3^*(\tau) &= \left(\frac{\eta(\tau)}{\eta(3\tau)}\right)^{12} + 12 + 3^{6}\left(\frac{\eta(3\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{12} \\
&= \frac{1}{q} + 783q + 8672q^2 + 65367q^3 + \cdots, \\
j_4(\tau) &= \left(\frac{\eta(\tau)}{\eta(4\tau)}\right)^{8} + 8 = \frac{1}{q} + 20q - 62q^3 + 216q^5 - \cdots, \\
j_4^*(\tau) &= \left(\frac{\eta(\tau)}{\eta(4\tau)}\right)^{8} + 8 + 4^{4}\left(\frac{\eta(4\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{8} \\
&= \frac{1}{q} + 276q + 2048q^2 + 11202q^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

で与えられる．

判別式 $-d$ の整係数正定値二元二次形式 $aX^2 + bXY + cY^2$ のうち，$a \equiv 0 \pmod{N}$ となるものの集合を $\mathcal{Q}_{d,N}$ とする．$Q \in \mathcal{Q}_{d,N}$ に対応する虚 2 次点を α_Q で表す．さらに，自然数 n に対し，j_N^* の $\mathbb{Q}$ 係数 n 次多項式 $\varphi_n(j_N^*)$ で，$\varphi_n(j_N^*(\tau)) = q^{-n} + O(q)$ の形のフーリエ展開を持つものを $\varphi_n(j_N^*)$ とおく（一意的に定まる）．

Definition. 自然数 $d>0$, $-d \equiv$ 平方数 $\pmod{4N}$ に対し，

$$
\mathbf{t}_n^{(N*)}(d) := \sum_{Q \in \mathcal{Q}_{d,N}/\Gamma_0(N)^*} \frac{1}{|\Gamma_0(N)_Q^*|} \varphi_n(j_N^*(\alpha_Q)).
$$

ここに $|\Gamma_0(N)_Q^*|$ は Q の固定部分群の位数を表す．また $\mathbf{t}_n^{(N*)}(0) = 2, \mathbf{t}_n^{(N*)}(-1) = -1$ とし，$d < -1$ または $-d \not\equiv$ 平方数 $\pmod{4N}$ のときは $\mathbf{t}_n^{(N*)}(d) = 0$ とする．

特に $\mathbf{t}_1^{(1*)}(d)$ を $\mathbf{t}(d)$ と書く．$\varphi_1(j_1^*(\tau)) = j(\tau) - 744$ であり，これが $j(\tau)$ の係数を書くのに用いられたものである．以下扱う場合はすべて $\mathbf{t}_n^{(N*)}(d) \in \mathbb{Z}$ であることが証明できるが，一般に言えるかどうかは分からない．

$j_N(\tau), j_N^*(\tau)$ のフーリエ係数をそれぞれ $c_n^{(N)}$, $c_n^{(N*)}$ とする：

$$j_N(\tau) = \frac{1}{q} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(N)} q^n, \quad j_N^*(\tau) = \frac{1}{q} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(N*)} q^n.$$

このとき，以下の係数公式が得られた．

Theorem 1 **(**$\Gamma_0(2)$ **その１)．** すべての自然数 n に対し，

$$c_n^{(2)} = \frac{1}{n}\left\{\sum_{r\in\mathbb{Z}}\left(\mathbf{t}(n-r^2) - \frac{(-1)^{n+r}}{4}\mathbf{t}(4n-r^2)\right) + 24\sum_{\substack{d\mid n\\ d:odd}} d\right\}.$$

Theorem 2 **(**$\Gamma_0(2)$ **その２)．** すべての自然数 n に対し，
i) n が奇数のとき

$$c_n^{(2)} = \frac{1}{n}\left\{\sum_{r\in\mathbb{Z}}\left(\mathbf{t}(n-r^2) + \frac{(-1)^{r}}{4}\mathbf{t}_2^{(2*)}(4n-r^2)\right) + 12\sum_{d\mid n} d\right\},$$

ii) n が偶数のとき

$$c_n^{(2)} = \frac{1}{n}\left\{-\sum_{r\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^{r}}{8}\mathbf{t}_2^{(2*)}(4n-r^2) + 12\sum_{\substack{d\mid n\\ d:odd}} d\right\}.$$

Theorem 3 **(**$\Gamma_0(2)^*$ **その１)．** すべての自然数 n に対し，

$$c_n^{(2*)} = \frac{1}{n}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\left\{\mathbf{t}(n-r^2) - \frac{(-1)^{n+r}}{4}\mathbf{t}(4n-r^2) + \frac{(-1)^{r}}{4}\mathbf{t}(8n-r^2)\right\}.$$

この公式は $j(\tau)$ の係数公式に非常に似ている．

Theorem 4 **(**$\Gamma_0(2)^*$ **その２)．** すべての自然数 n に対し，
i) n が奇数のとき

$$c_n^{(2*)} = \frac{1}{n}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\left\{\mathbf{t}(n-r^2) + \frac{(-1)^{r}}{4}\mathbf{t}_2^{(2*)}(4n-r^2) + \frac{(-1)^{r}}{8}\mathbf{t}_2^{(2*)}(8n-r^2)\right\},$$

ii) n が偶数のとき

$$c_n^{(2*)} = \frac{1}{n}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\left\{-\frac{(-1)^{r}}{8}\mathbf{t}_2^{(2*)}(4n-r^2) + \frac{(-1)^{r}}{8}\mathbf{t}_2^{(2*)}(8n-r^2)\right\}.$$

レベルが 3 の場合は次のように完全には公式が得られていない．

Theorem 5 **($\Gamma_0(3)$).** 自然数 n について，
i) $n \equiv 1 \pmod 3$ のとき

$$c_n^{(3)} = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{4}\sum_{r\in\mathbb{Z}} \mathbf{t}_2^{(3*)}(4n-r^2) + 54\sum_{0\le i\le n} e_i e_{n-i}\right\},$$

ii) $n \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$c_n^{(3)} = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2}\sum_{r\in\mathbb{Z}} \mathbf{t}_2^{(3*)}(4n-r^2) + 54\sum_{0\le i\le n} e_i e_{n-i}\right\}.$$

ここで，$i > 0$ のとき $e_i := \sum_{d|i}\left(\frac{d}{3}\right)$，$e_0 := \frac{1}{6}$ とする．

Theorem 6 **($\Gamma_0(4)$).** すべての自然数 n に対し，
i) n が奇数のとき

$$c_n^{(4)} = \frac{1}{n}\left\{\sum_{r\in\mathbb{Z}} \mathbf{t}(n-r^2) + 16\sum_{d|n} d\right\},$$

ii) n が偶数のとき

$$c_n^{(4)} = 0.$$

$\Gamma_0(4)$ と主合同部分群 $\Gamma(2)$ は共役で,（適当に正規化された）古典的な λ 関数の係数列は $c_n^{(4)}$ と同一であるので，これは λ 関数の係数公式でもある．

Theorem 7 **($\Gamma_0(4)^*$).** すべての自然数 n に対し，

$$c_n^{(4*)} = \frac{1}{n}\left\{\sum_{r\in\mathbb{Z}}\left(\mathbf{t}(n-r^2) + \frac{(-1)^r}{4}\mathbf{t}(4n-r^2)\right) - (-1)^n 24\sum_{\substack{d|n\\ d:odd}} d\right\}.$$

これらの定理の証明であるが，$\mathbf{t}_n^{(N*)}(d)$ がある Jacobi form の係数として現れるという D. Zagier [10], C. H. Kim [4, 5, 6] の結果と，よく知られた Jacobi form と半整数重さの modular form の関係から，$\mathbf{t}_n^{(N*)}(d)$ を係数とする級数が重さ 3/2 の（無限遠では極を持つ）modular form になることが分かる．その modular form とヤコビのテータ関数（重さ 1/2）の積に適当な作用素（“U-operator”）を施したものを組み合わせることにより，$j_N(\tau), j_N^*(\tau)$ の微分（重さ 2）を表すような式を実験的に見つけ出す．見つけ出せればあとは，フーリエ係数が十分先まで一致していることを確かめて証明が終わる.（どこまで確かめればよいかもきちんと評価する.）これは至って発見的（悪く言えば場当たり的）なやり方で，一般性がない．事

実 N が 5 以上でも類似の公式はあると思われるが，多分色々な自由度が増すこともあって，やみくもにやっていても見つからない．ここでは証明の詳細は一切省き，[7] に譲る．(興味をお持ちの方は mkaneko@math.kyushu-u.ac.jp まで御連絡下さい．ファイルを送ります.)

最後に一つだけ例を挙げる．数 $\mathbf{t}_n^{(N*)}(d)$ は簡単な漸化式を満たしており，定義に戻ることなく容易に計算できる．これも [7] 参照.

$$j_2(\tau) = \left(\frac{\eta(\tau)}{\eta(2\tau)}\right)^{24} + 24 = \frac{1}{q} + 276q - 2048q^2 + 11202q^3 - 49152q^4 + \cdots.$$

Theorem 1 と下の表より，

$$\begin{aligned}
c_1^{(2)} &= 2\mathbf{t}(0) + \frac{1}{4}(\mathbf{t}(4) - 2\mathbf{t}(3) + 2\mathbf{t}(0)) + 24 \\
&= 2 \times 2 + \frac{1}{4}(492 - 2 \times (-248) + 2 \times 2) + 24 = 276, \\
c_2^{(2)} &= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{4}(\mathbf{t}(8) - 2\mathbf{t}(7) + 2\mathbf{t}(4) - 2\mathbf{t}(-1)) + 24\right\} \\
&= -\frac{1}{8}(7256 - 2 \times (-4119) + 2 \times 492 - 2 \times (-1)) + 12 = -2048.
\end{aligned}$$

一方 Theorem 2 を使うと

$$\begin{aligned}
c_1^{(2)} &= 2\mathbf{t}(0) + \frac{1}{4}(\mathbf{t}_2^{(2*)}(4) + 2\mathbf{t}_2^{(2*)}(0)) + 12 \\
&= 2 \times 2 + \frac{1}{4}(1036 + 2 \times 2) + 12 = 276, \\
c_2^{(2)} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{8}(-\mathbf{t}_2^{(2*)}(8) + 2\mathbf{t}_2^{(2*)}(7) - 2\mathbf{t}_2^{(2*)}(4) + 2\mathbf{t}_2^{(2*)}(-1)) + 12\right\} \\
&= \frac{1}{16}(-14360 + 2 \times (-8215) - 2 \times 1036 + 2 \times (-1)) + 6 = -2048.
\end{aligned}$$

$\mathbf{t}(d)$ および $\mathbf{t}_n^{(2*)}(d)$ $\quad (n = 1, 2)$ の値は次の通り．

d	$\mathbf{t}(d)$	d	$\mathbf{t}(d)$	d	$\mathbf{t}(d)$	d	$\mathbf{t}(d)$
-1	-1	12	53008	27	-12288992	40	425691312
0	2	15	-192513	28	16576512	43	-884736744
3	-248	16	287244	31	-39493539	44	1122626864
4	492	19	-885480	32	52255768	47	-2257837845
7	-4119	20	1262512	35	-117966288	48	2835861520
8	7256	23	-3493982	36	153541020	51	-5541103056
11	-33512	24	4833456	39	-331534572	52	6896878512

d	$\mathbf{t}_1^{(2*)}(d)$	$\mathbf{t}_2^{(2*)}(d)$	d	$\mathbf{t}_1^{(2*)}(d)$	$\mathbf{t}_2^{(2*)}(d)$
-1	-1	-1	24	4400	9662512
0	2	2	28	-8192	33161216
4	-52	1036	31	93	-78987171
7	-23	-8215	32	14360	104497176
8	152	14360	36	-24836	307106876
12	-496	106512	39	-236	-663068908
15	-1	-385025	40	41264	851341360
16	1036	573452	44	-67024	2245320752
20	-2256	2527280	47	235	-4515675925
23	-94	-6987870	48	106512	5671616528

参考文献

[1] H. Baier and G. Köhler, How to Compute the Coefficients of the Elliptic Modular Function $j(z)$, Experimental Math. **12** (2003), No. 1, 115–121.

[2] 原田耕一郎, モンスター 群のひろがり, 岩波書店 (1999).

[3] M. Kaneko, Traces of singular moduli and the Fourier coefficients of the elliptic modular function $j(\tau)$. Number theory (Ottawa, ON, 1996), 173–176, CRM Proc. Lecture Notes, 19, Amer. Math. Soc., 1999.

[4] C. H. Kim, Recursions for traces of singular moduli, Preprint.

[5] C. H. Kim, Borcherds products associated with certain Thompson series, Compos. Math. **140** (2004), no. 3, 541–551.

[6] C. H. Kim, Traces of singular values and Borcherds products, to appear in Bull. London Math. Soc.

[7] K. Ohta, Formulas for the Fourier coefficients of some genus 0 modular functions, preprint, 投稿中

[8] H. Petersson, Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen, Acta Math. **58** (1932), 169–215.

[9] H. Rademacher, The Fourier coefficients of the modular invariant $J(\tau)$, Amer. J. Math. **60** (1938), 501–512.

[10] D. Zagier, Traces of singular moduli. Motives, polylogarithms and Hodge theory, Part I (Irvine, CA, 1998), 211–244, Int. Press Lect. Ser., 3, I, 2002.