メタ・アーベル化とヤコビ和の普遍冪級数

九州大学大学院数理学研究院　金子昌信

1. 序

以下は主として，伊原先生のこの方面での最初の論文 [PGC] の紹介である．勿論それ以前の色々なお仕事や考えておられたことから導かれていったものに違いないであろうが，先生が代数多様体，とりわけ $\mathbf{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ の数論的基本群へのガロア表現について考えられるようになったのは，当時のノートや資料を見ると，1983 年の夏ごろからであると思われる．翌 1984 年 4 月から 6 月まで（多少の前後はあるかもしれない）シカゴに滞在され，帰国後の夏すぎくらいに [PGC] のプレプリントを公にされた． そして 10 月 25 日からの後期授業でその内容を講義された．当時私は修士課程の 2 年生で，修士論文の目途も立たず鬱々とした日々を送っていたものだが，憧れて勉強した志村ー谷山の虚数乗法やヴェイユの “Jacobi sums as Grössencharaktere” などを縦横に使うこの論文に飛びつき，貪り読んだ． それから丁度 20 年後にこの論文を紹介する役を依頼され引き受けることになったのは奇しき因縁と言えば大げさであろうか，感慨深いものを感じる. しかるに実際の紹介は単純に論文を追っていく位のことしか出来ず，私なりの独創的な紹介など出来得べくもないのは申し訳なくまた恥ずかしいことではある．伊原先生は常日頃「解説よりも原論文を」と言われた．解説の拙さを棚に上げるようだが，是非原論文を読んでいただきたい.

2. 設定

素数 ℓ を以下最後まで固定する．有理数体 $\mathbf{Q}$ の代数閉包を $\overline{\mathbf{Q}}$ とし，$\overline{\mathbf{Q}}$ 上の t を不定元とする有理関数体を $K = \overline{\mathbf{Q}}(t)$ とする． M を K 上 $t = 0, 1, \infty$ の外では不分岐な最大の pro-ℓ 拡大，その K 上のガロア群を $\mathfrak{F}$ とする：$\mathfrak{F} = \mathrm{Gal}\,(M/K)$. $\mathfrak{F}$ は階数 2 の自由 pro-ℓ 群と同型で，その位相的な生成元 $x, y, z,$ ただし $xyz = 1,$ として，それぞれが $t = 0, 1, \infty$ の上のある素点の惰性群の生成元となるようなものを取ることが出来る（p.51, Proposition 1, ページ数は [PGC] のもの，以下同様）．以下このような x, y, z を固定する．注意として，このとき自然に 1 の原始 ℓ^n 乗根 ζ_n の系 $(\zeta_n)_{n\ge1}$ で $\zeta_{n+1}^{\ell} = \zeta_n$ となるものが定まる（p.52 下段）．以下 ζ_n はこのように定まった 1 の原始 ℓ^n 乗根を表す.

さてガロア群の完全系列

$$1 \to \mathrm{Gal}\left(M/\overline{\mathbf{Q}}(t)\right) \to \mathrm{Gal}\left(M/\mathbf{Q}(t)\right) \to \mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbf{Q}}(t)/\mathbf{Q}(t)\right) \to 1$$

と同型 $\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbf{Q}}(t)/\mathbf{Q}(t)\right) \simeq \mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}\right)$ により，$\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}\right)$ の元 ρ に対しその一つの延長 $\rho^* \in \mathrm{Gal}\left(M/\mathbf{Q}(t)\right)$ をとり，ρ^* による共役で与えられる $\mathfrak{F}$ の同型写像

$$\mathfrak{F} = \mathrm{Gal}\left(M/\overline{\mathbf{Q}}(t)\right) \ni g \mapsto \rho^* g \rho^{*-1} \in \mathfrak{F}$$

を考えると，延長 ρ^* の取り方の自由度は $\mathfrak{F}$ の内部自己同型による違いしか引き起こさないので，外部自己同型群への準同型

$$\begin{array}{rcl}\varphi_{\mathbf{Q}} : \mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}\right) & \longrightarrow & \mathrm{Out}(\mathfrak{F}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{F})/\mathrm{Int}(\mathfrak{F}) \\ \varphi_{\mathbf{Q}}(\rho) & = & \{g \mapsto \rho^* g \rho^{*-1}\}\end{array}$$

を得る． これが考えるべき基本的な表現である．

このとき次が成り立つ（[PGC] pp.52–53）．

<u>定理 1</u>　i)　$\varphi_{\mathbf{Q}}$ の像は

$$\Phi := \left\{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{F}) \,\middle|\, \exists\alpha \in \mathbf{Z}_\ell^\times, \sigma x \sim x^\alpha, \sigma y \sim y^\alpha, \sigma z \sim z^\alpha\right\} / \mathrm{Int}(\mathfrak{F})$$

に入る.（$\sim$ は $\mathfrak{F}$ における共役を表す.）

またφ $\varphi_{\mathbf{Q}}(\rho) \leftrightarrow \alpha$ のとき，$\alpha = \chi(\rho)$:円分指標，である.（円分指標とは，$\zeta_n^\rho = \zeta_n^{\chi(\rho)}, \forall n$ で定まる準同型 $\varphi_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{Z}_\ell^\times$ のこと.）

ii)　$\varphi_{\mathbf{Q}}$ は ℓ の外で不分岐.

ii) については松本さんの稿を参照.

$\mathrm{Out}(\mathfrak{F})$ で考えるのは何かと不便なのだが，この Φ には $\mathrm{Aut}(\mathfrak{F})$ への都合のよい持ち上げ (Belyĭ lifting とよばれる)

$$\Phi^* := \left\{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{F}) \,\middle|\, \exists\alpha \in \mathbf{Z}_\ell^\times, \sigma x \sim x^\alpha, \sigma y \approx y^\alpha, \sigma z = z^\alpha\right\}$$

が存在する. ここに $\approx$ は $\mathfrak{F}$ の（位相的）交換子群 $\mathfrak{F}' = [\mathfrak{F}, \mathfrak{F}]$ の元による共役を表す.

3. メタアーベル化，構造定理

さて，[PGC] においてはすべてを $\mathfrak{F}$ の二重交換子群 $\mathfrak{F}'' = [\mathfrak{F}', \mathfrak{F}']$ で割ったレベルで考える. つまりガロア表現

$$\psi_{\mathbf{Q}} : \mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}\right) \longrightarrow \Psi := \left\{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{F}/\mathfrak{F}'') \,\middle|\, \exists\alpha \in \mathbf{Z}_\ell^\times, \sigma x \sim x^\alpha, \sigma y \sim y^\alpha, \sigma z \sim z^\alpha\right\} / \mathrm{Int}(\mathfrak{F}/\mathfrak{F}'')$$

とその Belyĭ の持ち上げ

$$\psi^*_{\mathbf{Q}} : \mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}\right) \longrightarrow \Psi^* := \left\{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{F}/\mathfrak{F}'') \,\middle|\, \exists\alpha \in \mathbf{Z}_\ell^\times, \sigma x \sim x^\alpha, \sigma y \approx y^\alpha, \sigma z = z^\alpha\right\}$$

を考える．ここで，$x, y, z \bmod \mathfrak{F}''$ を x, y, z と書いている．また $\sim, \approx$ はそれぞれ $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}'', \mathfrak{F}'/\mathfrak{F}''$ の元による共役を表す.

[PGC] の主結果は，このガロア表現 $\psi^*_{\mathbf{Q}}$ を

- フェルマー曲線のヤコビアンの等分点へのガロア作用（虚数乗法論）

- 円単数のべき根へのガロア作用（岩澤理論）

によって記述したことである，と大雑把には言える．（あと $\pi_1(\mathbf{P}^1\setminus\{0,1,\infty\})$ へのガロア表現の基本的な枠組みを与えたこと．） これらを述べるために $\mathfrak{F}'/\mathfrak{F}''$ の構造，Ψ^* のより具体的な記述についてまず準備をする．

$\mathfrak{F}'/\mathfrak{F}''$ は $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}'$ の元による共役作用で $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}'$-加群となり，自然に完備群環 $\mathbf{Z}_\ell[[\mathfrak{F}/\mathfrak{F}']]$ 上の加群となる．x, y の作用をそれぞれ $1+u$ 倍，$1+v$ 倍と対応させることにより $\mathfrak{F}'/\mathfrak{F}''$ を

$$\mathcal{A}=\mathbf{Z}_\ell[[u,v]]\simeq\mathbf{Z}_\ell[[u,v,w]]/\left((1+u)(1+v)(1+w)-1\right)$$

上の加群と見る．u, v の作用はそれぞれ $g\mapsto[x,g]=xgx^{-1}g^{-1}, g\mapsto[y,g]$ である． 今後 $\mathcal{A}$ の元はしばしば $\mathbf{Z}_\ell[[u,v,w]]/\left((1+u)(1+v)(1+w)-1\right)$ の元とみなされる（その方が対称性があって都合のよいことが多い）．

$$\mathfrak{R}_n := x^{\ell^n}, y^{\ell^n}, z^{\ell^n} \text{ を含む } \mathfrak{F} \text{ の最小閉正規部分群}$$

とおくと，$\mathfrak{F}'\mathfrak{R}_n$ に対応する $K=\overline{\mathbf{Q}}(t)$ の拡大体が $K_n := K(t^{1/\ell^n},(1-t)^{1/\ell^n})$ で（$\mathrm{Gal}\,(K_n/K)\simeq\mathfrak{F}/\mathfrak{F}'\mathfrak{R}_n$） これはフェルマー曲線 X_n： $X^{\ell^n}+Y^{\ell^n}=Z^{\ell^n}$ の関数体，種数は $(\ell^n-1)(\ell^n-2)/2$． また $\mathfrak{F}''\mathfrak{R}_n$ に対応するのが K_n の最大不分岐 pro-ℓ アーベル拡大 K_n^{urab}，ガロア群 $\mathrm{Gal}\left(K_n^{urab}/K_n\right)$ は X_n のヤコビ多様体の ℓ べき等分点のテイト加群 $T_\ell(\mathrm{Jac}(X_n))$ と同型． また $K'=\bigcup_n K_n, K''=\bigcup_n K_n^{urab}$ がそれぞれ $\mathfrak{F}', \mathfrak{F}''$ と対応する．

<u>**定理 2**</u>　i)　$\mathfrak{F}'/\mathfrak{F}''$ は $[x,y]$ で生成される階数 1 の自由 $\mathcal{A}$-加群である．

ii)　$\mathfrak{F}'/\mathfrak{F}'\cap\mathfrak{F}''\mathfrak{R}_n$ は $[x,y]$ で生成される階数 1 の自由 $\mathcal{A}/\mathfrak{a}_n$ -加群である． ここに $\mathfrak{a}_n$ は次の元で生成される $\mathcal{A}$ のイデアル：

$$\alpha_n=\sum_{i=0}^{\ell^n-1}(1+u)^i,\quad \beta_n=\sum_{i=0}^{\ell^n-1}(1+v)^i,\quad \delta_n=\sum_{i=0}^{\ell^n-2}\sum_{j=0}^{i}(1+u)^i(1+v)^j.$$

（実はあとでこのイデアル $\mathfrak{a}_n$ は

$$\left\{F(u,v,w)\in\mathcal{A}\,|\,F(\zeta_n^a-1,\zeta_n^b-1,\zeta_n^c-1)=0,\forall a,b,c\in\mathbf{Z}/\ell^n\setminus\{0\},a+b+c=0\right\}$$

に等しいことが示される．）

証明には組み合わせ群論の Reidemeister-Schreier の方法を用いて，有限レベルの ii) を，$\mathbf{Z}_\ell$ 加群としての階数の計算から示し，それから i) を導く．

この定理が分かるとまず

$$\Psi_1^* := \Psi^* \text{の元で} \alpha=1 \text{ に取れるもののなす部分群（“ノルム 1” の部分）}$$

が次のように記述される．

$\sigma \in \Psi_1^*$ は $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}'$ に自明に作用するので，σ の引き起こす $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{F}'/\mathfrak{F}'')$ の元は $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}'$ の作用と可換，すなわち $\mathcal{A}$-自己同型になり，ある $\mathcal{A}^\times$ の元倍することとなる．つまり $\sigma[x,y] = F_\sigma[x,y]$ となる $F_\sigma \in \mathcal{A}^\times$ があり対応 $\Psi_1^* \ni \sigma \mapsto F_\sigma \in \mathcal{A}^\times$ は群準同型．

<u>**定理 3A**</u>　この $\sigma \mapsto F_\sigma$ により

$$\Psi_1^* \simeq 1 + uvw\mathcal{A}.$$

$\sigma x = sxs^{-1}$, $\sigma y = tyt^{-1}$ と書くと $s, t \in \mathfrak{F}'/\mathfrak{F}''$ とできて，$\sigma z = z$ より $sxs^{-1}tyt^{-1} = xy$. 定理は，Ψ_1^* の元とこのような $s, t \in \mathfrak{F}'/\mathfrak{F}''$ が一対一に対応することを示した上で $\sigma[x,y]$ を計算することにより示される．

一般の場合はさらに複雑な計算ののち，

<u>**定理 3B**</u>　$\sigma \mapsto (N(\sigma), F_\sigma)$ により

$$\Psi^* \simeq \Theta := \left\{(\alpha, F) |\ \alpha \in \mathbf{Z}_\ell^\times,\ F \in \mathcal{A}^\times,\ F \bmod uvw = \theta_\alpha\right\}.$$

ここに，$N(\sigma)$ は $\sigma x \sim x^\alpha$ となるときの α，F_σ は $\sigma[x,y] = F_\sigma[x,y]$ で定まる $\mathcal{A}$ の元，今度は $\sigma \mapsto F_\sigma$ は準同型にはならず（1-コサイクル），Θ に $(\alpha, F)\cdot(\beta, G) = (\alpha\beta, FG^{j_\alpha})$, j_α : $1+u \mapsto (1+u)^\alpha$, $1+v \mapsto (1+v)^\alpha$, $1+w \mapsto (1+w)^\alpha$ で群構造を入れて Ψ^* と Θ が群同型となる．また Θ の定義の中の θ_α は α で定まるある $\bmod\ uvw$ の類で，具体形はここでは省略する．

4. フェルマー曲線のヤコビアンの等分点への作用—値の公式

定理 3B で得られた同型により，ガロア表現

$$\psi_{\mathbf{Q}}^* :\ \mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}\right) \ni \rho \mapsto (\chi(\rho), F_\rho) \in \Theta \simeq \Psi^*$$

が得られた． $\chi(\rho)$ は円分指標で，F_ρ は $\rho^*[x,y]\rho^{*-1} = F_\rho \cdot [x,y]$ によって定まる $\mathcal{A}^\times$ の元．ここで ρ^* は ρ の $\mathrm{Gal}\,(M/\mathbf{Q}(t))$ への延長で，

$$\rho^* x \rho^{*-1} \sim x^{\chi(\rho)},\ \rho^* y \rho^{*-1} \approx y^{\chi(\rho)},\ \rho^* z \rho^{*-1} = z^{\chi(\rho)}$$

なるもの（一意的）． $\left\{\rho^* |\ \rho \in \mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}\right)\right\}$ に対応する M の部分体を M^* とおくと，$t, t-1$ の ℓ^n 乗根 $t_n, (t-1)_n$ で，$t_n, (t-1)_n \in M^*$ なるものが一意的に定まることが分かる（[PGC] pp.56–57）．

今，三つ組み (a,b,c) で $a,b,c \in \mathbf{Z}/\ell^n \setminus \{0\}$, $a+b+c=0$, 少なくとも二つは $\in (\mathbf{Z}/\ell^n)^\times$, なるものに対し，$X_n^{(a,b,c)}$ を，$\mathbf{Q}$ 上の完備非特異曲線で関数体 $\mathbf{Q}(t, t_n^{\langle a \rangle}(t-1)_n^{\langle b \rangle})$ をもつものとする． $a \in \mathbf{Z}/\ell^n$ に対し $\langle a \rangle = \langle a \rangle_n$ で $[0, \ell^n)$ における $a \bmod \ell^n$ の代表を表す．

この $X_n^{(a,b,c)}$ のヤコビ多様体 $\mathrm{Jac}(X_n^{(a,b,c)})$ の “primitive part” $A_n^{(a,b,c)}$ を次のように定義する．$s_n = t_n^{\langle a\rangle}(t-1)_n^{\langle b\rangle}$ とし，θ_n で $t \mapsto t$, $s_n \mapsto \zeta_n \cdot s_n$ が引き起こす $X_n^{(a,b,c)} \otimes \mathbf{Q}(\zeta_n)$ の自己同型写像を表し，対応する $\mathrm{Jac}(X_n^{(a,b,c)})$ の自己準同型も同じ θ_n で表す．このとき $\mathrm{Ker}(\theta_n^{\ell^{n-1}}-1)$ の原点の連結成分 $\mathrm{Ker}(\theta_n^{\ell^{n-1}}-1)^0$ は $\mathbf{Q}$ 上定義された $\mathrm{Jac}(X_n^{(a,b,c)})$ の部分アーベル多様体となる．そこで

$$A_n^{(a,b,c)} := \mathrm{Jac}(X_n^{(a,b,c)})/\mathrm{Ker}(\theta_n^{\ell^{n-1}}-1)^0$$

と定義すると，これは $\mathbf{Q}$ 上定義されたアーベル多様体で，$\zeta_n \mapsto \theta_n$ により準同型

$$i_n^{(a,b,c)} : \mathbf{Z}[\zeta_n] \longrightarrow \mathrm{End}\left(A_n^{(a,b,c)} \otimes \mathbf{Q}(\zeta_n)\right)$$

が得られる．第一種微分への作用を計算することにより，$A_n^{(a,b,c)}$ は $\mathbf{Q}(\zeta_n)$ を虚数乗法にもつ CM 型アーベル多様体で，その CM 型は

$$\left\{\sigma_{-k} \mid \ k \in (\mathbf{Z}/\ell^n)^\times,\ \langle ka\rangle_n + \langle kb\rangle_n + \langle kc\rangle_n = 2\ell^n\right\}$$

（σ_{-k} は $\zeta_n \mapsto \zeta_n^{-k}$ なる $\mathbf{Q}(\zeta_n)$ の自己同型）であることが分かる．

$K_n^{(a,b,c)} = K(t_n^{\langle a\rangle} \cdot (t-1)_n^{\langle b\rangle})$ とし，$L_n^{(a,b,c)}$ を $K_n^{(a,b,c)}$ の最大不分岐 pro-ℓ アーベル拡大とすると，自然な写像

$$\pi_n^{(a,b,c)} : \ \mathfrak{F}'/\mathfrak{F}'' \simeq \mathrm{Gal}\left(K''/K'\right) \longrightarrow \mathrm{Gal}\left(L_n^{(a,b,c)}/K_n^{(a,b,c)}\right) \simeq T_\ell(\mathrm{Jac}\left(X_n^{(a,b,c)}\right)) \longrightarrow T_\ell(A_n^{(a,b,c)})$$

があるので，これによる $[x,y]$ の $T_\ell(A_n^{(a,b,c)})$ における像を $[x,y]_n^{(a,b,c)}$ と書くことにする．

定理 4　$\rho \in \mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}\right)$ に対し $\psi_{\mathbf{Q}}^*(\rho) = (\chi(\rho), F_\rho) \in \Theta$ とするとき，

$$\rho \cdot [x,y]_n^{(a,b,c)} = F_\rho(\zeta_n^a - 1, \zeta_n^b - 1, \zeta_n^c - 1) \cdot [x,y]_n^{(a,b,c)}.$$

（左辺は $T_\ell(A_n^{(a,b,c)})$ へのガロア作用.）

一方で Weil によれば，このガロア作用はヤコビ和で記述されるのであった．すなわち，p を ℓ とは異なる素数とし，$\overline{p}$ を p の $\overline{\mathbf{Q}}$ へのある延長，$\rho(\overline{p}) \in \mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}\right)$ をそのフロベニウスとし，$\mathfrak{p}_n$ を $\overline{p}$ が定める $\mathbf{Z}[\zeta_n]$ の素イデアル，$\chi_{\mathfrak{p}_n}$ を付随する冪剰余指標とする．先の組 (a,b,c) に対しヤコビ和 $J_{\ell^n}^{(a,b,c)}(\mathfrak{p}_n)$ が

$$J_{\ell^n}^{(a,b,c)}(\mathfrak{p}_n) = -\sum_{x,y \in (\mathbf{Z}[\zeta_n]/\mathfrak{p}_n)^\times} \chi_{\mathfrak{p}_n}(x)^a \chi_{\mathfrak{p}_n}(y)^b$$

で定義される．このとき，

定理 7　記号は上の通りとし，p の $(\mathbf{Z}/\ell^n)^\times$ での位数を f とするとき，

$$J_{\ell^n}^{(a,b,c)}(\mathfrak{p}_n) = F_{\rho(\overline{p})^f}(\zeta_n^a - 1, \zeta_n^b - 1, \zeta_n^c - 1).$$

この定理故に冪級数 $F_\rho(u,v,w)$ は「ヤコビ和の普遍冪級数」と呼ばれる．この冪級数がもともと満たす mod uvw での合同式があるので，定理の系としてヤコビ和の合同式が得られる．

5. 円単数の冪根への作用—係数の公式

$\rho \in \mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}(\mu_{\ell^\infty})\right)$ に対する F_ρ の係数の公式が，まず [PGC] においては ρ が惰性群の元の場合に，後に [A], [C], [IKY] において一般に与えられた．

$$U_n := \left\{\varepsilon_n \in \mathbf{Q}_\ell(\mu_{\ell^n}) \,|\, N_{\mathbf{Q}_\ell(\mu_{\ell^n})/\mathbf{Q}_\ell}(\varepsilon_n) = 1,\ \varepsilon_n \equiv 1 \bmod\ \zeta_n - 1\right\}$$

とすると，局所類体論により標準的な準同型

$$[\mathrm{cl}]:\ \mathfrak{U} \longrightarrow \mathrm{Gal}\,(\Omega_\ell/\mathbf{Q}(\mu_{\ell^\infty}))$$

を得る．Ω_ℓ は ℓ の外で不分岐な $\mathbf{Q}(\mu_{\ell^\infty})$ の最大 pro-ℓ アーベル拡大． これと表現 $\psi^*_{\mathbf{Q}}$ の合成により写像

$$\psi_1^{\mathfrak{U}} : \mathfrak{U} \longrightarrow \Psi_1^* \simeq 1 + uvw\mathcal{A}$$

を得る．

一方 Coleman 冪級数というものがある．それは $\mathfrak{U}$ の各元 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ に対し定まる一変数冪級数 $f_\varepsilon(t) \in \mathbf{Z}_\ell[[t]]^\times$ で，$f_\varepsilon(\zeta_n - 1) = \varepsilon_n$ なる性質を持つ（f_ε は 1 の冪根の系 (ζ_n) の取り方に依存する）．対応 $\varepsilon \mapsto f_\varepsilon$ は $\mathbf{Z}_\ell^\times$ の作用と両立する群準同型．$T = \log(1+t)$ と変数変換し，

$$f_\varepsilon(t) = \exp\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi_m(\varepsilon)}{m!} T^m\right)$$

と書く．$\varphi_m \in \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{U}, \mathbf{Z}_\ell(m))$ で，Coates-Wiles 準同型と呼ばれる．

定理 10

$$\psi_1^{\mathfrak{U}}(\varepsilon) = \exp\left(\sum_{m\geq 3, odd} \frac{L_\ell(m, \omega^{1-m})\varphi_m(\varepsilon)}{m!}(-U^m - V^m - W^m)\right).$$

ここに，$L_\ell(s, \omega^{1-m})$ は ℓ-進 L 関数，ω は Teichmüller 指標，$U = \log(1+u), V = \log(1+v), W = \log(1+W)$.

証明は長く（論文の最後約 10 ページ），志村・谷山の虚数乗法，Coleman 冪級数の性質と計算，Stickelberger 元と ℓ-進 L 関数を結びつける岩澤の定理等，縦横に使ってなされる．

最後に定理 10 の global 版である [IKY] の定理を述べて終わる．

$\mathfrak{G} = \mathrm{Gal}\left(\Omega_\ell^{ab}/\mathbf{Q}(\mu_{\ell^\infty})\right)$ とおく．$m, n \geq 1$ に対し $\varepsilon_n^{(m)} = \prod_{a \in (\mathbf{Z}/\ell^n)^\times} (\zeta_n^a - 1)^{\langle a^{m-1}\rangle_n}$ とおき，$\chi_m(\rho)$ $(\rho \in \mathfrak{G})$ を

$$\zeta_n^{\chi_m(\rho)} = \left\{(\varepsilon_n^{(m)})^{1/\ell^n}\right\}^{\rho - 1},\ \forall n \geq 1$$

で定義すると，$\chi_m \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{G}, \mathbf{Z}_\ell(m))$ である．制限写像

$$\mathrm{Res}_m: \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{G}, \mathbf{Z}_\ell(m)) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{U}, \mathbf{Z}_\ell(m))$$

により χ_m を $\mathfrak{U}$ に制限すると

定理 (Coleman)

$$\mathrm{Res}_m(\chi_m) = (\ell^{m-1} - 1) L_\ell(m, \omega^{1-m}) \varphi_m \quad (m > 1).$$

従って Res_m が単射であることと $L_\ell(m, \omega^{1-m}) \neq 0$ は同値で（例えば ℓ が正則素数ならそうなる），もしこれがすべての m について成立しているなら，定理 10 により

$$\psi_1(\rho) = \exp\left(\sum_{m \geq 3, odd} \frac{(1 - \ell^{1-m})^{-1} \chi_m(\rho)}{m!} (U^m + V^m + W^m) \right)$$

となる．

定理 (Anderson, Coleman，Ihara-K.-Yukinari) 上の公式が無条件に任意の $\rho \in \mathfrak{G}$ に対し成り立つ.

各 m での Res_m の単射性は $L_\ell(m, \omega^{1-m}) \neq 0$ かという難しい問題になるが，母関数全体としては一種の単射性が成り立つことが言えるのである.

伊原先生はその後すぐに ρ が $\mathbf{Q}(\mu_{\ell^\infty})$ を固定しない場合にも F_ρ の上の形の係数公式を得ておられ，それは [ICM90] に述べられている.

1990 年に京都で行われた国際数学者会議（ICM）において先生はそれまでの成果を講演された．その報告集に載った [ICM90] において当時までの結果と関連文献を概観することが出来る．この ICM を機に次々と重要な進展が巻き起こっていったように思われる．私自身は 90 年代以降この方面の仕事をしておらず，文献などにも眼が行き届いていないため到底その後の発展を解説する任にない．他の方の稿に委ねたく思う.

参考文献

[A] G. Anderson, The hyperadelic gamma function, Invent. math., **95** (1989), 63–131.

[C] R. Coleman, Anderson-Ihara theory: Gauss sums and circular units, Adv. Stud. Pure Math., **17** (1989), 55–72.

[PGC] Y. Ihara, Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications, Ann. of Math. (2),**123** (1986), 43–106.

[ICM90] Y. Ihara, Braids, Galois groups, and some arithmetic functions, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990), 99–120.

[IKY] Y. Ihara, M. Kaneko and A. Yukinari, On some properties of the universal power series for Jacobi sums, Adv. Stud. Pure Math., **12** (1987), 65–86.