“Extremal” な準モジュラー形式について*

九州大学大学院数理学研究院　金子昌信
同　　　　　　　小池正夫

1. 序

この研究の背景には，超特異楕円曲線の j-不変量に関する研究 [7] で現れた微分方程式

$$(\sharp)_k \qquad f''(\tau) - \frac{k+1}{6}E_2(\tau)f'(\tau) + \frac{k(k+1)}{12}E_2'(\tau)f(\tau) = 0$$

を更に調べた共同研究 [3] があり，それをはじめに少し述べる． ここで $\tau \in \mathfrak{H} =$ 上半平面，k は整数（ときに有理数）のパラメータ，微分記号は通常の τ に関する微分を $2\pi i$ で割ったものを表す．$E_2(\tau)$ は $SL_2(\mathbf{Z})$ に関する「重さ 2 の Eisenstein 級数」で，その Fourier 展開は

$$E_2(\tau) := 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n \quad (q = e^{2\pi i\tau}) \qquad (\sigma_r(n) = \sum_{d|n,d>0} d^r)$$

で与えられる． この $E_2(\tau)$ は以下の主役である「準モジュラー形式」(“quasimodular form”) の最も基本的な例で，$SL_2(\mathbf{Z})$ に関して変換則

$$(c\tau+d)^{-2}E_2\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = E_2(\tau) + \frac{6}{\pi i}\frac{c}{c\tau+d} \qquad (\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}))$$

を満たす. 一般に群 $\Gamma \subset SL_2(\mathbf{R})$ に関する重さ k の準モジュラー形式とは τ を固定した時

$$(c\tau+d)^{-k}f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) - f(\tau) \quad \text{が}\ \frac{c}{c\tau+d}\ \text{の多項式} \qquad (\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma)$$

となるもの (+ 増大度の条件) である (W. Nahm の定義，別の定義は [6] 参照) が，$\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$ の場合，準モジュラー形式とは具体的には $\mathbf{C}[E_2(\tau), E_4(\tau), E_6(\tau)]$ の斉次な元のことである．ここに $E_4(\tau), E_6(\tau)$ はそれぞれ重さ 4,6 の Eisenstein 級数で Fourier 展開が

$$E_4(\tau) = 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n, \quad E_6(\tau) = 1 - 504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n$$

で与えられる．斉次とは $E_2 = E_2(\tau), E_4 = E_4(\tau), E_6 = E_6(\tau)$ の次数をそれぞれ 2,4,6 とみていうのである．

微分方程式 $(\sharp)_k$ がどのようにして出てくるか，その特徴づけ，などについては [7], [3] の他に [2] もご覧頂きたい．我々は [3] において，様々な k の値に対し $(\sharp)_k$ のモジュラー形式の解を超幾何多項式を使って具体的に与えたが，その他に

*早稲田大学整数論シンポジウム (2004. 3. 17–19) 報告集原稿

k が $6n+5$ の形の自然数ならば $(\sharp)_k$ は $SL_2(\mathbf{Z})$ に関する重さ $k+1$ の準モジュラー形式を解に持つ

ことを示した．今回の研究の発端は

$\boxed{\text{この準モジュラー解は “extremal” である}}$

ことに気がついたこと (小池) である．次にこの概念の定義を与えよう．以下モジュラー/準モジュラー形式は $SL_2(\mathbf{Z})$ に関するものしか出ないので特に断らない．

2. Extremal quasimodular form

重さ k の準モジュラー形式 $f \in \mathbf{C}[E_2, E_4, E_6]$ はこれを E_2 の多項式と思うと，ある整数 $r \geq 0$ と重さ $k-2i$ のモジュラー形式 f_i $(0 \leq i \leq r)$ があって

$$f = f_0 + f_1 E_2 + \cdots + f_r E_2^r$$

と書ける．

定義　f を上のように書いたとき，$f_r \neq 0$ であれば f は「深さ」(“depth”) r を持つという．記号 $QM_k^{(r)}$ により重さが k で深さが r 以下の準モジュラー形式全体のなす $\mathbf{C}$ ベクトル空間を表す．深さ 0 の準モジュラー形式がすなわち普通のモジュラー形式である．その空間 $QM_k^{(0)}$ を M_k と記す．深さは明らかに $k/2$ 以下であり，重さ 2 のモジュラー形式が存在しないことに対応して，重さ k, 深さ $k/2-1$ の準モジュラー形式は存在しないことに注意する．

$$M_k = QM_k^{(0)} \subseteq QM_k^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq QM_k^{(k/2-2)} = QM_k^{(k/2-1)} \subseteq QM_k^{(k/2)} = QM_k^{(k/2+1)} = \cdots .$$

さて次の定義をする．

定義　f を $QM_k^{(r)} \setminus QM_k^{(r-1)}$ の元，つまり重さ k, 深さ r の準モジュラー形式とし，空間 $QM_k^{(r)}$ の次元を m とする: $m = \dim_{\mathbf{C}} QM_k^{(r)} (= \sum_{i=0}^{r} \dim_{\mathbf{C}} M_{k-2i})$．$f$ が **extremal** quasimodular form (以下 **ex-qmf** と略す) であるとは，その Fourier 展開 $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ が

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-2} = 0,\ a_{m-1} \neq 0$$

を満たすことをいう．更に $a_{m-1} = 1$ であれば「正規化されている」という．

注意　二次形式で extremal lattice という概念があり，付随するテータ級数や一般に Fourier 展開が $1 + O(q^{m-1})$ であるようなモジュラー形式 $\in M_k$, $\dim M_k = m$, を extremal modular form ということがある．我々の条件は定数項も 0 とする点で従来の言葉遣いと食い違っているが，紛れはなかろうと思い（他によい言葉も思いつかないので）そのまま使うとする．(「両極端」というとおり，二通りの「極端」があってもよかろう!?)

重さが小さい場合の正規化された ex-qmf の実例をあげる．

重さ 2, 深さ 1：

$$E_2 = 1 - 24q - 72q^2 - 96q^3 - 168q^4 - 144q^5 - 288q^6 - \cdots .$$

重さ 4, 深さ 2：

$$\frac{1}{288}(E_4 - E_2^2)\left(= -\frac{E_2'}{24}\right) = q + 6q^2 + 12q^3 + 28q^4 + 30q^5 + 72q^6 + \cdots .$$

重さ 6, 深さ 1：

$$\frac{1}{720}(E_4E_2 - E_6)\left(= \frac{E_4'}{240}\right) = q + 18q^2 + 84q^3 + 292q^4 + 630q^5 + 1512q^6 + \cdots .$$

重さ 6, 深さ 3:

$$\frac{1}{51840}(5E_2^3 - 3E_4E_2 - 2E_6) = q^2 + 8q^3 + 30q^4 + 80q^5 + 180q^6 + 336q^7 + \cdots .$$

重さ 8, 深さ 1：

$$\frac{1}{1008}(E_4^2 - E_6E_2)\left(= -\frac{E_6'}{504}\right) = q + 66q^2 + 732q^3 + 4228q^4 + 15630q^5 + 48312q^6 + \cdots .$$

重さ 8, 深さ 2：

$$\frac{1}{362880}(5E_4^2 + 2E_6E_2 - 7E_4E_2^2) = q^2 + 16q^3 + 102q^4 + 416q^5 + 1308q^6 + 3360q^7 + \cdots .$$

重さ 8, 深さ 4：

$$\frac{1}{11612160}(5E_4^2+16E_6E_2+14E_4E_2^2-35E_2^4) = q^3+\frac{21}{2}q^4+54q^5+192q^6+546q^7+1323q^8+2856q^9+\cdots .$$

モジュラーな場合 ($SL_2(\mathbf{Z})$) は始めの次元分の Fourier 係数でその重さのモジュラー形式が一意的に決まってしまうが，このことが準モジュラー形式でも成り立つかは明らかでないし，我々は一般的にはその答えを知らない．すなわちまず問題として

> 重さ k, 深さ r の ex-qmf は $r \leq k/2$, $r \neq k/2-1$ を満たせば常に存在するであろうか，また存在する時，正規化すれば一意的であろうか．

深さが 1 で重さ $\equiv 0 \bmod 6$ のときが先に述べた $(\sharp)_k$ の解になっている場合で，その他深さが 1 の ex-qmf はすべて具体的に与えることが出来，また $(\sharp)_k$ と類似の微分方程式の解になっていることが示される．それを次の §3 で述べ，§4 で深さ 2 についての同様の結果を記述する．今度は微分方程式の階数は 3 となり，ex-qmf の具体的記述のために用いられる多項式系が，$r=1$ のときは 3 項漸化式で与えられたものが 4 項漸化式になり，と，複雑さが一つ増す． §5 で $r \geq 3$ の

場合について他，観察の結果予想されることをいくつか述べる．特に特別な型の微分方程式の果たす役割，Fourier 係数の正値性とその意味，が興味のあるところである．

3. 深さ 1 の ex-qmf

$k=6n+5$ のとき，よく知られた M_{k+1-2i} の次元の公式により容易に $\dim QM_{k+1}^{(1)}=n+2$ と計算されるが，先に述べた $(\sharp)_k$ の重さ $k+1$ の準モジュラー解は，微分方程式の $q=0$ での “exponent” を計算することにより q^{n+1} の項から始まることが分かり, 解の具体的な表示から深さが 1 なので, 重さ $k+1$, 深さ 1 の ex-qmf であることが分かる．

数論的に意味のある特定の微分方程式 $(\sharp)_k$ の解として，Fourier 係数が次元分目いっぱい消える ex-qmf が現れていること，これは偶然であるかそれとも何か意味のある現象の一端であろうか． 深さが 1 で重さが $\bmod 6$ の他の合同類に入る場合は同じ微分方程式では駄目だが，それに近い方程式の解としてやはり ex-qmf が得られる．深さ 1 の場合の記述をまとめて書いておく．

今多項式列 $P_n(x), P_n^*(x)$ $(n=0,1,2,\dots)$ を

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\quad P_{n+1}(x)=xP_n(x)+\mu_nP_{n-1}(x)\quad (n=1,2,\dots),$$
$$P_0^*(x)=1,\ P_1^*(x)=x,\quad P_{n+1}^*(x)=xP_n(x)+\mu_n^*P_{n-1}^*(x)\quad (n=1,2,\dots),$$

ここに

$$\mu_n=12\left(6-\frac{1}{n}\right)\left(6+\frac{1}{n+1}\right),\quad \mu_n^*=12\left(6+\frac{1}{n}\right)\left(6-\frac{1}{n+1}\right)$$

で定義する．はじめのいくつかは

$$P_2(x)=x^2+390,\ P_3(x)=x^3+808x,\ P_4(x)=x^4+1233x^2+165750,\dots$$
$$P_2^*(x)=x^2+462,\ P_3^*(x)=x^3+904x,\ P_4^*(x)=x^4+1341x^2+201894,\dots$$

で, n の偶奇に応じて $P_n(x), P_n^*(x)$ は偶/奇多項式となる．これは定義から明らかであろう．また, これらの「随伴」多項式列 $Q_n(x), Q_n^*(x)$ を, 初期値だけ異なる同じ漸化式

$$Q_0(x)=0,\ Q_1(x)=1,\quad Q_{n+1}(x)=xQ_n(x)+\mu_nQ_{n-1}(x)\quad (n=1,2,\dots),$$
$$Q_0^*(x)=0,\ Q_1^*(x)=1,\quad Q_{n+1}^*(x)=xQ_n^*(x)+\mu_n^*Q_{n-1}^*(x)\quad (n=1,2,\dots),$$

で定義する．やはりはじめのいくつかを書くと

$$Q_2(x)=x,\ Q_3(x)=x^2+418,\ Q_4(x)=x^3+843x, Q_5(x)=x^4+1314x+192270,\dots,$$
$$Q_2^*(x)=x,\ Q_3^*(x)=x^2+442,\ Q_4^*(x)=x^3+879x, Q_5^*(x)=x^4+\frac{6354}{5}x^2+\frac{894102}{5},\dots,$$

で, 今度は偶奇が反対になる．このとき次の定理が成り立つ．

<u>定理 1</u>　i)　$k=6n+5$ $(n=0,1,2,\dots)$ とする．このとき

$$\sqrt{\Delta(\tau)}^{n}P_n\Big(\frac{E_6(\tau)}{\sqrt{\Delta(\tau)}}\Big)\frac{E_4'(\tau)}{240}-\sqrt{\Delta(\tau)}^{n+1}Q_n\Big(\frac{E_6(\tau)}{\sqrt{\Delta(\tau)}}\Big)E_2(\tau)\qquad \Big(\Delta=\frac{E_4^3-E_6^2}{1728}\Big)$$

は $SL_2(\mathbf{Z})$ に関する重さ $k+1(\equiv 0 \bmod 6)$, 深さ 1 の ex-qmf であり，微分方程式 $(\sharp)_k$ を満たす.

ii) $k=6n+7$ $(n=0,1,2,\dots)$ とする．このとき

$$\sqrt{\Delta(\tau)}^{\,n} P_n\Big(\frac{E_6(\tau)}{\sqrt{\Delta(\tau)}}\Big)\Big(-\frac{E_6'(\tau)}{504}\Big)-\sqrt{\Delta(\tau)}^{\,n+1} Q_n\Big(\frac{E_6(\tau)}{\sqrt{\Delta(\tau)}}\Big)E_2(\tau)$$

は $SL_2(\mathbf{Z})$ に関する重さ $k+1(\equiv 2 \bmod 6)$, 深さ 1 の ex-qmf であり，微分方程式

$$f''-\left(\frac{k+1}{6}E_2-\frac{1}{3}\frac{E_6}{E_4}\right)f'+\left(\frac{k(k+1)}{12}E_2'-\frac{k}{18}\frac{E_6'}{E_4}\right)f=0 \qquad \left({}'=\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}=q\frac{d}{dq}\right)$$

を満たす.

iii) 重さ $k+1\equiv 4 \bmod 6$, 深さ 1 の ex-qmf は i) で k を $k-4$ として得られるものの E_4 倍で与えられる．満たす微分方程式は

$$f''-\left(\frac{k+1}{6}E_2-\frac{2}{3}\frac{E_6}{E_4}\right)f'+\left(\frac{k(k+1)}{12}E_2'-\frac{k}{9}\frac{E_6'}{E_4}-\frac{2}{9}\big(E_4-\frac{E_6^2}{E_4^2}\big)\right)f=0.$$

i), ii) での表示式に $\sqrt{\Delta(\tau)}$ が入っているが, $P_n(x), Q_n(x)$ らのパリティーからこれは見かけ上のものであることが分かる．すなわち平方根は常に外れて, これらの式は $\mathbf{Q}[E_2,E_4,E_6]$ の元を与える $(E_4'=(E_2E_4-E_6)/3, E_6'=(E_2E_6-E_4^2)/2$ (Ramanujan) にも注意)．また iii) は，次元の計算から $k+1\equiv 0 \bmod 4$ ならば $\dim QM_{k+1}^{(1)}=\dim QM_{k-3}^{(1)}$, 従って $QM_{k+1}^{(1)}=E_4\cdot QM_{k-3}^{(1)}$ となることによる.

定理の表示式は微分方程式を満たすことを言うのに都合がよい形なのであるが，見かけの $\sqrt{\Delta(\tau)}$ が出ないようにするために更に n の奇偶で場合を分けてやると，面白いことに [7] で調べた Atkin の直交多項式が現れる．すなわち多項式 $A_n(X)$, $B_n(X)$ を初期値

$$A_0(X)=1,\ A_1(X)=X-720,\quad B_0(X)=0,\ B_1(X)=1,$$

漸化式

$$A_{n+1}(X)=(X-(\lambda_{2n+1}+\lambda_{2n}))A_n(X)-\lambda_{2n}\lambda_{2n-1}A_{n-1}(X) \qquad (n\geq 1),$$
$$B_{n+1}(X)=(X-(\lambda_{2n+1}+\lambda_{2n}))B_n(X)-\lambda_{2n}\lambda_{2n-1}B_{n-1}(X) \qquad (n\geq 1),$$

ここに

$$\lambda_0=1,\ \lambda_1=720,\ \lambda_n=12\left(6+\frac{(-1)^n}{n-1}\right)\left(6+\frac{(-1)^n}{n}\right) \quad (n\geq 2),$$

で定義すると ($\{A_n(X)\}$ が Atkin の直交多項式系),

$$\frac{1}{N_n}(E_2(\tau)\Delta(\tau)^nA_n(j(\tau))-E_4(\tau)^2E_6(\tau)\Delta(\tau)^{n-1}B_n(j(\tau))) \qquad (N_n=\lambda_{2n}\lambda_{2n-1}\cdots\lambda_2\lambda_1)$$

が重さ $12n+2$, 深さ 1 の正規化された ex-qmf となる．extremal であることと，$A_n(X)$, $B_n(X)$ がある超幾何級数の比の連分数展開の近似分数の分母分子として現れることがうまく対応していて証明される．その他の重さの場合も類似の直交多項式により同様に記述される.

ちなみに Atkin の直交多項式 $A_n(X)$ の数論的な性質として，p を素数，n_p を標数 p の超特異楕円曲線の同型類の個数，とすると

$$A_{n_p}(X) \bmod p \text{ の根が丁度それらの楕円曲線の } j \text{ 不変量の全体}$$

が成り立つことを記しておく．

4. 深さ 2 の ex-qmf

深さ r が 2 以上の場合の ex-qmf も特別な微分方程式を満たしているようである．この節で $r=2$ の場合の結果を，次節で $r \geq 3$ の場合について予想を述べる．

まず 0 以上の整数 k, l, n と関数 f, g に対して Rankin-Cohen 括弧積 $[\ ,\ ]_n^{(k,l)}$ を

$$[f,g]_n^{(k,l)} := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n+k-1}{n-i} \binom{n+l-1}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}$$

で定義する．微分は引き続き τ に関する微分の $(2\pi i)^{-1}$ 倍を表すとする．$[f,g]_0^{(k,l)} = fg$, $[f,g]_1^{(k,l)} = kfg' - lf'g$, などとなる． f, g がある群 $\Gamma \subset PSL(2, \mathbf{R})$ に関してそれぞれ重さ k, l のモジュラー形式の時, $[f,g]_n^{(k,l)}$ は Γ に関する重さ $k+l+2n$ のモジュラー形式になる ([8] 参照).

この括弧積を用いて微分作用素 $\theta_k^{(r)}$ を

$$\theta_k^{(r)}(f) := f^{(r+1)} - \frac{k+r}{12} [E_2, f]_r^{(2,k)}$$

で定義する．$r=0$ の場合の

$$\theta_k^{(0)}(f) = f' - \frac{k}{12} E_2 f$$

は Serre の作用素とも呼ばれることのある作用素で，重さ k のモジュラー形式を重さ $k+2$ のモジュラー形式にうつす．また，$r=1$ のとき

$$\theta_k^{(1)}(f) = f'' - \frac{k+1}{6} E_2 f' + \frac{k(k+1)}{12} E_2' f$$

で，これはもともと考えていた微分方程式 $(\sharp)_k$ の左辺に他ならない．この作用素は一般に

$$f \in QM_{k+n}^{(n)} \quad \text{ならば} \quad \theta_k^{(r)}(f) \in QM_{k+n+2(r+1)}^{(n)} \quad (\forall n \geq 0)$$

という性質を持つ (普通は微分すると深さが増大する)．とくに

$$f \text{ が重さ } k \text{ のモジュラー形式ならば } \theta_k^{(r)}(f) \text{ は重さ } k+2(r+1) \text{ のモジュラー形式}$$

が成り立つ． これだけでは $\theta_k^{(r)}$ は特徴付けられないが，$r=0,1$ の場合の自然な拡張として何かよい特徴づけはないものかと考えている．

次が定理 1 に対応する，深さ 2 の場合の ex-qmf の記述である．

多項式 $P_n(x), Q_n(x), R_n(x)$ を初期値

$$
\begin{aligned}
&P_0(x)=0, \quad P_1(x)=-120, \quad P_2(x)=-420x,\\
&Q_0(x)=0, \quad Q_1(x)=0, \quad Q_2(x)=-420,\\
&R_0(x)=1, \quad R_1(x)=0, \quad R_2(x)=0,
\end{aligned}
$$

漸化式は共通の

$$
\begin{aligned}
&P_{n+1}(x)=a_nxP_n(x)+b_nx^2P_{n-1}(x)+c_nP_{n-2}(x) \quad (n\geq 2),\\
&Q_{n+1}(x)=a_nxQ_n(x)+b_nx^2Q_{n-1}(x)+c_nQ_{n-2}(x) \quad (n\geq 2),\\
&R_{n+1}(x)=a_nxR_n(x)+b_nx^2R_{n-1}(x)+c_nR_{n-2}(x) \quad (n\geq 2),
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
a_n &= 16n^3-20n^2+2n-1,\\
b_n &= -(4n-9)(4n-1)(2n-1)^2(n-1)^2,\\
c_n &= 8(4n-13)(4n-9)(4n-7)(4n-5)(4n-1)(2n-3)^2(2n-1)^2,
\end{aligned}
$$

で定義する．このとき

<u>**定理 2**</u>　$k=4n$ $(n=0,1,2,\ldots)$ とする．このとき

$$
\sqrt[3]{\Delta(\tau)}^{\,n-1}P_n\Big(\frac{E_4(\tau)}{\sqrt[3]{\Delta(\tau)}}\Big)\Big(-\frac{E_2'(\tau)}{24}\Big)+\sqrt[3]{\Delta(\tau)}^{\,n-2}Q_n\Big(\frac{E_4(\tau)}{\sqrt[3]{\Delta(\tau)}}\Big)\Big(-\frac{E_6'(\tau)}{504}\Big)+\sqrt[3]{\Delta(\tau)}^{\,n}R_n\Big(\frac{E_4(\tau)}{\sqrt[3]{\Delta(\tau)}}\Big)
$$

は重さ k, 深さ 2 の ex-qmf であり，微分方程式 $\theta^{(2)}_{k-2}(f)=0$, すなわち

$$
f'''-\frac{k}{4}E_2f''+\frac{k(k-1)}{4}E_2'f'-\frac{k(k-1)(k-2)}{24}E_2''f=0
$$

の解である．

<u>注意</u>　深さが 1 の場合，初めは微分方程式 $(\sharp)_k$ を主体に考えていたから ex-qmf の重さは $k+1$ としたのだが，ここでは ex-qmf の重さを k としているので微分方程式のインデックスは $k-2$ となっている．深さ 1 のとき ex-qmf の重さを k とすると $k\equiv 0 \bmod 6$ のとき満たす微分方程式は $\theta^{(1)}_{k-1}(f)=0$ である．

定理 1 では $E_6/\sqrt{\Delta}=\sqrt{j-1728}$, 定理 2 では $E_4/\sqrt[3]{\Delta}=\sqrt[3]{j}$ が現れた．これは何を意味しているのであろうか.

深さが 2 で重さが $2\equiv \bmod 4$ である ex-qmf は微分方程式

$$
\theta^{(2)}_{k-2}(f)+\frac{1}{20}\frac{E_4}{E_6}[E_4,f]_2^{(4,k-2)}-24(k-1)(k-3)\frac{\Delta}{E_6}f=0
$$

を満たすものと予想され，同じ方法で証明できるはずであるが，実行していない，

5．予想

深さが一般の ex-qmf についてはまだよく分からないが，実例を計算する限り常に存在し (正規化すると) 一意的のようである．その計算実験によって少なくとも次が予想される．

予想　深さ r, 重さ k の組 (r, k) が $(3, 0 \bmod 6)$ または $(4, 0 \bmod 12)$ のときの ex-qmf は微分方程式

$$\theta_{k-r}^{(r)}(f) = 0$$

の解であろう．($r = 1, 2$ について $(r, k) = (1, 0 \bmod 6), (2, 0 \bmod 4)$ のときこのようになっているというのが定理 1 i), 定理 2 である.)

$r \geq 5$ の ex-qmf は存在したとしても，どのような重さであれ $\theta_{k-r}^{(r)}(f) = 0$ の解にはならない．これは exponent の計算から導かれる． $r \leq 4$ が何らかの意味で特別らしいことは次の観察からも伺える．

予想　深さ ≤ 4 の正規化された ex-qmf の Fourier 係数は例外 E_2 (深さ 1, 重さ 2) を除きすべて正であろう． またこのとき係数の分母には常に $k-1$ 以下の素因子しか現れないだろう．

深さ 5 以上の場合は重さによって負係数が現れたり，分母に不規則に大きな素因子が現れたりする．この違いの拠って来たるところを明らかに出来ればよいと思う．[3] で調べたように，$r = 1$ のときの $\theta_k^{(1)}(f) = 0$ は $1/j(\tau)$ を (局所的な) 変数に取り直してやると超幾何微分方程式になり，解が超幾何級数で与えられる．$\theta_2^{(2)} = 0$ についても同様に解が超幾何級数 ${}_3F_2$ で書ける．ところが $r \geq 3$ になるとどうもそのようにはなってないようである． $r = 4$ まで類似の現象が起こっていることの説明は何を根拠にすればよいのか，模索状態である．

Fourier 係数が正であるということについて，先に例に挙げた重さ 6, 深さ 3 の形式は実際にその係数に意味がつく． すなわちその q^d の係数は

($\mathbf{C}$ 上) 種数 2 の曲線から種数 1 の曲線への d 次「単純被覆」の個数

である (Dijkgraaf [1], および [6] 参照)． 上の種数 2 を一般の g にしても同様の母関数は準モジュラー形式 (重さ $6g-6$) となるが，最早 extremal ではない． 従って別の対象を探さなければならないが，他の ex-qmf についても Fourier 係数に何らかの意味がつくのかはきわめて興味のあるところである．

参考文献

[1] R. Dijkgraaf, Mirror symmetry and elliptic curves, "The Moduli Space of Curves", Progress in Math. 129, Birkhauser, (1995), 149–163.

[2] 金子昌信, いくつかのモジュラー形式の零点をめぐって および ある微分方程式のモジュラー形式解について, 第 2 回保型形式周辺分野スプリングコンファレンス (2003. 2. 15–2. 19) 報告集, (2004).

[3] M. Kaneko and M. Koike, On modular forms arising from a differential equation of hypergeometric type, The Ramanujan J., vol. 7, (2003), 145–164.

[4] M. Kaneko and M. Koike, Quasimodular forms as solutions to a differential equation of hypergeometric type, Galois Theory and Modular Forms, (ed. K. Hashimoto, K. Miyake and H. Nakamura), Kluwer Academic Publishers, (2003), 329–336.

[5] M. Kaneko and N. Todaka, Hypergeometric modular forms and supersingular elliptic curves, Proceedings on Moonshine and related topics (J. Mckay and A. Sebbar ed.), CRM Proceedings and Lecture Notes, **30** (2002), 79–83.

[6] M. Kaneko and D. Zagier, A generalized Jacobi theta function and quasimodular forms, "The Moduli Space of Curves", Progress in Math. 129, Birkhauser, (1995), 165–172.

[7] M. Kaneko and D. Zagier, Supersingular j-invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 7 (1998), 97–126.

[8] D. Zagier, Modular forms and differential operators, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*, **104** (1994), 57–75.