多重 L 値について (On Multiple L-values)

荒川恒男 (立教大理)　　　金子昌信 (九州大数理)

0. 始めに

井原-金子-Zagier [IKZ] は, 多重 zeta 値の場合に, その 2 種類の shuffle 積（integral shuffle 積と series shuffle 積）を通して double shuffle relation を記述し, それでは多重 zeta 値の $\mathbb{Q}$-linear な関係式を得るのには不十分であるので, さらに Zeta regularization の手段を用いて Regularlized double shuffle relation を構成した. また, この関係を Derivation を用いて理解した.

ここでは, 多重 zeta 値の類似物として 2 種類の多重 L-値を, 一方は積分表示を持ち, 他方は Dirichlet 級数としての積と整合性のあるように導入する. この 2 種の多重 L-値を通して, [IKZ] の方法を真似て, double shuffle relation とその zeta 正規化を構成する.

1 多重 L-値の定義と性質

多重 L-値は Motivic な観点から Goncharov により, また邦人では, 秋山-江上-谷川-石川等により導入され研究されている. 重なるところもあるが, ここでは多重 zeta 値の拡張として, 2 種類 の多重 L 値を定義しよう.

正整数 m を固定し, $R = R_m := \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ とおく. $\mathcal{F}(R;\mathbb{C})$ を R 上の $\mathbb{C}$ 値関数の成す $\mathbb{C}$-ベクトル空間とする. 1 の原始 m 乗根を $\zeta = \zeta_m := \exp(2\pi i/m)$ とし, 各 $a \in R$ に対し関数 $\varphi_a \in \mathcal{F}(R;\mathbb{C})$ を

$$\varphi_a(x) = \zeta^{ax} \quad (x \in R).$$

で定義する. $\{\varphi_a\}$ $(a \in R)$ は $\mathcal{F}(R;\mathbb{C})$ の一組の基底を成す.

[**定義 (multiple L-values)**]　$f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{F}(R;\mathbb{C})$ と正整数 $k_1, \ldots, k_r$ に対し,

$$\begin{aligned} L_{Ш}(k_1,\ldots,k_r;f_1,\ldots,f_r) &= \sum_{n_1>n_2>\cdots>n_r>0} \frac{f_1(n_1-n_2)\cdots f_{r-1}(n_{r-1}-n_r)f_r(n_r)}{n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}}. \\ &= \sum_{\nu_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_r=1}^{\infty} \frac{f_1(\nu_1)f_2(\nu_2)\cdots f_r(\nu_r)}{(\nu_1+\cdots+\nu_r)^{k_1}(\nu_2+\cdots+\nu_r)^{k_2}\cdots(\nu_r)^{k_r}}. \end{aligned}$$

別の型の L-値も定義する.

$$L_*(k_1,\ldots,k_r;f_1,\ldots,f_r) = \sum_{n_1>n_2>\cdots>n_r>0} \frac{f_1(n_1)f_2(n_2)\cdots f_r(n_r)}{n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}}.$$

$k_1 \geq 2$ なら, これらの多重 L-値（右辺の無限級数）は収束する.
$k_1 = 1$ のときは, 次で定義する:

$$L_{Ш}(1, k_2, \ldots, k_r; f_1, \ldots, f_r) = \lim_{R\to\infty} \sum_{R>n_1>\cdots>n_r>0} \frac{f_1(n_1-n_2)\cdots f_{r-1}(n_{r-1}-n_r)f_r(n_r)}{n_1 n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}},$$

$$L_{*}(1, k_2, \ldots, k_r; f_1, \ldots, f_r) = \lim_{R\to\infty} \sum_{R>n_1>\cdots>n_r>0} \frac{f_1(n_1)f_2(n_2)\cdots f_r(n_r)}{n_1 n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}}.$$

$r=1$ の場合は, $L_{Ш}(k,f) = L_*(k,f)$. $k_1 = 1$ の場合の収束条件を与えておくことは以下の議論で大切である. 各 $f \in \mathcal{F}(R;\mathbb{C})$ のフーリエ展開は

$$f(x) = \sum_{a\in R} \widehat{f}(a)\zeta^{ax} \qquad \text{with} \quad \widehat{f}(a) = \frac{1}{m}\sum_{y\in R} f(y)\zeta^{-ay}$$

で与えられる.

Proposition 1 $k_1 = 1$ かつ $\widehat{f_1}(0) = 0$ (すなわち $\sum_{y\in R} f_1(y) = 0$) とする. このとき $L_{Ш}(1, k_2, \ldots, k_r; f_1, \ldots, f_r)$ と $L_*(1, k_2, \ldots, k_r; f_1, \ldots, f_r)$ は収束する.

証明は Abel の級数総和法に基づく.
二つの $L_{Ш}$-値と L_*-値はお互いに $\mathbb{Q}$-線形結合として書ける.

Proposition 2 (i) $k_1 = 1$ のときは $\widehat{f_1}(0) = 0$ とする.

$$L_*(k_1, \ldots, k_r; f_1, \ldots, f_r) = \sum_{a_1,\ldots,a_r\in R} \widehat{f_(}(a_1)\cdots\widehat{f_r}(a_r) L_{Ш}(k_1, \ldots, k_r; \varphi_{a_1}, \varphi_{a_1+a_2}, \ldots, \varphi_{a_1+\cdots+a_r}),$$

$$L_{Ш}(k_1, \ldots, k_r; f_1, \ldots, f_r) = \sum_{a_1,\ldots,a_r\in R} \widehat{f_(}(a_1)\cdots\widehat{f_r}(a_r) L_*(k_1, \ldots, k_r; \varphi_{a_1}, \varphi_{a_2-a_1}, \ldots, \varphi_{a_r-a_{r-1}}).$$

(ii) とくに $a_1, \ldots, a_r \in R$, $a_1 \neq 0$ に対し,

$$L_*(k_1, \ldots, k_r; \varphi_{a_1}, \ldots, \varphi_{a_r}) = L_{Ш}(k_1, \ldots, k_r; \varphi_{a_1}, \varphi_{a_1+a_2}, \ldots, \varphi_{a_1+\cdots+a_r}),$$

$$L_{Ш}(k_1, \ldots, k_r; \varphi_{a_1}, \ldots, \varphi_{a_r}) = L_*(k_1, \ldots, k_r; \varphi_{a_1}, \varphi_{a_2-a_1}, \ldots, \varphi_{a_r-a_{r-1}}).$$

簡潔に

$$L_{Ш}(\mathbf{k};\mathbf{a}) = L_{Ш}(k_1, \ldots, k_r; a_1, \ldots, a_r) := L_{Ш}(k_1, \ldots, k_r; \varphi_{a_1}, \ldots, \varphi_{a_r})$$

などと書く. $(\mathbf{k};\mathbf{a}) = (k_1, \ldots, k_r; a_1, \ldots, a_r)$ を MLV の index set という. $a_1 = \cdots = a_r = 0$ のときが, 多重 zeta 値である.

$$L_{Ш}(k_1, \ldots, k_r; 0, \ldots, 0) = L_*(k_1, \ldots, k_r; 0, \ldots, 0) = \zeta(k_1, \ldots, k_r).$$

$L_{ш}$-値は積分表示と相性がいい. $|\varepsilon_j| \le 1$ $(1 \le j \le n)$, $\varepsilon_1 \ne 1$, $\varepsilon_n \ne 0$ なる $\varepsilon_j \in \mathbb{C}$ に対し

$$I(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = \int\cdots\int_{1>t_1>\cdots>t_n>0} A_{\varepsilon_1}(t_1)A_{\varepsilon_2}(t_2)\cdots A_{\varepsilon_n}(t_n)\, dt_1\cdots dt_n \quad \text{(Drinfeld 積分)}$$

が与えられる. ただし

$$A_0(t) = \frac{1}{t} \qquad \text{and} \quad A_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon t} \quad (\varepsilon \ne 0,\ |\varepsilon| \le 1).$$

とする. この記号の下で

$$L(k_1, \ldots, k_r; a_1, \ldots, a_r) = I(\underbrace{0, \ldots, 0, \zeta^{a_1}}_{k_1}, \underbrace{0, \ldots, 0, \zeta^{a_2}}_{k_2}, \ \ldots\ , \underbrace{0, \ldots, 0, \zeta^{a_r}}_{k_r}).$$

ここで注目すべきことは, 2 つの Drinfeld 積分の積はまた Drinfeld 積分の $\mathbb{Q}$-線形結合で書ける（integral shuffle 積）ので

- $L_{ш}$-値の積は $L_{ш}$-値の $\mathbb{Q}$-線形結合で書ける. 積のルールは integral shuffle 積で記述される.

例: $\quad L(1,a)^n = n!L(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, a, \ldots, a) \quad a \in R,\ a \ne 0$

2. Double shuffle relations (代数的定式化)

各 $a \in R$ に変数 y_a を準備し $m+1$ 変数の非可換多項式環 $\mathcal{A} := \mathbb{Q}\langle x,\, y_a\,(a \in R_m)\rangle$ とその部分代数 $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_0$ を考える:

$$\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_1 = \mathbb{Q} + \sum_{a\in R_m} \mathcal{A}y_a \supset \mathcal{A}_0 = \mathbb{Q} + \sum_{a \in R_m} x\mathcal{A}y_a + \sum_{a,\, b\in R_m,\, b\ne 0} y_b\mathcal{A}y_a.$$

m を特記する必要のあるときは $\mathcal{A}^{(m)}$, $\mathcal{A}_1^{(m)}$, $\mathcal{A}_0^{(m)}$ と記す. m' を m の約数とし $\ell = m/m'$ とおく. $\mathcal{A}^{(m')}$ は自然に, monomial の対応

$$x^{k_1-1}y_{b_1}x^{k_2-1}y_{b_2}\cdots x^{k_n-1}y_{b_n} \longmapsto x^{k_1-1}y_{\ell b_1}x^{k_2-1}y_{\ell b_2}\cdots x^{k_n-1}y_{\ell b_n},$$

によって $\mathcal{A}^{(m)}$ に埋め込まれる. ただし $(b_1, \ldots, b_n) \in R_{m'}^n$ であり, $(\ell b_1, \ldots, \ell b_n)$ は R_m^n の元とみなされる. この埋め込みにより $\mathcal{A}^{(m')}$ は $\mathcal{A}^{(m)}$ の部分代数になる. $m=1$ のときが多重 zeta 値の場合で $\mathfrak{h} = \mathcal{A}^{(1)}$, $\mathfrak{h}_1 = \mathcal{A}_1^{(1)}$, $\mathfrak{h}_0 = \mathcal{A}_0^{(1)}$ と記す.

法 m の場合に戻る. index set $(\mathbf{k}, \mathbf{a}) = (k_1, \ldots, k_r, a_1, \ldots, a_r)$ は $k_1 \ge 2$ または $k_1 = 1$ and $a_1 \ne 0$ のとき, admissible と呼ばれる. 2 種類の多重 L-値を利用して $\mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ の写像 $\mathcal{L}_{ш}$, $\mathcal{L}_*$ を次で定義する:

$$\mathcal{L}_{ш}(x^{k_1-1}y_{a_1}\cdots x^{k_n-1}y_{a_n}) = L_{ш}(k_1, \ldots, k_r; a_1, \ldots, a_r)$$

$$\mathcal{L}_*(x^{k_1-1}y_{a_1}\cdots x^{k_n-1}y_{a_n}) = L_*(k_1, \ldots, k_r; a_1, \ldots, a_r)$$

とし $\mathbb{Q}$-線形に $\mathcal{A}_0$ まで延長する. 次の 3 点が肝要.

($\star$1) $L_{\text{ш}}(\mathbf{k},\mathbf{a})$ には **integral shuffule 積** があり, それを通して $\mathcal{A}_0$ 上に, さらにもっと広く $\mathcal{A}$ 上に shuffle 積 ш を定義できる. このとき積の定義から

$$\mathcal{L}_{\text{ш}}(w_1 \text{ш}\, w_2) = \mathcal{L}_{\text{ш}}(w_1)\mathcal{L}_{\text{ш}}(w_2) \quad (\forall w_1,\ w_2 \in \mathcal{A}_0).$$

($\star$2) $L_*(\mathbf{k},\mathbf{a})$ には **series shuffule 積** がある. 例えば admissible index sets (k_1, a_1), (k_2, a_2) に対し

$$L_*(k_1, a_1)L_*(k_2, a_2) = L_*(k_1, k_2; a_1, a_2) + L_*(k_1 + k_2, a_1 + a_2) + L_*(k_2, k_1; a_2, a_1).$$

series shuffule 積 を通して $\mathcal{A}_0$ 上に, harmonic 積 $*$ を定義でき $\mathcal{A}_1$ まで自然に延ばせる (Hoffman). 上の関係は

$$x^{k_1-1}y_{a_1} * x^{k_2-1}y_{a_2} = x^{k_1-1}y_{a_1}x^{k_2-1}y_{a_2} + x^{k_1+k_2-1}y_{a_1+a_2} + x^{k_2-1}y_{a_2}x^{k_1-1}y_{a_1}$$

と記述される. このとき

$$\mathcal{L}_*(w_1 * w_2) = \mathcal{L}_*(w_1)\mathcal{L}_*(w_2) \quad (\forall w_1,\ w_2 \in \mathcal{A}_0).$$

($\star$3) $L_{\text{ш}}$-値と L_*-値の間の関係を通して, 写像 $\mathcal{L}_{\text{ш}}$ と $\mathcal{L}_*$ の間には simple な関係

$$\mathcal{L}_*(w_0) = \mathcal{L}_{\text{ш}}(I(w_0)) \quad \forall w_0 \in \mathcal{A}_0 \quad (\text{namely } \mathcal{L}_* = \mathcal{L}_{\text{ш}} \circ I \text{ on } \mathcal{A}_0)$$

がある. ただし $I : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_1$ は

$$I(x^{k_1-1}y_{a_1}x^{k_2-1}y_{a_2}\cdots x^{k_n-1}y_{a_n}) = x^{k_1-1}y_{a_1}x^{k_2-1}y_{a_1+a_2}\cdots x^{k_1-1}y_{a_1+\cdots+a_n}$$

を $\mathbb{Q}$-線形に延ばして得られる $\mathbb{Q}$-線形な可逆写像である.

上記 ($\star$1) $\sim$ ($\star$3) により

Proposition 3 (finite double shuffle relation) 任意の $w_1,\ w_2 \in \mathcal{A}_0$ に対し

$$\mathcal{L}_{\text{ш}}(I(w_1)\text{ш}\, I(w_2) - I(w_1 * w_2)) = 0.$$

この命題がどんなことをしているのかみておこう.

例. admissible index sets (k_1, a_1), (k_2, a_2) に対し

$$L_{\text{ш}}(k_1, a_1)L_{\text{ш}}(k_2, a_2) =$$
$$\sum_{j=0}^{k_2-1}\binom{k_1-1+j}{j}L_{\text{ш}}(k_1+j, k_2-j; a_1, a_2) + \sum_{j=0}^{k_1-1}\binom{k_2-1+j}{j}L_{\text{ш}}(k_2+j, k_1-j; a_2, a_1).$$

一方左辺は

$$L_*(k_1, a_1)L_*(k_2, a_2) = L_*(k_1, k_2; a_1, a_2) + L_*(k_1 + k_2, a_1 + a_2) + L_*(k_2, k_1; a_2, a_1)$$

$$= L_{\text{ш}}(k_1, k_2; a_1, a_1 + a_2) + L_{\text{ш}}(k_1 + k_2, a_1 + a_2) + L_{\text{ш}}(k_2, k_1; a_2, a_1 + a_2)$$

これより右辺が等しく

$$\sum_{j=0}^{k_2-1}\binom{k_1-1+j}{j}L_{\text{ш}}(k_1+j,k_2-j;a_1,a_2)+\sum_{j=0}^{k_1-1}\binom{k_2-1+j}{j}L_{\text{ш}}(k_2+j,k_1-j;a_2,a_1)$$
$$=L_{\text{ш}}(k_1,k_2;a_1,a_1+a_2)+L_{\text{ш}}(k_1+k_2,a_1+a_2)+L_{\text{ш}}(k_2,k_1;a_2,a_1+a_2).$$

この例で $k_1=1$, $a_1=0$ の場合は admissible でないので, 左辺が収束せず扱えないが, 実際には, 最後の等式は発散する部分が打ち消しあって, 次が成立する.

$$(1)\quad \sum_{j=1}^{k_2-1}L_{\text{ш}}(j+1,k_2-j;0,a_2)+L_{\text{ш}}(k_2,1;a_2,0)=L_{\text{ш}}(1+k_2,a_2)+L_{\text{ш}}(k_2,1;a_2,a_2).$$

こういうことを一般的に定式化したのが, 次の Zeta Reguralization である.

3. Zeta regularization と double shuffle relations

Double shuffle relations を $\mathcal{A}_1$ まで拡張したい. 以下の議論は, 井原-金子-Zagier 氏の方法 [IKZ] を真似たものである.

部分代数 $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ は shuffle 積 ш で閉じているので, 積 ш を考えるときは $\mathcal{A}_0^{\text{ш}}$, $\mathcal{A}_1^{\text{ш}}$ と記す. このとき $\mathcal{A}_1^{\text{ш}}=\mathcal{A}_0^{\text{ш}}[y_0]$ となるので, これにより, 次の条件をみたすように $\mathcal{L}_{\text{ш}}:\mathcal{A}_0^{\text{ш}}\longrightarrow\mathbb{C}$ を $\widehat{\mathcal{L}}_{\text{ш}}:\mathcal{A}_1^{\text{ш}}\longrightarrow\mathbb{C}[T]$ に自然にに拡張することができる:

(i) $\widehat{\mathcal{L}}_{\text{ш}}\Big|_{\mathcal{A}_0^{\text{ш}}}=\mathcal{L}_{\text{ш}}$.　　　(ii) $\widehat{\mathcal{L}}_{\text{ш}}(y_0)=T$.

(iii) $\widehat{\mathcal{L}}_{\text{ш}}$ は積 ш に関して代数準同型.

harmonic 積 $*$ に関しても, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ は, 積 $*$ で閉じているので, 積 $*$ を考えるときは $\mathcal{A}_0^*$, $\mathcal{A}_1^*$ と記す. このとき同様に, 次の条件をみたすように $\mathcal{L}_*:\mathcal{A}_0^*\longrightarrow\mathbb{C}$ を $\widehat{\mathcal{L}}_*:\mathcal{A}_1^*\longrightarrow\mathbb{C}[T]$ に自然にに拡張することができる:

(i) $\widehat{\mathcal{L}}_*\Big|_{\mathcal{A}_0^*}=\mathcal{L}_*$.　　　(ii) $\widehat{\mathcal{L}}_*(y_0)=T$.

(iii) $\widehat{\mathcal{L}}_*$ は積 $*$ に関して代数準同型.

[IKZ] に従って $\mathbb{R}$-線形写像 $\rho:\mathbb{C}[T]\longrightarrow\mathbb{C}[T]$ を次で定義する. 冪級数 $A(u)$ を

$$A(u)=\exp\Big(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\zeta(n)u^n\Big)$$

で定義し,

$$\rho(e^{Tu})=A(u)e^{Tu}$$

として定める.

Theorem 4 ($m=1$ のとき **[IKZ]**)　次が成立する.

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\text{ш}}\circ I=\rho\circ\widehat{\mathcal{L}}_*\quad on\ \mathcal{A}_1\qquad\Big(\mathcal{L}_{\text{ш}}\circ I=\mathcal{L}_*\ on\ \mathcal{A}_0\ \text{の拡張}\Big)$$

例　$w=y_0y_a$ $(a\in R_m,\ a\neq 0)$ とする．$y_0*y_a=y_0y_a+y_ay_0+xy_a$ より

$$y_0y_a=y_0*y_a-(y_ay_0+xy_a),\qquad y_ay_0+xy_a\in\mathcal{A}_0.$$

これから

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{L}}_*(y_0y_a) &= TL_*(1,a)-(L_*(1,1,a,0)+L_*(2,a))\\ &= TL_{ш}(1,a)-(L_{ш}(1,1,a,a)+L_{ш}(2,a))\end{aligned}$$

一方 $y_0y_a=y_0 ш\, y_a-y_ay_0$ だから

$$\widehat{\mathcal{L}}_{ш}\big(I(y_0y_a)\big)=\widehat{\mathcal{L}}_{ш}(y_0y_a)=TL_{ш}(1,a)-L_{ш}(1,1,a,0).$$

$\rho(1)=1,\ \rho(T)=T$ だから　比較して

$$L_{ш}(1,1,a,a)+L_{ш}(2,a)=L_{ш}(1,1,a,0).$$

これは (1) 式で, 形式的に $k_2=1$ としたものである．

実は定理 4 が Regularlized double shuffle relations と同値である．もっと強く次が成り立つ．そのために必要な記号を用意する．
$\mathrm{reg}_{ш}^T:\mathcal{A}_{ш}^1=\mathcal{A}_{ш}^0[y_0]\longrightarrow\mathcal{A}_{ш}^0[T]$ を $\mathcal{A}_{ш}^0$ 上恒等写像で, $y_0\mapsto T$ なる代数準同型として定義される写像とする．さらに $\mathrm{reg}_{ш}:\mathcal{A}_{ш}^1\longrightarrow\mathcal{A}_{ш}^0$ を $w\longmapsto\mathrm{reg}_{ш}^T(w)\Big|_{T=0}$ で定義する．

Theorem 5 ($m=1$ のときは [IKZ])　次の 5 条件は同値で成立する．

(i) $\big(\widehat{\mathcal{L}}_{ш}\circ I-\rho\circ\widehat{\mathcal{L}}_*\big)(w)=0$ *for* $\forall w\in\mathcal{A}_1$.

(ii) $\big(\widehat{\mathcal{L}}_{ш}\circ I-\rho\circ\widehat{\mathcal{L}}_*\big)(w)\Big|_{T=0}=0$ *for* $\forall w\in\mathcal{A}_1$.

(iii) $\widehat{\mathcal{L}}_{ш}\big(I(w_1) ш\, I(w_0)-I(w_1*w_0)\big)=0$ *for* $\forall w_1\in\mathcal{A}_1,\ \forall w_0\in\mathcal{A}_0$.

(iv) $\mathcal{L}_{ш}\Big(\mathrm{reg}_{ш}\big(I(w_1) ш\, I(w_0)-I(w_1*w_0)\big)\Big)=0$ *for* $\forall w_1\in\mathcal{A}_1,\ \forall w_0\in\mathcal{A}_0$.

(v) $\mathcal{L}_{ш}\Big(\mathrm{reg}_{ш}\big(I(y_0^m*w_0)\big)\Big)=0$ *for* $\forall m\geq 1,\ \forall w_0\in\mathcal{A}_0$.

証明は, 写像 I が関わる箇所に注意すれば [IKZ] に同様である．

admissible とは限らない index $(\mathbf{k},\mathbf{a})=(k_1,\ldots,k_n;a_1,\ldots a_n)$ に対し Dirichlet 級数

$$L_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(s)=\sum_{m_1>m_2>\cdots>m_n>0}\frac{\varphi_{a_1}(m_1-m_2)\cdots\varphi_{a_{n-1}}(m_{n-1}-m_n)\varphi_{a_n}(m_n)}{m_1^{k_1+s}m_2^{k_2}\cdots m_n^{k_n}}$$

は $\mathrm{Re}(s)>0$ で絶対収束し, $(\mathbf{k},\mathbf{a})$ が admissible ならば, 勿論, $L_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(s)$ は $s=0$ で正則で

$$L_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(0)=L_{ш}(\mathbf{k},\mathbf{a}).$$

興味深いことに, 関数 $\Gamma(s+1)L_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(s)$ の極 $s=0$ での主要部は多項式

$$\mathcal{L}_{\mathbf{k},\mathbf{a}}^{ш}(T):=\widehat{\mathcal{L}}_{ш}\left(x^{k_1-1}y_{a_1}\cdots x^{k_n-1}y_{a_n}\right)$$

で完全に記述される．

Proposition 6 多項式 $\mathcal{L}^{ш}_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(T)$ を $\mathcal{L}^{ш}_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(T)=\sum_{\ell=0}^{\nu}\dfrac{b_\ell}{\ell!}T^\ell$ と表す. このとき, 関数 $\Gamma(s+1)L_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(s)$ の極 $s=0$ での主要部は次で与えられる:

$$\Gamma(s+1)L_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(s)=\sum_{\ell=0}^{\nu}\frac{b_\ell}{s^\ell}+O(s).$$

例 $(\mathbf{k},\mathbf{a})=(\underbrace{1,\ldots,1}_{r},0,\ldots,0)$ の場合を考える. 対応する word は y_0^r である. このとき

$$y_0^r=\frac{1}{r!}\underbrace{y_0ш\ldots ш y_0}_{r}$$

であるので

$$\mathcal{L}^{ш}_{(\underbrace{1,\ldots,1}_{r},0,\ldots 0)}=\widehat{\mathcal{L}}_{ш}(y_0^r)=\frac{T^r}{r!}$$

上記命題により

$$\Gamma(s+1)L_{(\underbrace{1,\ldots 1}=r,0,\ldots 0)}(s)=\frac{1}{s^r}+O(s)$$

これは zeta 関数に戻すと

$$\Gamma(s+1)\sum_{n_1>\cdots>n_r>0}\frac{1}{n_1^{1+s}n_2\cdots n_r}=\frac{1}{s^r}+O(s). \tag{2}$$

を意味する. この結果については [AK] 参照. 実は, 上記命題の証明には (2) の $s=0$ での主要部の表示を用いる.

Remarks. (i) $m=1$ (多重 zeta 値) の場合は, Theorem 4 は, $\mathfrak{h}$ 上の Derivation の言葉に [IKZ] により翻訳されている. すなわち

$$\sum_{m=0}^{\infty}\mathrm{reg}_{ш}(y_0^m*w_0)u^m=\exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\partial_n}{n}u^n\Big)(w_0)\quad (w_0\in\mathfrak{h}_0)$$

をみたす $\mathfrak{h}$ 上の Derivation ∂_n が特徴付けられている.

(ii) 多重 zeta 値の場合は duality という線型関係が存在し,

$$\tau:\mathfrak{h}\longrightarrow\mathfrak{h}\qquad(\tau(x)=y_0,\ \tau(y_0)=x)$$

で定まる anti-involution τ が duality relation や Ohno 関係式の記述に重要な役割を果たした. 多重 L-値の場合には, 現在のところ duality theorem が作られていない.

(iii) p を奇素数とし χ_1,χ_2 を, 法 p の原始的 Dirichlet 指標とする. $L_*(k_1,k_2,\chi_1,\chi_2)$ を $L_ш$-値 $L_ш(k_1,k_2,\psi_1,\psi_2)$ で表そうとすると, 次の和が現れる:

$$F(\chi_1,\chi_2;x):=\sum_{\substack{u \bmod p\\ u\not\equiv 0,1 \bmod p}}\chi_1(u)\chi_2(1-u)\zeta^{ux},\qquad(\zeta=e^{2\pi i/p}).$$

金子は $\chi = \left(\frac{*}{p}\right)$ (Legendre 記号) の場合に $F(\chi,\chi;x)$ のノルムを数値計算した. そこで

$$GJ(p) := \prod_{x=1}^{p-1} F(\chi,\chi;x)$$

とおいて, 計算例を数例挙げると

$$\begin{array}{ll}
GJ(11) = 23^2 & 23 = 2\cdot 11 + 1, \\
GJ(19) = 33023^2 & 33023 = 2\cdot 11\cdot 79\cdot 19 + 1 \\
GJ(37) = 1481^2\cdot 247901^2 & 1481 = 2^3\cdot 5\cdot 37 + 1,\ 247901 = 2^2\cdot 5^2\cdot 67\cdot 37 + 1 \\
GJ(43) = 3381251598559^2 & 3381251598559 = 2\cdot 3^2\cdot 4817\cdot 906901\cdot 43 + 1
\end{array}$$

(iv) multi-log 関数 $L_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(z)$ を

$$Li_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(z) = \sum_{m_1>m_2>\cdots>m_n>0} \frac{z^{m_1}\varphi_{a_1}(m_1-m_2)\cdots\varphi_{a_{n-1}}(m_{n-1}-m_n)\varphi_{a_n}(m_n)}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_n^{k_n}}$$

で定義すると $|z|<1$ で収束する. 形式的に

$$H_L(z) = \sum_{k_1,\ldots,k_n;\, a_1,\ldots,a_n} L_{\mathbf{k},\mathbf{a}}(z) X^{k_1-1}Y_{a_1}\cdots X^{k_n-1}Y_{a_n}$$

とおく. ここで $(\mathbf{k},\mathbf{a}) = (k_1,\ldots,k_n;\, a_1,\ldots,a_n)$ は, すべての index sets をわたるとする（$n\in\mathbb{N}$ も動く）. このとき形式的に

$$H_L'(z) = \frac{X}{z}H_L(z) + \sum_{a\in R_m}\frac{\zeta^a Y_a}{1-\zeta^a z}H_L(z).$$

References

[AK] Arakawa, T. and Kaneko, M.: Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions. Nagoya Math. J. **153** (1999), 189–209.

[IKZ] Ihara, K., Kaneko, M. and Zagier, D.: Derivation and double shuffule relations for multiple zeta values, preprint, 2001.