

いくつかのモジュラー形式の零点をめぐって および ある微分方程式のモジュラー形式解について*

九州大学大学院数理学研究院 金子昌信

集会でお話したことのうち、零点に関わりの深い部分を第 I 部として記し、その中で出てくるある微分方程式については別に稿を改めて記述することにした。従って私の報告集原稿は二部仕立てになっている。ただし文献表[†]は共通にした。

第 I 部 いくつかのモジュラー形式の零点をめぐって

10 年ばかり前に超特異楕円曲線の j 不変量という対象を通して Eisenstein 級数の零点に関する Rankin の仕事を知った。以来いくつかのモジュラー形式で、その零点に関し標数正、0 いずれにおいても Eisenstein 級数と共通の性質を持つものを学んだり、自ら発見したりして現象は蓄積されてきたが、さてそれにどういう意味があるかとなるとどうもはっきりしない。そもそも意味があるのやらないのやらも覚束ぬ。以下に記すのはその現象の集積であるが、これがどれだけ興味を惹くものであるか、事実の羅列に終始している嫌いはあるが、ともあれ何か新しい見方なりを発見する縁(よすが)にでもなれば幸いである。こういうことをまとめて話し記す機会は余りなかった。このたび発表の場を与えてくださった伊吹山さんに大いに感謝する次第である。

I-1. 記号と基本的事実のまとめ

最初に以下で用いる記号と事実をまとめておく。いずれも $SL_2(\mathbf{Z})$ の普通のモジュラー形式/関数についての標準的な記法、定理であるから、ざっと記号や定義だけ眺めてもらい、あとは必要に応じて参照いただければ結構かと思う。主な記号は初出時に で囲って探しやすくしておいた。詳しくはセール [24, 第 7 章][‡]参照。

k を 4 以上の偶数として、 $E_k(\tau)$ を Eisenstein 級数

$$E_k(\tau) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{c,d \in \mathbf{Z} \\ (c,d)=1}} \frac{1}{(c\tau + d)^k} \quad (\tau \in \mathfrak{H} = \text{上半平面})$$

とする。これは $SL_2(\mathbf{Z})$ に関する重さ k の正則モジュラー形式で、Fourier 展開の定数項が 1 になるように正規化したものである。Fourier 展開の具体形は次の通り:

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n \quad (B_k = \text{Bernoulli 数}, \sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}, \text{ } q = e^{2\pi i \tau}).$$

*第 2 回保型形式周辺分野スプリングコンファレンス (2003. 2. 15–2. 19) 報告集原稿

[†]本文中の文献引用は、現今標準的な文末にまとめる方式に加えて、逐一脚注もつけタイトル等を記す。これは、読みながら一々後ろを参照するのは面倒だが文献が何であるかも気になる、という自分のような人を念頭においての親切のつもりだが、脚注が煩わしいという方は無視されたい。以後文献以外に脚注はつけない。

[‡]数論講義, 岩波.

Jacobi の $\Delta(\tau)$

$$\Delta(\tau) := \frac{1}{1728}(E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \dots$$

は重さ 12 の尖点形式, 楕円モジュラー関数 $j(\tau)$

$$j(\tau) := \frac{E_4(\tau)^3}{\Delta(\tau)} = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \dots$$

は $SL_2(\mathbf{Z})$ 不変な \mathfrak{H} 上の正則関数で, 無限遠点 (尖点) に一位の極を持つ, いずれも慣用の記号. 大文字の $J(\tau)$ で $j(\tau)$ を $1728 = 12^3 = 2^6 3^3$ で割ったもの

$$J(\tau) := \frac{1}{1728} j(\tau)$$

を表すとする. これは, $\rho = e^{2\pi i/3}$, $i = \sqrt{-1}$, ∞ での値が $0, 1, \infty$ となるような正規化である.

\mathfrak{H} 上の有理型関数 $f(\tau)$ の点 $P \in \mathfrak{H}$ での位数を $v_P(f)$ と記す (正なら零点, 負なら極). また $f(\tau)$ が $q = e^{2\pi i\tau}$ による Fourier 展開をもつときは, $q = 0$ での位数を $v_\infty(f)$ とかく. $f(\tau)$ が $SL_2(\mathbf{Z})$ のモジュラー形式であるとき, 変換則

$$f(\gamma\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau), \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}), \quad \gamma\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

より, $(c\tau + d)$ は零にならないから $f(\tau)$ の P での位数と $\gamma(P)$ での位数は等しい. つまり $v_P(f)$ は P の $\mathfrak{H}/SL_2(\mathbf{Z})$ への像により定まる.

$SL_2(\mathbf{Z})$ に関する重さ k の有理型モジュラー形式 $f = f(\tau)$ について

$$v_\infty(f) + \sum_{P \in \mathfrak{H}/SL_2(\mathbf{Z})} \frac{1}{e_P} v_P(f) = \frac{k}{12} \quad (1)$$

が成り立つ. ただし e_P は P が i と同値なとき 2, ρ と同値なとき 3, その他の P については 1 とする. 右辺が重さ k にしか依存しないことに注意する. この等式は $\mathfrak{H}/SL_2(\mathbf{Z}) \cup \{\infty\} \simeq \mathbf{P}_\mathbb{C}^1$ 上の微分

$$d \log(f/\Delta^{k/12}) = \frac{d(f/\Delta^{k/12})}{f/\Delta^{k/12}}$$

に留数定理を適用して得られる ($\Delta = \Delta(\tau)$).

$SL_2(\mathbf{Z})$ の \mathfrak{H} への作用に関するスタンダードな基本領域 \mathfrak{F} を

$$\mathfrak{F} := \{|\tau| \geq 1, -1/2 \leq \Re\tau \leq 0\} \cup \{|\tau| > 1, 0 < \Re\tau < 1/2\}$$

とする. このとき公式 (1) は

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_\rho(f) + \sum_{P \in \mathfrak{F}, P \neq i, \rho} v_P(f) = \frac{k}{12} \quad (2)$$

とも書ける. この公式から次の事実が従う. $f(\tau)$ を $SL_2(\mathbf{Z})$ に関する重さ k の正則モジュラー形式とし, k を

$$k = 12m + s = 12m + 4\delta + 6\varepsilon, \quad m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, \quad s \in \{0, 4, 6, 8, 10, 14\}, \quad \delta \in \{0, 1, 2\}, \quad \varepsilon \in \{0, 1\},$$

と(一意的に)書く. このとき $f(\tau)$ は $E_s(\tau) = E_4(\tau)^\delta E_6(\tau)^\varepsilon$ で割れる, 即ち, $f(\tau)/E_s(\tau)$ はなお η 上正則である. これは (2) において, 右辺から生ずる分数 $s/12 = \delta/3 + \varepsilon/2$ に左辺を合わせるためには $v_\rho(f) \equiv \delta \pmod{3}$, $v_i(f) \equiv \varepsilon \pmod{2}$ でなければならないこと, $E_4(\tau)$, $E_6(\tau)$ がそれぞれ ρ, i で一位の零点を持つこと(これも (2) より出る) から従う. $\Delta(\tau)$ は η 上 0 にならない(このことも (2) から導かれる) ので, $f(\tau)/(E_s(\tau)\Delta(\tau)^m)$ は η 上正則なモジュラー関数(重さ 0) となり, 従って $j(\tau)$ の多項式となる. この多項式を $P_f(X)$ と書く:

$$f(\tau) = E_4(\tau)^\delta E_6(\tau)^\varepsilon \Delta(\tau)^m P_f(j(\tau)).$$

多項式 $P_f(X)$ の係数は, \mathbf{Z} に $f(\tau) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$ の Fourier 係数を添加してえられる環 $\mathbf{Z}[a_0, a_1, a_2, \dots]$ に入る. 実際 $P_f(X)$ は,

$$\frac{f(\tau)}{E_4(\tau)^\delta E_6(\tau)^\varepsilon \Delta(\tau)^m} = \frac{a_0}{q^m} + \dots$$

(この係数は $\mathbf{Z}[a_0, a_1, a_2, \dots]$ の元) の負べき項が消えるよう, $j(\tau) = 1/q + 744 + \dots$ のべきの何倍かを差し引きしていつて決まるもので, そのときの定数の計算は $\mathbf{Z}[a_0, a_1, a_2, \dots]$ の中で収まる. 従って特に $f(\tau)$ が \mathbf{Q} 係数ならば $P_f(X)$ は \mathbf{Q} 上の多項式である.

以下の節で, いくつかの $f(\tau)$ についてその \mathfrak{f} での零点がすべて単位円周上にあるという定理を述べるが, それは多項式 $P_f(X)$ の言葉になおすと, その根がすべて区間 $[0, 1728]$ にある(特に総実)という主張と同値である. なぜなら, $j(\tau)$ が \mathfrak{f} 上で区間 $[0, 1728]$ の実数値をとるのは ρ ($j(\rho) = 0$) から, i ($j(i) = 1728$) に至る単位円弧上に限るからである.

以下モジュラー形式乃至関数と言え, 断らない限り $SL_2(\mathbf{Z})$ に関するそれとする.

I-2. Eisenstein 級数の零点

1964 Wohlfahrt

話は Klaus Wohlfahrt による論文 [26][§] に始まる. 彼の考察のきっかけは, Eisenstein 級数 $E_{12}(\tau)$ の \mathfrak{f} における零点 (η 上のどの零点でも同じだが) τ_0 は

$$J(\tau_0) = \frac{250}{691}$$

を満たすが, ここから τ_0 の数論的性格を決めることが出来るか, と Hans Maass が問うたことであると書いている. Theodor Schneider の結果 [23][¶] (これは Hans Petersson に教えてもらったとある) によれば, $J(\tau_0)$ が代数的数になるのは τ_0 が虚 2 次数か, さもなくば超越数の時である. また古典虚数乗法論の教えるところでは τ_0 が虚 2 次数ならば $1728J(\tau_0)$ ($= j(\tau_0)$) は代数的整数である. しかるに今の場合 691 は素数であって, $J(\tau_0)$ は 1728 倍しても整数にはならないから, τ_0 は超越数であるという結論になる. Wohlfahrt はこれだけのことを述べた上で, 同様のことが重さ $k = 16, 18, 20, 22, 26$ についても成り立つことを計算する. すなわち, これらの場合は $E_k(\tau)$ の

[§]Über die Nullstellen einiger Eisensteinreihen, Math. Nachr., **26** (1964).

[¶]Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale, Math. Ann., **113** (1937).

零点が i, ρ 以外に本質的に唯一つあり (§I-1 の記号で, $P_{E_k}(X)$ が一次式), そこでの $J(\tau)$ の値が 1728 倍しても整数にならない有理数となる. この $J(\tau)$ の値がすべて 0 と 1 の間にあること, 言い換えると, これら $E_k(\tau)$ の \mathfrak{H} における零点は皆単位円周上にあることを述べて, 最後に $k = 24$ の場合の計算をする. このときは零点は二つあり, それらでの $J(\tau)$ の値はある有理数係数の二次方程式の根で与えられる. これを実際計算することにより, やはり零点は超越数であること, また \mathfrak{H} での零点は単位円周上にあることを言って論文は終わっている.

なお以下では論じないが, Eisenstein 級数の零点の超越性については, 少なくとも一つは超越的であることを最近 N. Kanou [14]^{||}が証明し, W. Kohnen [17]**が一般的に全て超越的であることを証明した (勿論 ρ, i に同値でない零点がである). Kohnen は後で出てくる $H_n(j(\tau))$ の零点の超越性も証明している.

1969 R. Rankin

この, 零点の位置の問題を次に取り上げたのが Robert Rankin [20]^{††}である. 彼は Wohlfahrt の零点の配置に関する結果が一般に成り立つかを問い, $k = 28, 30, 32, 34, 38$ の場合にはやはり同様であることを示す. 一般の k について証明をすることは出来なかったが, 以下のような行列式を考察し, $E_k(\tau)$ の零点との関係をつけた. ところで私ははじめ, $P_{E_k}(X)$ は $E_k(\tau)$ などの Fourier 係数の最初の数項から計算できるから, Rankin ほどの人が実例の計算を $P_{E_k}(X)$ が 2 次式になる場合までで止めているのは何故だろうと思ったのであるが, 例えば

$$P_{E_{36}}(X) = X^3 - \frac{56840986554595372944000}{26315271553053477373} X^2 + \frac{25407925737790369996800000}{26315271553053477373} X - \frac{711559817674938777600000000}{26315271553053477373}$$

となるのであって (ちなみに分母の 26315271553053477373 は素数. これのマイナスを 1919190 で割ったものが Bernoulli 数 B_{36}), 手計算でやるとすると少々の工夫では次に進むのは難しかったろうと想像される (しかし以下の行列式の計算は Atlas Computer Laboratory の Stephen Muir という人にかなり先までやってもらっていて, やはり一寸不思議な気がする). なお文末に始めのいくつかの $P_{E_k}(X)$ とその根の表をのせる (表 2, 表 3).

さて今,

$$E_2(\tau) := 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\tau} \log \Delta(\tau)$$

とする. これは準モジュラー形式 (nearly modular form もしくは quasimodular form) と呼ばれることもある \mathfrak{H} 上の正則関数で, 変換則

$$E_2\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^2 E_2(\tau) + \frac{6}{\pi i} c(c\tau + d) \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z})\right)$$

を満たす. ($E_2(\tau) - 3/(\pi \operatorname{Im}(\tau))$ が重さ 2 となる.) q のローラン級数 F に対しその定数項を $R_\infty(F)$ で表し (微分 $F dq/q$ の $q = 0$ での留数), $\nu = 0, 1, 2, \dots$ に対して整数 g_ν を

$$g_\nu = R_\infty(j(\tau)^\nu E_2(\tau))$$

^{||}Transcendancy of zeros of Eisenstein series, Proc. Japan Acad., 76 Ser. A, (2000).

**Transcendence of zeros of Eisenstein series and other modular functions, to appear in Comment. Math. Univ. St Pauli.

^{††}The zeros of Eisenstein series, Publ. Ramanujan Inst., 1 (1969).

で定める. すなわち $j(\tau)^\nu E_2(\tau)$ の q 展開の定数項を取り出すのである. さらに D_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ を行列式

$$D_n := \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n & g_{n+1} & g_{n+2} & \cdots & g_{2n} \end{vmatrix}$$

とする. このとき Rankin は次を示した.

定理 (1969, R. A. Rankin)

もしある n があって $D_n < 0$ となるならば, ある定数 k_0 が存在して, すべての $k \geq k_0$ に対して, $E_k(\tau)$ は \mathfrak{H} の内部 (境界ではなく) に少なくとも一つ零点を持つ. (従って全ての零点が単位円周上にのることはない.)

これを証明するための基となるのは (1) の一般化である次の等式である.

$g(\tau)$ を \mathfrak{H} 上正則なモジュラー関数 (重さ 0), $f(\tau)$ を重さ k のモジュラー形式とする. このとき

$$R_\infty \left(g \frac{f'}{f} \right) + \sum_{P \in \mathfrak{H}/SL_2(\mathbb{Z})} \frac{1}{e_P} v_P(f) g(P) = \frac{k}{12} R_\infty(gE_2). \quad (3)$$

ここに $f' = (2\pi i)^{-1} df/d\tau$ とする. これは先と同様微分

$$g d \log(f/\Delta^{k/12}) = g \frac{d(f/\Delta^{k/12})}{f/\Delta^{k/12}}$$

に留数定理を適用すれば出てくる ($g = 1$ の場合が (1) である).

ここで $g = j(\tau)^\nu$, $f = E_k(\tau)$ としてやると, 右辺は $kg_\nu/12$ である. 固定された ν に対し $k \rightarrow \infty$ のとき, Bernoulli 数の増大が早いことから左辺第一項が無視できて, $kg_\nu/12$ と左辺の和の項すなわち $E_k(\tau)$ の零点での $j(\tau)^\nu$ の値の和が大体同じ大きさとなる. ところが行列式 D_n で g_ν をこの零点での $j(\tau)^\nu$ の値の和 (の $12/k$ 倍) で置き換えたものは, Vandermond 行列式の一般化にあたる公式から, $n + 1$ 個の零点での $j(\tau)$ の値の差積の二乗の和となる. 従ってこれが正でなければどれかの値は実でないということになり, 定理が結論される. 少し端折っていい加減なところがあるが, 大体これが証明方針である.

Rankin ははじめ, 大きな k に対しては $E_k(\tau)$ の \mathfrak{H} での零点が単位円を外れることもあるのではないかと考えてこのような行列式を考えるに至ったと書いているが, 出版間に挿入された注で, 実はすべての D_n が正であることが示せたこと, そしてそのことが, 全ての零点が単位円上にのるだろうという予想に “adds some weight” と述べている.

彼はまた論文の最後の節で, $E_k(\tau)$ が零点を持たない領域 (“zero-free region”) を与えている. すなわち $E_k(\tau)$ は

$$k \equiv 2 \pmod{4} \text{ ならば } \text{Im}(\tau) > 1 \text{ で, } k \equiv 0 \pmod{4} \text{ ならば } \text{Im}(\tau) > 1 + (\log c_k)/2\pi \text{ で,}$$

零とならない (ただし c_k は具体的に与えられる $1 + 1/k$ くらいの定数), という命題がそれである.

これらの結果は次の Rankin–Swinnerton-Dyer の定理により実質を失ってしまうが、後に書く Atkin の直交多項式系の仕事はこの Rankin の論文に示唆されたものであり、行列式 D_n は Atkin の内積に関するグラム行列式、したがって内積が正定値ゆえ正、ということなのである (Rankin が D_n の正值性のどのような証明を持っていたのかはわからない)。

1970 F. Rankin – Swinnerton-Dyer

Rankin の論文のすぐ後に Fenella K. C. Rankin (Robert Rankin の娘、数学ではこの論文を書いただけで後に数学史家に転じた) と H. P. F. Swinnerton-Dyer があっけなく零点の予想を一般に証明してしまった。

定理 (1970, F. K. C. Rankin and H. P. F. Swinnerton-Dyer [22]^{‡‡})

任意の偶数 $k \geq 4$ について、 $E_k(\tau)$ の \mathfrak{H} における零点はすべて単位円周上にある。

彼らの証明は極めて初等的かつ簡明である。ざっと素描してみよう。まず、

$$\tilde{E}_k(\theta) = e^{ik\theta/2} E_k(e^{i\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{c,d} \frac{1}{(ce^{i\theta/2} + de^{-i\theta/2})^k}$$

とおく。こうすると、和の対称性から θ が実の時 $\tilde{E}_k(\theta)$ は実の値を取る。 $e^{ik\theta/2}$ は零にならないので、 $\tilde{E}_k(\theta)$ の零点を考えればよい。いま

$$k = 12m + s, \quad s \in \{0, 4, 6, 8, 10, 14\}$$

と書く。§I-1 の公式 (2) によって $E_k(\tau)$ の ρ, i 以外の零点は高々 m 個だから、 $\tilde{E}_k(\theta)$ が区間 $(\pi/2, 2\pi/3)$ において m 個の零点を持つことを示せばよい。(これより $E_k(\tau)$ の ρ, i での零点の位数は丁度 δ, ε であることが分かる。これは実は先に Atkin [1]* が証明していた。更に言うと i での位数が ε であることは容易で、Rankin の論文にも述べられている。そこで “It would be interesting to know whether...” と書かれた ρ の場合を mod 13 によるうまい議論により Atkin は証明したのである。) そのために $\tilde{E}_k(\theta)$ の和を $c^2 + d^2 = 1$ の項 (つまり $(c, d) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$) とその他にわけて

$$\tilde{E}_k(\theta) = 2 \cos(k\theta/2) + R_1$$

と書く ($c^2 + d^2 = 1$ の 4 項の和が $2 \cos(k\theta/2)$). $|R_1| < 2$ であることが証明されれば、 $\cos(k\theta/2)$ は $\theta = 2j\pi/k$, j は $k/4 \leq j \leq k/3$ なる整数、のところで値 ± 1 を交互に取るから、 $\tilde{E}_k(\theta)$ はその点で交互に正負となる、すなわち中間値の定理よりその間で零となる。その符号変化の回数 $= (k/4 \leq j \leq k/3$ なる整数の個数) $- 1$ が m に等しいことは容易に確かめられるから、これで主張が言えることになる。評価 $|R_1| < 2$ であるが、 $\theta \in [\pi/2, 2\pi/3]$ のとき

$$|ce^{i\theta/2} + de^{-i\theta/2}|^2 = c^2 + 2cd \cos \theta + d^2 \geq c^2 - cd + d^2 \geq \frac{1}{2}(c^2 + d^2)$$

で、 $c^2 + d^2 = N$ となる (c, d) の組の個数は $|c| \leq \sqrt{N}$ より一番大雑把に見積もっても高々 $2(2\sqrt{N}+1)$ で (c を決めれば d は高々二つ)、これは $N \geq 5$ のとき

$$2(2\sqrt{N} + 1) \leq 5\sqrt{N}.$$

^{‡‡}On the zeros of Eisenstein series, Bull. London Math. Soc., **2** (1970).

*Note on a paper of Rankin, Bull. London Math. Soc., **1** (1969).

また $c^2 + d^2 = 2$ の項は $(c, d) = \pm(1, 1)$ 又は $\pm(1, -1)$ であるから

$$|ce^{i\theta/2} + de^{-i\theta/2}| = 2 \cos(\theta/2) \text{ 又は } 2 \sin(\theta/2)$$

となる. $\theta \in [\pi/2, 2\pi/3]$ のとき $|2 \cos(\theta/2)| \geq 1, |2 \sin(\theta/2)| \geq \sqrt{2}$ より, 結局

$$\begin{aligned} |R_1| &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{|2 \cos(\theta/2)|^k} \times 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{|2 \sin(\theta/2)|^k} \times 2 + \frac{1}{2} \sum_{N=5}^{\infty} \frac{5\sqrt{N}}{(N/2)^{k/2}} \\ &\leq 1 + 2^{-k/2} + 5 \cdot 2^{k/2-1} \sum_{N=5}^{\infty} N^{\frac{1-k}{2}} \\ &\leq 1 + 2^{-k/2} + 5 \cdot 2^{k/2-1} \int_4^{\infty} x^{\frac{1-k}{2}} dx \\ &= 1 + 2^{-k/2} + \frac{5}{k-3} 2^{3-k/2}. \end{aligned}$$

最後の式は k について単調減少であり, $k = 12$ のとき $1.085069 \dots$ であるから, $|R_1| < 2$ が云えた (定理は $k \geq 12$ で示せばよい). この証明から, m 個の零点はすべて異なること (それぞれ位数 1) もわかる.

この証明を後に R. Rankin [21][†] が尖点に極をもつ Poincaré 級数の場合に一般化している.

1970 Deligne

Eisenstein 級数の零点を標数正の世界で考えると非常にはっきりとした意味がつく. これについては結果を述べるに留める.

p を素数とする. 標数 p の超特異 (supersingular) 楕円曲線の閉体上の同型類は有限個で, その j 不変量を丁度根とする多項式 $ss_p(X)$ は素体 \mathbf{F}_p 上の多項式となる:

$$ss_p(X) := \prod_{E:\text{supersingular/同型}} (X - j(E)) \in \mathbf{F}_p[X].$$

文末に $ss_p(X)$ の表をのせる (表 16).

定理 (1970 頃 Deligne [25][‡])

$p \geq 5$ を素数とすると,

$$X^\delta (X - 1728)^\varepsilon P_{E_{p-1}}(X) \bmod p = ss_p(X).$$

Kaneko–Zagier [13][§] に初等的ないくつかの証明がある. どのように証明するにせよ $E_{p-1}(\tau)$ の q 展開が $\bmod p$ で 1 に合同になること (これは Bernoulli 数についての Clausen–von Staudt の定理より) が本質的な役割を果たす.

[†]The zeros of certain Poincaré series, *Compositio Math.*, **46** (1982).

[‡]Serre, *Congruences et formes modulaires*, Sémin. Bourbaki 1971/72, (全集 95). ここに Deligne の定理として挙げてある (述べ方は違う). Deligne 自身が書いたものはないようである.

[§]Supersingular j -invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials, *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*, vol. 7 (1998).

I-3. Atkin の直交多項式系

$SL_2(\mathbf{Z})$ の重さ 0 のモジュラー関数で \mathfrak{H} 上正則なもの (無限遠点では極を許す) 全体のなす \mathbf{C} ベクトル空間を V とする. V には (重さ 0 の) Hecke 作用素 $\{T_n\}_{n \geq 1}$ が働いているが, その作用は

$$(f|T_n)(\tau) = \sum_{\substack{ad=n \\ 0 \leq b < d}} f\left(\frac{a\tau + b}{d}\right)$$

で与えられるものとする. (普通はこれを n で割る.) V は $j(\tau)$ の多項式全体に一致するから, $X = j(\tau)$ とおいて V と多項式環 $\mathbf{C}[X]$ を同一視する. これにより $\mathbf{C}[X]$ にも Hecke 作用素が働くが, それを同じ記号 T_n でかく.

$V \simeq \mathbf{C}[X]$ 上の Atkin 内積を次のようにして定義する. $f(X), g(X) \in \mathbf{C}[X]$ に対し,

$$(f(X), g(X)) = R_\infty(f(j(\tau))g(j(\tau))E_2(\tau)).$$

定理 (1985, O. Atkin[2][¶], なお [13]^{||}参照)

(i) この内積は非退化, $\mathbf{R}[X]$ 上正定値で, $(f|T_n, g) = (f, g|T_n)$ がすべての $f, g \in \mathbf{C}[X]$, $n \geq 0$ について成り立つ.

(ii) この内積に関する直交多項式系を $\{A_n(X)\}_{n \geq 0}$, $A_n(X)$ は n 次 monic, とする. $A_n(X) \in \mathbf{Q}[X]$ であり, さらに p を素数, $n_p = \deg(ss_p(X))$ とするとき,

$$A_{n_p}(X) \bmod p = ss_p(X)$$

が成り立つ.

この内積は $F(\tau) = f(j(\tau))$, $G(\tau) = g(j(\tau))$ と書くとき

$$(f(X), g(X)) = \frac{3}{\pi} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{F}_y} F(\tau)G(\tau) \frac{dx dy}{y^2} \quad (\tau = x + iy)$$

で与えられることを示すことが出来る (Borcherds [5, Th.9.2]**参照). ここに \mathfrak{F}_y は基本領域 \mathfrak{F} を直線 $\text{Im}(\tau) = y$ で切った下の有限領域である. これより, Atkin の内積を Petersson 内積の重さ 0 での対応物と看做してもよいだろう (Hermitian ではないが). すると, その直交系というものは, Hecke 作用素の同時固有関数 (これらは Petersson 内積に関して直交系をなすのであった) の類似物と思うことが出来る. ($\mathbf{C}[X]$ では Hecke 作用素 T_n は次数を n 倍するので, 定数以外に固有関数はない.)

(ii) については, 一つの $A_n(X)$ が複数の p に対して $ss_p(X)$ を与えることがある点が特筆される. 例えば

$$A_1(X) = X - 720 \quad \text{は} \quad p = 2, 3, 5, 7, 13$$

に対し,

$$A_2(X) = X^2 - 1640X + 269280 \quad \text{は} \quad p = 11, 17, 19$$

[¶]Note for the talk at MPI Bonn, 1985. 6. 20 (unpublished).

^{||}Kaneko-Zagier, Supersingular j -invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 7 (1998).

Automorphic forms with singularities on Grassmannians, Invent. Math., **132 (1998).

に対し, mod p すると $ss_p(X)$ を与える. $ss_p(X)$ の次数, すなわち標数 p の超特異楕円曲線の (閉体上の) 同型類の個数は §I-1 の要領で

$$p - 1 = 12m + 4\delta + 6\varepsilon$$

と書いたとき,

$$\deg ss_p(X) = m + \delta + \varepsilon$$

で与えられる. 従って例えば $12m + 5$, $12m + 7$ 型の子素数があれば $A_{m+1}(X)$ はこの両方の素数に対し $ss_p(X)$ を与える.

$A_n(X)$ の具体例を文末表 4 に与える. $A_n(X)$ を計算するには, 漸化式

$$\begin{aligned} A_0(X) &= 1, \\ A_1(X) &= X - 720, \\ A_{n+1}(X) &= (X - (\lambda_{2n} + \lambda_{2n+1}))A_n(X) - \lambda_{2n-1}\lambda_{2n}A_{n-1}(X) \quad (n \geq 1), \\ \text{ここに } \lambda_n &= \begin{cases} 720, & (n = 1), \\ 12 \left(6 + \frac{(-1)^n}{n-1}\right) \left(6 + \frac{(-1)^n}{n}\right), & (n > 1), \end{cases} \end{aligned}$$

或いは公式

$$A_n(X) = \sum_{i=0}^n 12^{3i} \left[\sum_{m=0}^i (-1)^m \binom{-\frac{1}{12}}{i-m} \binom{-\frac{5}{12}}{i-m} \binom{n+\frac{1}{12}}{m} \binom{n-\frac{7}{12}}{m} \binom{2n-1}{m}^{-1} \right] X^{n-i}$$

によればよい. この公式は, $A_n(X)$ は

$$X^n F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; 1, \frac{1728}{X}\right) F\left(-n - \frac{1}{12}, -n + \frac{7}{12}; 1 - 2n; \frac{1728}{X}\right)$$

の多項式部分であるということと同値で ($F(a, b; c; x)$ は Gauss の超幾何級数), $ss_p(X)$ との結び付きの一つの証明はこれを通して行う.

Atkin の内積はまた ($\mathbb{R}[X]$ 上で考えるとして)

$$(f(X), g(X)) = \int_0^{1728} f(x)g(x)\mu(x)dx \quad (\mu(x) \text{ はある正の関数})$$

という, 古典的な直交多項式を定める内積の形に書き直すことが出来る. 「重み」関数 $\mu(x)$ は具体的には次で与えられる. 区間 $[\pi/3, \pi/2]$ 上定義され $[0, 1728]$ に値を取る実数値単調増加関数 $\theta \mapsto x = j(e^{i\theta})$ の逆関数を $\theta(x)$ とする. このとき

$$\mu(x) = \frac{6}{\pi} \theta'(x).$$

$\theta(x)$ は単調増加であるから $\mu(x)$ は正の値を取る. このことから直交多項式の一般論を使って, もしくは先ほどの漸化式を使って, 次が分かる.

定理 多項式 $A_n(X)$ の根はすべて単根で $(0, 1728)$ にある.

はじめのいくつかの $A_n(X)$ の根を末尾の表 5 に与えておく.

I-4. Hecke 作用素により得られる多項式列

先に, $A_n(X)$ は Hecke 同時固有関数の重さ 0 での対応物であるといった. そのとき, $A_0(X) = 1$ が Eisenstein 級数の対応物だとすると ($E_k(\tau)$ の Fourier 展開で $k = 0$ とすると 1 になる), 1 と直交する, $n \geq 1$ なる $A_n(X)$ で張られる空間が尖点形式の空間の対応物と看做せるであろう. ところで重さ正のとき, 尖点形式の空間の基底として別に Poincaré 級数をとることが出来た. これの類似を考えてみよう.

重さ $k = 12m + 4\delta + 6\varepsilon$ と正整数 n に対して Poincaré 級数 $g_n^{(k)}(\tau)$ が

$$g_n^{(k)}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{(c,d)=1} \frac{e^{2\pi i n \frac{a\tau+b}{c\tau+d}}}{(c\tau+d)^k}$$

で定義され (a, b は $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z})$ となるように選ぶ), よく知られるように重さ k の尖点形式の空間は

$$g_1^{(k)}(\tau), g_2^{(k)}(\tau), \dots, g_m^{(k)}(\tau)$$

で張られる. 更に, $T_n^{(k)}$ を重さ k の Hecke 作用素とすると,

$$g_n^{(k)}(\tau) = n^{-k} g_1^{(k)} | T_n^{(k)}$$

が成り立つ. つまり尖点形式の空間は

$$g_1^{(k)}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{(c,d)=1} \frac{e^{2\pi i \frac{a\tau+b}{c\tau+d}}}{(c\tau+d)^k}$$

に次々 Hecke 作用素を施していったもので張られる.

さて, Rademacher [19]^{††} の公式によれば $j(\tau)$ を Poincaré 級数 $g_{-1}^{(0)}(\tau)$ と見ることが出来る. その公式 (を Knopp [16]^{‡‡} が少し書き換えたもの) は

$$j(\tau) = 720 + \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{|c|, |d| \leq N \\ (c,d)=1}} \left\{ \exp\left(-2\pi i \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) - \exp\left(-2\pi i \frac{a}{c}\right) \right\}. \quad (4)$$

($c = 0$ のとき $\exp(-2\pi i a/c) = 0$ とみる.)

定数が一寸合わないが (合うような解釈が出来るか?), 最初の「尖点形式」である $A_1(\tau) = j(\tau) - 720$ を $g_{-1}^{(0)}(\tau)$ とみなすと, それを (重さ 0 の) Hecke 作用素でうつした $(j(\tau) - 720) | T_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ が尖点形式の空間を張る Poincaré 級数全体であるといえるだろう. ($j(\tau) | T_n$ も (4) のような表示を持つのだろうか?) これらは $j(\tau)$ の整数係数のモニック多項式になる. これを $H_n(X)$ とかく. すなわち $H_n(X)$ は

$$H_n(j(\tau)) = (j(\tau) - 720) | T_n$$

^{††}The Fourier series and the functional equation of the absolute modular invariant $J(\tau)$, Amer. J. Math., **61** (1939).

^{‡‡}Rademacher on $J(\tau)$, Poincaré series of nonpositive weights and the Eichler cohomology, Notices Amer. Math. Soc., **37-4**, (1990).

を満たす多項式の列である. 具体例は最後の表 6 を参照. このとき

定理 (1997, Asai–Kaneko–Ninomiya [3]*) $H_n(X)$ の根はすべて単根で $(0, 1728)$ にある.

$H_n(X)$ の定義の右辺 720 を区間 $(0, 1728)$ 内の任意の数に置き換えても定理は成り立つ. 実際論文では 744 で証明した. $(j(\tau) - 744)|T_n$ も別の意味で重要なので (CM 点での値のトレースが Borcherd の無限積に深く関わる, など) 文末の表にはこれも載せておいた. (また 720 を任意の実数で置き換えても, ある番号 n 以上についてやはり零点は全て $(0, 1728)$ に入る).

定理の証明は Eisenstein 級数の場合の Rankin–Swinnerton-Dyer の証明同様, 初等的である. 今度は

$$H_n(j(\tau))e^{-2\pi ny} = 2 \cos(2\pi nx) + R_2 \quad (\tau = x + iy)$$

と分けて, 不等式 $|R_2| < 2$ が問題の単位円弧上 $(-1/2 < x < 0)$ 成り立つことを示す. $2 \cos(2\pi nx)$ は Hecke 作用素を施したときの各項の内 $j(n\tau)$ と $j(\tau/n) = j(-n/\tau)$ の, Fourier 級数の負べき項から出てくる. τ が単位円上にあるとき $1/\tau = \bar{\tau}$ であるから

$$e^{-2\pi i n \tau} + e^{-2\pi i (-n/\tau)} = e^{-2\pi i n \tau} + e^{2\pi i n \bar{\tau}} = 2 \cos(2\pi n x) e^{2\pi n y}.$$

この証明を見ると一寸面白いことに気がつく. Eisenstein 級数の時の円弧上の零点の配置は, 角度 $[\pi/2, 2\pi/3]$ を等分した各区間内に一つずつある, というものだが, $H_n(X)$ の場合は実部に対応する区間 $[-1/2, 0]$ の等分区間内に一つずつある.

I-5. ある微分方程式の解として現れるモジュラー形式

$SL_2(\mathbf{Z})$ に関する重さ k の正則モジュラー形式のなす \mathbf{C} ベクトル空間を M_k で表す. いま微分作用素 $\vartheta_k: M_k \rightarrow M_{k+2}$ を

$$\vartheta_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \frac{df}{d\tau} - \frac{k}{12} E_2 f$$

で定義する. $E_2 = E_2(\tau)$ は既に何度か登場している「重さ 2 の Eisenstein 級数」である. $f \in M_k$ ならば $\vartheta_k(f) \in M_{k+2}$ であることは, E_2 の変換則より従う. 或いは, 重さ 0 の関数の微分は重さ 2 になることから, $f/\Delta^{k/12}$ の微分が重さ 2, このことを Δ の対数微分が E_2 であることを使って書き換えたもの, といってもよい.

さてこれを合成した $\vartheta_{k+2} \circ \vartheta_k: M_k \rightarrow M_{k+4}$ を考える. k が 3 を法として 2 と合同でなければ, $\dim M_k = \dim M_{k+4}$ であるから (§I-1 の記号で $\dim M_k = m + 1$ である), このとき $M_{k+4} = E_4 \cdot M_k$, 従って

$$\boxed{\varphi_k} := E_4^{-1} \vartheta_{k+2} \circ \vartheta_k$$

は有限次ベクトル空間 M_k の自己準同型となる. その固有関数を問題にする.

定理

(i) φ_k の固有関数で尖点形式ではないもの $F_k(\tau) \in M_k$ が定数倍を除いて唯一存在する. その固有値は $k(k+2)/144$ で, よって $f = F_k(\tau)$ は

$$\vartheta_{k+2} \circ \vartheta_k(f)(\tau) = \frac{k(k+2)}{144} E_4(\tau) f(\tau) \quad (5)$$

*Zeros of certain modular functions and an application, Comment. Math. Univ. St Pauli, 46-1 (1997).

を満たす.

(ii) $F_k(\tau)$ の \mathfrak{f} における零点はすべて単位円周上にある.

(iii) 5 以上の素数 p に対して $p-1 = 12m + 4\delta + 6\varepsilon$ ($m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, $\delta, \varepsilon \in \{0, 1\}$, p は 3 で割れないので $p-1 \equiv 2 \pmod{3}$ とはならず, $\delta = 2$ にはならない) とかくとき

$$X^\delta(X-1728)^\varepsilon P_{F_{p-1}}(X) \pmod{p} = ss_p(X).$$

(i) で「尖点形式ではない」と言っているのはこういうことである. まず, $f \in M_k, g \in M_l$ とすると

$$\vartheta_{k+l}(fg) = \vartheta_k(f)g + f\vartheta_l(g)$$

が成り立つことと, $\vartheta_{12}(\Delta) = 0$ であることから,

$$f \in M_{k-12i} \quad \text{ならば} \quad \vartheta_k(\Delta^i f) = \Delta^i \vartheta_{k-12i}(f).$$

これより, F_{k-12i} が φ_{k-12i} の固有関数ならば $\Delta^i F_{k-12i}$ が φ_k の固有関数になる. φ_k は q 展開の定数項を $k(k+2)/144$ 倍するから, φ_k は余次元 1 の尖点形式の空間を保ち, 従って $k(k+2)/144$ を固有値の一つとして持つことが分かる. よって各重さ k に対して一つずつ固有関数 F_k をとっておくと, φ_k の全ての固有関数は

$$\Delta^i F_{k-12i} \quad (0 \leq i \leq m, m+1 = \dim M_k)$$

で与えられる. つまり F_k 以外の (尖点形式である) 固有関数は下の重さから来る “old form” である.

微分方程式 (5) を定義に従って書き換えると

$$f''(\tau) - \frac{k+1}{6} E_2(\tau) f'(\tau) + \frac{k(k+1)}{12} E_2'(\tau) f(\tau) = 0 \quad (6)$$

となる. ここで $f' = (2\pi i)^{-1} df/d\tau$ としており, $E_2'(\tau) = (E_2(\tau)^2 - E_4(\tau))/12$ を用いた.

$P_{F_k}(X)$ は Jacobi 多項式という超幾何多項式 (超幾何級数が途中で切れて多項式になるもの) の一つになり, 零点のことはそれから導かれる. つまり式 (5) の変数を τ から $X = j(\tau)$ に変換して, $P_f(X)$ の満たす微分方程式に直すと超幾何微分方程式になるのである. しかし何故これまでの話と共通する $[0, 1728]$ という区間が出てくるのか, $X = 0, 1728$ が特異点であるからというのが一応の答えであるが, より深い理由があるのかどうか, 今のところよく分からない.

$F_k(\tau)$ の具体形は第 II 部で与える. 定理の証明の詳細は論文 [13][†] に譲らざるを得ないが, 微分方程式 (6) のいろいろな解について第 II 部で述べる. 多項式 $P_{F_k}(X)$ が Chebyshev 多項式の「次」に来るものであるという見方をおいて [8][‡] に書いた.

I-6. その他の例

さらに二つの例をあげる. 一つは証明がなく, 一つは結果を聞いただけで証明は未見である.

[†]Supersingular j -invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 7 (1998).

[‡]Jacobi polynomials, certain elliptic modular forms and supersingular elliptic curves, 数理解析研究所講究録 925, (1995).

Doubly-even self-dual code のテータの平均

これは去年のこの集会での宗政昭弘さんの講演に出てきたモジュラー形式で、背景については宗政さんの報告を参照していただきたいが、具体的には $\theta_3(2\tau) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{n^2}$, $\theta_2(2\tau) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{(n+1/2)^2}$ ($q = e^{2\pi i\tau}$) を Jacobi のテータ級数とすると、

$$\Theta_C^{(k)}(\tau) := 2^{2k-2}(\theta_3(2\tau)^{4k} + \theta_2(2\tau)^{4k}) + (-1)^k \sum_{i=0}^k \binom{4k}{4i} \theta_3(2\tau)^{4k-4i} \theta_2(2\tau)^{4i}$$

で与えられる (重さ $2k$). 計算機で重さ 300 くらいまで実験したところによると、

$$\Theta_C^{(k)}(\tau) \text{ の } \mathfrak{H} \text{ での零点もすべて単位円周上にある?}$$

らしい. (対応する多項式 $P_{\Theta_C^{(k)}}(X)$ (モニックにしてある) とその零点の表を末尾にのせる.)

Eisenstein 級数は even unimodular lattice のテータの (重みつき) 平均であるが、上のものはそのうちコードに対応する部分の平均をとったものである. 零点についてのこの観察が正しいとすると一体その理由は何か.

古典的な関係式

$$\frac{\theta_2(2\tau)^4}{\theta_3(2\tau)^4} = \lambda(2\tau), \quad j(\tau) = 256 \frac{(1 - \lambda(\tau) + \lambda(\tau)^2)^3}{\lambda(\tau)^2(1 - \lambda(\tau))^2}$$

があるので、上の具体式から零点の位置を決めてやることはあるいは出来るのかも知れないが ($\theta_3(2\tau)$ は \mathfrak{H} 上零にならないことに注意), この証明方針も “ad hoc” であって本質の解明に役立つそうにない.

“Extremal” modular form

Ken Ono 氏の元学生 Jayce Getz (今 Harvard のポスドク?) によれば, extremal modular form

$$F_{\text{ex}}^{(k)}(\tau) = 1 + a_{m+1}q^{m+1} + \dots$$

(q 展開の定数項が 1 でそのあとの係数が引き続き可能な限り 0 であるもの. $k = 12m + 4\delta + 6\epsilon$. なお伊吹山さんの稿も参照) でも同じ性質を持つことが証明できるという (Eisenstein 級数と比較して云々と言っていた). 実験してみると確かにそうになっている. これの例も最後の表に.

さらなる例について §II-3 の終りに言及がある. どんどん例がふえる一方...

I-7. おわりに

モジュラー形式の零点は任意の配置を取りうる. 制限は $SL_2(\mathbf{Z})$ 同値な点では同じ位数を持つこと, 零点の ($SL_2(\mathbf{Z})$ 同値類の) 個数は重さ k のみで決まってしまうこと (公式 (1)) だけである. 例えば勝手な多項式 $P(X)$ が与えられたとき, この次数を m とすると, 重さ $12m$ のモジュラー形式

$$\Delta(\tau)^m P(j(\tau))$$

の零点での $j(\tau)$ の値は丁度 $P(X)$ の根である.

従ってその零点での $j(\tau)$ の値がすべて $[0, 1728]$ にあるということには何か理由があるだろう. 一方, こういう性質をもつモジュラー形式もまたいくらでも作ることが出来る. 根がすべて $[0, 1728]$ にあるような多項式 $P(X)$ は, \mathbf{Q} 係数という条件をつけたとしても, いくらでもあるからである.

これまで挙げてきたモジュラー形式なり関数はそれぞれ無限族で、その全ての元が共通してこの性質を持つ。これは何故であろうか。Hecke 作用素なり微分作用素 φ_k の性質として説明がつくのであろうか。重さ正の Hecke 固有関数の零点はこの性質を持たないようだが、何か一般的に言える事があるのか。いつまでもよく分からないと言っているのはどうも情けないことではある。

すべてを合同部分群の場合に考えること。自分自身は散発的な計算を行ったのみだが、勿論これは課題である。そこから何か分かるかもしれない。

第II部 ある微分方程式のモジュラー形式解について

以下では専ら前の §I-5 で登場した微分方程式

$$(\#)_k \quad f''(\tau) - \frac{k+1}{6} E_2(\tau) f'(\tau) + \frac{k(k+1)}{12} E_2'(\tau) f(\tau) = 0 \quad \left(' = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\tau} \right)$$

の, k をいろいろ変えたときの解について論じる. この方程式に導かれたのは $ss_p(X)$ の \mathbb{Q} 上への持ち上げに関して解の方を先に見つけたのが始まりで, (5) 式を導いたような理屈は後で考えたのであるが, さらにその後, $(\#)_k$ は解空間が $SL_2(\mathbb{Z})$ の重さ k の作用で不変ということである条件のもと一意的に特徴づけられることに気が付いた. それは $(\#)_k$ が $ss_p(X)$ を離れてもそれなりに自然な, 調べるべき方程式であることを保証してくれるように思われるので, まずそれから始めるとする. 記号はこれまでのものを踏襲する.

II-1. 一つの特徴づけ

上半平面 \mathfrak{H} 上の二階同次線形微分方程式

$$f''(\tau) + A(\tau)f'(\tau) + B(\tau)f(\tau) = 0 \quad (7)$$

を考える. いま有理数 k を固定して, これに条件

$$f(\tau) \text{ が (7) の解ならば, すべての } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \text{ に対して } (c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \text{ も解}$$

を課す. k が分数のとき $c\tau + d$ のべき乗根は主値を取るものとする. これを「解空間が $SL_2(\mathbb{Z})$ の重さ k の作用で不変」というように述べたければ, k が分数の場合, 作用となるような multiplier system を考える必要がある. しかし方程式は線型であるから定数倍がかかっても条件としては同じことであり, ここでは multiplier system を定める必要はない.

この条件を計算して (7) で $\tau \rightarrow (a\tau + b)/(c\tau + d)$ としたものと比べると

$$A\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^2 A(\tau) - \frac{k+1}{\pi i} c(c\tau + d) \quad (8)$$

$$B\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^4 B(\tau) - \frac{k}{2\pi i} c(c\tau + d)^3 A(\tau) + \frac{k(k+1)}{(2\pi i)^2} c^2 (c\tau + d)^2 \quad (9)$$

という式が導かれる. さらに (8) と $E_2(\tau)$ の変換則, (8) の微分と (9) から

$$A\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) + \frac{k+1}{6} E_2\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^2 \left(A(\tau) + \frac{k+1}{6} E_2(\tau) \right) \quad (10)$$

$$B\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) + \frac{k}{2} A'\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^4 \left(B(\tau) + \frac{k}{2} A'(\tau) \right) \quad (11)$$

が出る. そこで, かなり強い条件ではあるが,

$$A(\tau), B(\tau) \text{ は } \mathfrak{H} \text{ 上で正則}$$

とし, さらに

$$A(\tau), B(\tau) \text{ は } \text{Im}(\tau) \rightarrow \infty \text{ のとき有界}$$

という条件を課しておく、 $SL_2(\mathbf{Z})$ の重さ 2 の正則モジュラー形式は 0 以外なく、重さ 4 は $E_4(\tau)$ の定数倍であるから (10), (11) より

$$A(\tau) = -\frac{k+1}{6}E_2(\tau), \quad B(\tau) = -\frac{k}{2}A'(\tau) + cE_4(\tau) \quad (c \text{ はある定数})$$

が得られる。解に一斉に $\Delta(\tau)$ の適当なべきを掛けたものを考えることにより、 $c = 0$ としても一般性を失わないことが分かるので、微分方程式 $(\#)_k$ はこれらの条件の下一意的に定まるものであるといえる。

実際、 $(\#)_k$ が 1980 年代から物理学者の論文 (S. Mathur–S. Mukhi–A. Sen [18][§], E. Kiritsis [15][¶] など) に現れ共形場理論の分類に用いられている (松尾厚さんの教示による)、というのはこの特徴づけの故であると思われる。 k が特定の (有限個の) 有理数のとき、 $(\#)_k$ のモジュラーである解 (を Dedekind η のべきで割って重さ 0 にしたもの) が共形場理論に言うところの「指標」となっているのである。

II-2. さまざまなモジュラー形式解

微分方程式 $(\#)_k$ の解でモジュラー形式であるものは、第 I 部で出てきた $F_k(\tau)$ ($k \equiv 0, 4 \pmod{6}$ なる偶数) 以外にも存在する。ここでは k が整数又は半整数の場合のそのような解を列挙しようと思うが、全てを正確に記述するためには記号の準備が煩瑣になるので詳しくは論文 Kaneko-Koike [10]^{||} に譲るとする。ただし (iv) の場合の解は §I-6 で出てきた Jacobi テータで書けるので、具体的な表示を与える。 (i) が §I-5 の $F_k(\tau)$ である。

定理

(i) $k \geq 0$ が偶数で、 $\pmod{6}$ で 0 または 4 に合同のとき、 $(\#)_k$ は $SL_2(\mathbf{Z})$ の重さ k のモジュラー形式で張られる解空間を一次元持つ。その生成元は $k \equiv 0, 4 \pmod{12}$ のとき

$$\begin{aligned} & E_4(\tau)^{\frac{k}{4}} F\left(-\frac{k}{12}, -\frac{k-4}{12}, -\frac{k-5}{6}; \frac{1728}{j(\tau)}\right) \\ &= \sum_{0 \leq i \leq k/12} (-1)^i \binom{\frac{k}{12}}{i} \binom{\frac{k-4}{12}}{i} \binom{\frac{k-5}{6}}{i}^{-1} 1728^i \Delta(\tau)^i E_4(\tau)^{\frac{k}{4}-3i} = 1 + O(q) \end{aligned}$$

で与えられ、 $k \equiv 6, 10 \pmod{12}$ のときは

$$\begin{aligned} & E_4(\tau)^{\frac{k-6}{4}} E_6(\tau) F\left(-\frac{k-6}{12}, -\frac{k-10}{12}, -\frac{k-5}{6}; \frac{1728}{j(\tau)}\right) \\ &= E_6(\tau) \sum_{0 \leq i \leq (k-6)/12} (-1)^i \binom{\frac{k-6}{12}}{i} \binom{\frac{k-10}{12}}{i} \binom{\frac{k-5}{6}}{i}^{-1} 1728^i \Delta(\tau)^i E_4(\tau)^{\frac{k-6}{4}-3i} = 1 + O(q) \end{aligned}$$

で与えられる。

(ii) $k \geq 0$ が偶数で、 $\pmod{6}$ で 2 に合同のとき、 $(\#)_k$ の二次元の解空間が $\Gamma(2)$ に関する重さ k のモジュラー形式で張られる。(explicit な表示省略)

[§]On the classification of rational conformal field theories, Physics Letters B, **213-3** (1988).

[¶]Fuchsian differential equations for characters on the torus: a classification, Nuclear Phys., **B324** (1989).

^{||}On modular forms arising from a differential equation of hypergeometric type, to appear in The Ramanujan Journal.

(iii) $k \geq 0$ が奇数で, mod 6 で 1 または 3 に合同のとき, $(\#)_k$ の二次元の解空間が $\Gamma(3)$ に関する重さ k のモジュラー形式で張られる. (explicit な表示省略)

(iv) $k \geq 0$ が半整数で, mod 3 で $1/2$ に合同のとき, $(\#)_k$ の二次元の解空間が $\Gamma(4)$ に関する重さ k のモジュラー形式で張られる. 具体的には基底が

$$\begin{aligned} & \theta_3(\tau)^{2k} F\left(-\frac{2k-1}{6}, -\frac{k}{2}, -\frac{k-5}{6}; \lambda(2\tau)\right) \\ &= \sum_{0 \leq i \leq (2k-1)/6} (-1)^i \binom{\frac{2k-1}{6}}{i} \binom{\frac{k}{2}}{i} \binom{\frac{k-5}{6}}{i}^{-1} \theta_2(2\tau)^{4i} \theta_3(2\tau)^{2k-4i} = 1 + O(q) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} & (\theta_2(2\tau)/2)^{\frac{2(k+1)}{3}} \theta_3(2\tau)^{\frac{2(2k-1)}{3}} F\left(-\frac{2k-1}{6}, -\frac{k-2}{6}, \frac{k+7}{6}; \lambda(2\tau)\right) \\ &= \sum_{0 \leq i \leq (2k-1)/6} \binom{\frac{2k-1}{6}}{i} \binom{\frac{k-2}{6}}{i} \binom{-\frac{k+7}{6}}{i}^{-1} \theta_2(2\tau)^{\frac{2(k+1)}{3}+4i} \theta_3(2\tau)^{\frac{2(2k-1)}{3}-4i} = q^{\frac{k+1}{6}} + O(q^{\frac{k+7}{6}}) \end{aligned}$$

で与えられる.

これらの解はすべて本質的に超幾何多項式で書けていて, 一たび解の具体形が見つかり, それが実際に $(\#)_k$ を満たすことを示すのは単なる計算になる. 幸い皆レベルが小さい群のモジュラー形式になっていたので, いくらかの試行錯誤の末に解の形を推量することが出来た.

(ii),(iii),(iv) の場合, 解によってはもう少し大きな群 (ただしレベルは変わらない) に関してモジュラーとなるが, これも煩瑣になるので省略した.

重さ 6 までの解の例を表にする. これらの場合はすべて基底として A, D, E 型単純リー環のルート格子およびその双対格子のテータが取れる. (これも共形場理論, アフィンリー環の「指標」と関係がある.) 記号はその意味に解釈されたい. 次節に述べるように実は定理の解はすべてこれらから原理的には構成できる.

表 1: 重さが低いところの解

k	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	$\frac{11}{2}$
F_k	1	Θ_{A_1}	Θ_{A_2}	—	Θ_{D_4}	—	Θ_{E_6}	Θ_{E_7}	Θ_{E_8}	—	—	—
		$\Theta_{A_1^*}$	$\Theta_{A_2^*}$		$\Theta_{D_4^*}$		$\Theta_{E_6^*}$	$\Theta_{E_7^*}$				

これらの例は正定値格子のテータであるから, Fourier 係数は正であるが, 一般に定理の解で $q^{(k+1)/6} + O(q^{(k+7)/6})$ であるものの係数は全て正であることが証明されている. 係数に何か意味がつくのであろうか.

II-3. 準モジュラー形式解

この節では $k \equiv 5 \pmod{6}$ の場合を扱う. この場合は $q = 0$ での local exponents $0, (k+1)/6$ が共に整数となり, 他の場合と様子が異なるのである. 実際このとき $(\#)_k$ は重さが $k+1$ (k ではな

く)の「準モジュラー」解を持つ。これは予期していなかった現象であった。(解の具体形を見つけるのに暇がかかった。)

環 $\mathbb{C}[E_2(\tau), E_4(\tau), E_6(\tau)]$ の重さ k の元を $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の準モジュラー形式 (nearly modular form, quasimodular form) という。ここで勿論生成元 E_2, E_4, E_6 の重さがそれぞれ 2, 4, 6 である。

今多項式列 $P_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_{n+1}(x) = xP_n(x) + \lambda_n P_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

ここに

$$\lambda_n = 12 \frac{(6n+1)(6n+5)}{n(n+1)} = 12 \left(6 + \frac{1}{n}\right) \left(6 - \frac{1}{n+1}\right)$$

で定義する。はじめのいくつかは

$$P_2(x) = x^2 + 462, P_3(x) = x^3 + 904x, P_4(x) = x^4 + 1341x^2 + 201894, \dots$$

で、 n の偶奇に応じて $P_n(x)$ は偶/奇多項式となる。これは定義から明らかであろう。また、 $P_n(x)$ の「随伴」多項式列 $Q_n(x)$ を、初期値だけ異なる同じ漸化式

$$Q_0(x) = 0, Q_1(x) = 1, Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) + \lambda_n Q_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義する。やはりはじめのいくつかを書くと

$$Q_2(x) = x, Q_3(x) = x^2 + 442, Q_4(x) = x^3 + 879x, \dots$$

で、今度は偶奇が反対になる。これらの多項式を用いて $(\#)_k$ の解が次のように記述される。

定理 $k = 6n + 5$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とする。次の $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ $k + 1$ の準モジュラー形式は $(\#)_k$ の解である:

$$\sqrt{\Delta(\tau)}^n P_n\left(\frac{E_6(\tau)}{\sqrt{\Delta(\tau)}}\right) \frac{E_4'(\tau)}{240} - \sqrt{\Delta(\tau)}^{n+1} Q_n\left(\frac{E_6(\tau)}{\sqrt{\Delta(\tau)}}\right).$$

$\sqrt{\Delta(\tau)}$ が入っているが、 $P_n(x)$ と $Q_n(x)$ のパリティからこれは見かけ上のものであることが分かる。すなわち常に平方根は外れて、この式は $\mathbb{Q}[E_2(\tau), E_4(\tau), E_6(\tau)]$ の元を与える ($E_4'(\tau) = (E_2(\tau)E_4(\tau) - E_6(\tau))/3$ にも注意)。

この解も具体的に与えられているのであるからそれが $(\#)_k$ を満たすことを確かめるのは単純作業であろうと思われるかもしれないが、実はそうではないのである。問題は多項式 $P_n(x), Q_n(x)$ が超幾何多項式ではないことにある。これらは超幾何級数の比

$$\frac{1}{X} \frac{F\left(\frac{13}{12}, \frac{17}{12}, 2; \frac{1728}{X}\right)}{F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1; \frac{1728}{X}\right)} = \frac{1}{X} + \frac{1266}{X^2} + \frac{1806960}{X^3} + \dots$$

を連分数展開したときの近似分数の分母分子なのであるが、それら自身は超幾何多項式ではない。定理の証明には方程式 $(\#)_k$ の持つ次のような漸化的な構造を用いる。

重さ k の $f(\tau)$ と重さ l の $g(\tau)$ に対し重さ $k+l+2$ のモジュラー形式 $[f(\tau), g(\tau)]$ を

$$[f(\tau), g(\tau)] = kf(\tau)g'(\tau) - lf'(\tau)g(\tau)$$

で定義する (“Rankin-Cohen bracket”). このとき

命題

- (i) もし $F_k(\tau)$ が $(\#)_k$ の解ならば, $[F_k(\tau), E_4(\tau)]/\Delta(\tau)$ が $(\#)_{k-6}$ の解となる.
- (ii) $k \neq 0, 4, 5$ とする. $(\#)_k$ の解 $F_k(\tau)$ に対し

$$F_{k-6}(\tau) = \frac{k-5}{288k(k-4)} \frac{[F_k(\tau), E_4(\tau)]}{\Delta(\tau)}$$

とおき, $F_{k+6i}(\tau)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) を順次帰納的に

$$F_{k+6i+6}(\tau) = E_6(\tau)F_{k+6i}(\tau) + \mu_i^{(k)}\Delta(\tau)F_{k+6i-6}(\tau) \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

で決める. ここに

$$\mu_i^{(k)} = 432 \frac{(k+6i)(k+6i-4)}{(k+6i+1)(k+6i-5)}.$$

このときすべての i について $F_{k+6i}(\tau)$ は $(\#)_{k+6i}$ の解である.

このように方程式 $(\#)_k$ の解は k の値 mod 6 で互いにつながっているのである. あと少し補助的な計算が必要だが, 大体はこの命題の漸化式が $P_n(x)$, $Q_n(x)$ の漸化式に対応して, 定理が帰納的に証明されるという寸法である.

定理の解を $F_k(\tau)$ とすると, $F_k(\tau)$ は

$$f(\tau)E_2(\tau) + g(\tau), \tag{12}$$

$f(\tau)$ は重さ $k-1$, $g(\tau)$ は重さ $k+1$ の共にモジュラー形式, という形にかけられる. そして, $(\#)_k$ の他の解が

$$\tau F_k(\tau) + \frac{6}{\pi i} f(\tau)$$

で与えられ, この二つを基底としたときの解空間への $SL_2(\mathbf{Z})$ の重さ k の作用は恒等表現となる. 特に $(\#)_k$ はこの場合いかなる部分群に関しても重さ k のモジュラー解を持ち得ない.

多項式 $P_n(x)$ を定義する漸化式において, λ_n を §I-3 の Atkin 直交多項式の漸化式で出てきた λ_n , すなわち

$$\lambda_n = \begin{cases} 720, & (n=1), \\ 12 \left(6 + \frac{(-1)^n}{n-1}\right) \left(6 + \frac{(-1)^n}{n}\right), & (n>1), \end{cases}$$

に変えて得られる多項式を $P_n^*(x)$ とすると, これが Atkin 直交多項式 $A_n(X)$ と

$$P_{2n}^*(x) = (-1)^n A_n(-x^2)$$

という関係にある. $(\#)_k$ の準モジュラー解は $A_n(X)$ と近い多項式で記述されているのである.

定理の準モジュラー解の Fourier 係数は, 先頭係数 ($q^{(k+1)/6}$ の係数) を 1 にしたとき, 一般には有理数であるが, 分母が重さに比して余り大きくならない. $P_n(x), Q_n(x)$ の漸化式から見込まれる分母に較べてずっと小さいのである. このことは Atkin の直交多項式でも見られる現象で, その場合の説明は [13]** に与えてあるが, 上に書いた類似から考えて, 同じような状況にあるのだと思われる. そしてまた (これは証明されていないが) この Fourier 係数は常に正のようである. 何か意味がつくのか興味がある.

さらに, この解を (12) の形に書いたとき, モジュラー形式 $f(\tau), g(\tau)$ は共に第 I 部で論じたような

$$\text{すべての零点での } j(\tau) \text{ の値 } \in [0, 1728]$$

なる性質を持つようである. このことは $f(\tau)$ についてはすぐ証明できる (本質的に $P_n(x)$ なので). $g(\tau)$ についても $P_n(x), Q_n(x)$ の漸化式を用いて証明できると思われるが, きちんと詰めていない.

II-4. $k = (6n + 1)/5$ の場合

浜名湖でのコンフェレンスの折, 講演が終わっての夕食後の松尾厚さん, 落合啓之さんとの雑談で松尾さんが, 表 1 を見ていると例外型 G_2 や F_4 に対応するものもあって欲しい気がする, と言われた. もしそのようなものがあるとすると, 対応する共形場理論の共形ウェイトというものの半分がここでの重さになるらしい. 後日松尾さんが計算して送ってこられたその数値は $k = 7/5$ と $13/5$ であった. 早速計算してみるとこれが何と Klein や Ramanujan 以来の由緒ある関数で書かれる二次元のモジュラー形式解を持っていたのである.

以下は松尾さんからの刺激がなかったら恐らく行わなかったであろう計算である. ここに心よりの感謝の意を表したい.

まず基本になるモジュラー形式を用意する.

$$\begin{aligned} \phi_1 = \phi_1(\tau) &= \frac{1}{\eta(\tau)^{3/5}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n q^{(10n+1)^2/40} \\ &= 1 + \frac{3}{5}q + \frac{2}{25}q^2 - \frac{28}{125}q^3 + \frac{264}{625}q^4 + \frac{532}{15625}q^5 + \dots, \\ \phi_2 = \phi_2(\tau) &= \frac{1}{\eta(\tau)^{3/5}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n q^{(10n+3)^2/40} \\ &= q^{1/5} \left(1 - \frac{2}{5}q + \frac{12}{25}q^2 + \frac{37}{125}q^3 - \frac{171}{625}q^4 - \frac{3318}{15625}q^5 + \dots \right) \end{aligned}$$

とおく. これらは (適当な multiplier system の下) $\Gamma(5)$ に関する重さ $1/5$ のモジュラー形式である. この multiplier system での $\Gamma(5)$ の重さ $\frac{1}{5}\mathbf{Z}_{\geq 0}$ の正則モジュラー形式のなす環は多項式環 $\mathbf{C}[\phi_1, \phi_2]$ となる (これらの詳細については T. Ibukiyama [7]^{††} 参照のこと). ϕ_1, ϕ_2 は Rogers-Ramanujan

**Kaneko-Zagier, Supersingular j -invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 7 (1998).

^{††}Modular forms of rational weights and modular varieties, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **70**, (2000).

の恒等式で有名な無限積表示

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \eta(\tau)^{2/5} q^{-1/60} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{5n+1})(1 - q^{5n+4})}, \\ \phi_2 &= \eta(\tau)^{2/5} q^{11/60} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{5n+2})(1 - q^{5n+3})}\end{aligned}$$

を持ち ($\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$ は Dedekind の η 関数), また比 ϕ_2/ϕ_1 は見事な連分数展開

$$\frac{\phi_2(\tau)}{\phi_1(\tau)} = q^{1/5} \cdot \frac{1}{1 + \frac{q}{1 + \frac{q^2}{1 + \frac{q^3}{1 + \frac{q^4}{1 + \dots}}}}}$$

をもつ. Ramanujan は Hardy に宛てた最初の手紙の中で, この連分数と q を q^5 としたものの間の関係 (modular equation) や, $q = e^{-2\pi}$, $e^{-2\pi\sqrt{5}}$ での値 (singular moduli) を記したが, これらが Hardy をして

“(これらの公式は) defeated me completely; I had never seen anything in the least like them before. A single look at them is enough to show that they could only be written down by a mathematician of the highest class. They must be true because, if they were not true, no one would have had the imagination to invent them.”

と書かしめた (Hardy [6]^{‡‡}, p.9) ことは有名である.

さて, 次が成り立つ.

定理 $k = (6n + 1)/5$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $n \not\equiv 4 \pmod{5}$ とする. このとき $(\#)_k$ は $\mathbf{C}[\phi_1, \phi_2]_{wt=k}$ に二次元解を持つ.

解空間の基底の例をあげると

$$\begin{aligned}k = \frac{1}{5} : & \quad \phi_1, \phi_2, \\ k = \frac{7}{5} : & \quad \phi_1^7 + 7\phi_1^2\phi_2^5, 7\phi_1^5\phi_2^2 - \phi_2^7, \\ k = \frac{13}{5} : & \quad \phi_1^{13} + 39\phi_1^8\phi_2^5 - 26\phi_1^3\phi_2^{10}, 26\phi_1^{10}\phi_2^3 + 39\phi_1^5\phi_2^8 - \phi_2^{13}, \\ k = \frac{19}{5} : & \quad \phi_1^{19} + 171\phi_1^{14}\phi_2^5 + 247\phi_1^9\phi_2^{10} - 57\phi_1^4\phi_2^{15}, 57\phi_1^{15}\phi_2^4 + 247\phi_1^{10}\phi_2^9 - 171\phi_1^5\phi_2^{14} + \phi_2^{19}.\end{aligned}$$

これまで扱った k が整数, 半整数の場合は, モジュラー解は皆具体的に超幾何多項式を使って書き表された. しかしこの場合に解の一般的な公式を見つけることには成功していない. 違いは以下のような点にある.

^{‡‡}Ramanujan, Chelsea Publishing Company, New York 1959.

今

$$f(\tau)/\phi_1^{5k} = F(t),$$

ここに

$$t = \phi_2^5/\phi_1^5 = q - 5q^2 + 15q^3 - 30q^4 + 40q^5 + \dots$$

といて, $(\#)_k$ を t に関する微分方程式に書き換える. t は $\Gamma_1(5)$ のいわゆる “Hauptmodul” (の逆数) である. ここではこれを無限遠点での局所座標とみて変数変換を行うのである. このとき, $f(\tau)$ が $(\#)_k$ を満たすことと, $F(t)$ が次の $(b)_k$ を満たすことが同値となる:

$$(b)_k \quad t(t^2+11t-1)F''(t) + \left(\frac{7-11k}{6}t^2 + 11(1-k)t + \frac{k-5}{6} \right) F'(t) + \frac{k(5k-1)}{6}(t+3)F(t) = 0,$$

' は t に関する微分である. ついでながら, ここで $k = -1$ といて得られる

$$(b)_{-1} \quad t(t^2 + 11t - 1)F''(t) + (3t^2 + 22t - 1)F'(t) + (t + 3)F(t) = 0$$

は, F. Beukers が [4]*において $\zeta(2)$ ($\zeta(3)$ の方ではなく) の無理性の Apéry による証明を再構成したときに用いた微分方程式である. $k = -1$ のとき $(\#)_k$ は

$$f'' = 0$$

という自明な方程式であるが, これの基本解 $1, \tau$ が即ち「普遍周期」であり, この方程式をモジュラス t を変数にとって書き換えたものの解として $\Gamma_1(5)$ に対応する楕円曲線の族の周期の満たす微分方程式が出てくるのである.

それはさておき, これまでの例では $(b)_k$ にあたる方程式が Gauss の超幾何微分方程式となり, k が特定の値の時それが多項式解を持ったのである. しかし, 今の場合 $(b)_k$ は特異点を 4 点持ち, もはや超幾何ではない. 以下述べるように多項式解は持つのであるが, それがよい閉じた形の表示を持つのかどうか, 私には分からない. $(b)_k$ に多項式の解 $P(t)$ が存在すると,

$$\phi_1^{5k} P(\phi_2^5/\phi_1^5) \quad \text{および} \quad \phi_2^{5k} P(-\phi_1^5/\phi_2^5)$$

が $(\#)_k$ の解となる. (第二のものが解であることは, $SL(2, \mathbf{Z})$ が解空間に作用していて, 行列 $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ が $\phi_1 \rightarrow \phi_2, \phi_2 \rightarrow -\phi_1$ なる作用を引き起こすことによる.)

命題 $0 \leq n \leq 8, n \neq 4$ に対し,

$$P_0(t) = 1,$$

$$P_1(t) = 1 + 7t,$$

$$P_2(t) = 1 + 39t - 26t^2,$$

$$P_3(t) = 1 + 171t + 247t^2 - 57t^3,$$

$$P_5(t) = 1 - 465t - 10385t^2 - 2945t^3 - 8370t^4 + 682t^5,$$

$$P_6(t) = 1 - 333t - 17390t^2 - 54390t^3 + 26640t^4 - 64158t^5 + 3774t^6,$$

$$P_7(t) = 1 - 301t - 36421t^2 - 310245t^3 + 10535t^4 - 422303t^5 + 283843t^6 - 12857t^7,$$

$$P_8(t) = 1 - 294t - 101528t^2 - 1798692t^3 - 2747430t^4 - 387933t^5 - 2086028t^6 \\ + 740544t^7 - 26999t^8.$$

*Irrationality of π^2 , periods of an elliptic curve and $\Gamma_1(5)$, Progress in Math., 31 Birkhäuser, (1983).

とおき, $n \geq 10$, $n \not\equiv 4 \pmod{5}$ なる n に対し, 多項式 $P_n(t)$ を漸化的に

$$P_n(t) = (1+t^2)(1-522t-10006t^2+522t^3+t^4)P_{n-5}(t) \\ + 12 \frac{(6n-29)(6n-49)}{(n-4)(n-9)} t(1-11t-t^2)^5 P_{n-10}(t)$$

で定義する. このとき $P_n(t)$ は任意の $n \geq 0$, $n \not\equiv 4 \pmod{5}$ について (b)_{(6n+1)/5} の解である.

証明には §II-3 の準モジュラー解のときに用いた $(\sharp)_k$ の $k \pmod{6}$ での帰納的構造を用いる. あまりスマートな解の記述ではないが, 非自明な多項式解を持つ系列として面白いのかもしれない.

この多項式の $\text{mod } p$ を計算してみると, やはり超特異楕円曲線と結びつくようである. それを予想として述べて置く. $(\Gamma_1(5))$ に対応する楕円曲線の族の方程式は知られているから (例えば前記 Beukers の論文参照) $ss_p(X)$ のときと同様の証明を遂行するのに原理的な困難は無いはずだが....) まず $j(\tau)$ と $t(\tau)$ の関係式

$$j(\tau) = \frac{(1+228t(\tau)+494t(\tau)^2-228t(\tau)^3+t(\tau)^4)^3}{t(\tau)(1-11t(\tau)-t(\tau)^2)^5}$$

から, t の値に対応する j の値を

$$j(t) = \frac{(1+228t+494t^2-228t^3+t^4)^3}{t(1-11t-t^2)^5}$$

とする. 素数 p に対し, $ss_p^{(5)}(t)$ で “supersingular t -polynomial”, すなわち

$$ss_p^{(5)}(t) = \prod_{t_0 \in \bar{\mathbf{F}}_p} (t - t_0),$$

ここで t_0 は対応する楕円曲線が supersingular, つまり $j(t_0)$ が $ss_p(X)$ の根であるような値をわたる, とする (表 17). このとき,

予想

(i) $p \neq 5$ を素数とする. このとき

$$P_{p-1}(t) \text{ mod } p = ss_p^{(5)}(t)$$

であろう.

(ii) $p \geq 7$ に対し, $P_{p-1}(t) \text{ mod } p$ の既約分解は次のようであろう.

- $p \equiv 1 \pmod{5}$ のとき, 全ての既約因子は 2 次である.
- $p \equiv 3, 7 \pmod{20}$ のとき, 2 次の既約因子が一つあり, 残りは 4 次である.
- $p \equiv 13, 17 \pmod{20}$ のとき, 全ての既約因子は 4 次である.
- $p \equiv 4 \pmod{5}$ のとき, h 個の 1 次因子と $(p-1-h)/2$ 個の 2 次因子を持つ. ここに h は $p \equiv 1 \pmod{4}$, $p \equiv 3 \pmod{8}$ または $p \equiv 7 \pmod{8}$ に応じて $\mathbf{Q}(\sqrt{-p})$ の類数の 2 倍, 8 倍または 4 倍である.

II-5. 補足

どのような k に対して $(\#)_k$ がモジュラー形式の解を持つかという問題は、結局 $SL_2(\mathbf{Z})$ の特定な型の 2 次元表現を分類する問題になり、原理的には遂行可能な筈である。共形場理論のモデルの表を見ていると、どうもこれまでに述べた以外にモジュラーな解はなさそうで、ないと言い切るのは大切な仕事であろうが、何となく気乗りがせずに放ってある。

より高階の方程式で同じようなことを考えるのも無意味ではなかろう。例えば三階でも共形場理論やアフィンリー環の指標に関係する解がいろいろ出てくるようである (Ising 模型, Andrews-Gordon 恒等式に出てくるモジュラー関数 etc.) 三階になると係数の正則性と解空間の $SL_2(\mathbf{Z})$ 不変性だけでは方程式は一意に特徴づかず、重さ以外に一次元自由度が入るので、このパラメータをどう選ぶかが問題となる。

また二階で係数に極を許す方向も考えられる。これは島根大の堤裕之君がいろいろと計算している。

参考文献

- [1] O. Atkin, Note on a paper of Rankin, *Bull. London Math. Soc.*, **1** (1969), 191–192.
- [2] O. Atkin, note for the talk at MPI Bonn, 1985. 6. 20 (unpublished).
- [3] T. Asai, M. Kaneko and H. Ninomiya, Zeros of certain modular functions and an application, *Comment. Math. Univ. St Pauli*, **46-1** (1997), 93–101.
- [4] F. Beukers, Irrationality of π^2 , periods of an elliptic curve and $\Gamma_1(5)$, “Approximations Diophantiennes et Nombres Transcendants,” *Progress in Math.*, **31**, Birkhäuser, (1983), 47–66.
- [5] R. Borcherds, Automorphic forms with singularities on Grassmannians, *Invent. Math.*, **132** (1998), 491–562.
- [6] G. H. Hardy, Ramanujan, Chelsea Publishing Company, New York 1959.
- [7] T. Ibukiyama, Modular forms of rational weights and modular varieties, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **70** (2000), 315–339.
- [8] 金子昌信, Jacobi polynomials, certain elliptic modular forms and supersingular elliptic curves, *数理解析研究所講究録* **925** (1995), 178–185.
- [9] M. Kaneko, On the zeros of certain modular forms, *Number Theory and its Applications*, (S. Kanemitsu and K. Györy eds.), Kluwer Academic Publishers, (1999), 193–197.
- [10] M. Kaneko and M. Koike, On modular forms arising from a differential equation of hypergeometric type, to appear in *The Ramanujan Journal*.
- [11] M. Kaneko and M. Koike, Quasimodular forms as solutions to a differential equation of hypergeometric type, to appear in *Developments in Mathematics series*, Kluwer.

- [12] M. Kaneko and N. Todaka, Hypergeometric modular forms and supersingular elliptic curves, Proceedings on Moonshine and related topics (J. McKay and A. Sebbar ed.), CRM Proceedings and Lecture Notes, **30** (2002), 79–83.
- [13] M. Kaneko and D. Zagier, Supersingular j -invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 7 (1998), 97–126.
- [14] N. Kanou, Transcendency of zeros of Eisenstein series, *Proc. Japan Acad.*, **76** Ser. A, (2000), 51–54.
- [15] E. B. Kiritsis, Fuchsian differential equations for characters on the torus: a classification, *Nuclear Phys.*, **B324** (1989), 475–494.
- [16] M. I. Knopp, Rademacher on $J(\tau)$, Poincaré series of nonpositive weights and the Eichler cohomology, *Notices Amer. Math. Soc.*, **37-4** (1990), 385–393.
- [17] W. Kohnen, Transcendence of zeros of Eisenstein series and other modular functions, to appear in *Comment. Math. Univ. St Pauli*.
- [18] S. D. Mathur, S. Mukhi and A. Sen, On the classification of rational conformal field theories, *Physics Letters B*, **213-3** (1988), 303–308.
- [19] H. Rademacher, The Fourier series and the functional equation of the absolute modular invariant $J(\tau)$, *Amer. J. Math.*, **61** (1939), 237–248.
- [20] R. A. Rankin, The zeros of Eisenstein series, *Publ. Ramanujan Inst.* , **1** (1969), 137–144.
- [21] R. A. Rankin, The zeros of certain Poincaré series, *Compositio Math.* , **46** (1982), 255–272.
- [22] F. K. C. Rankin and H. P. F. Swinnerton-Dyer, On the zeros of Eisenstein series, *Bull. London Math. Soc.* , **2** (1970), 169–170.
- [23] T. Schneider, Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale, *Math. Ann.*, **113** (1937), 1–13.
- [24] セール, 数論講義, 岩波書店 (1979).
- [25] J.-P. Serre, Congruences et formes modulaires, *Sém. Bourbaki 1971/72*, **416** (全集 95).
- [26] K. Wohlfahrt, Über die Nullstellen einiger Eisensteinreihen, *Math. Nachr.* , **26** (1964), 381–383.

表 2: Eisenstein 級数の零点多項式 ($\delta, \varepsilon > 0$ のときはそれぞれ 0, 1728 で零点を持つ)

k	δ	ε	$P_{E_k}(X)$	k	δ	ε	$P_{E_k}(X)$
12	0	0	$X - \frac{432000}{691}$	24	0	0	$X^2 - \frac{340364160000}{236364091}X + \frac{30710845440000}{236364091}$
16	1	0	$X - \frac{3456000}{3617}$	28	1	0	$X^2 - \frac{5699870640000}{3392780147}X + \frac{1180807372800000}{3392780147}$
18	0	1	$X - \frac{9504000}{43867}$	30	0	1	$X^2 - \frac{1612885487040000}{1723168255201}X + \frac{77698438963200000}{1723168255201}$
20	2	0	$X - \frac{209520000}{174611}$	32	2	0	$X^2 - \frac{14801896399104000}{7709321041217}X + \frac{4840290216345600000}{7709321041217}$
22	1	1	$X - \frac{35424000}{77683}$	34	1	1	$X^2 - \frac{178315348320000}{151628697551}X + \frac{22238265139200000}{151628697551}$
26	2	1	$X - \frac{457920000}{657931}$	38	2	1	$X^2 - \frac{218361651684192000}{154210205991661}X + \frac{47155010330419200000}{154210205991661}$
k	δ	ε	$P_{E_k}(X)$				
36	0	0	$X^3 - \frac{56840986554595372944000}{26315271553053477373}X^2 + \frac{25407925737790369996800000}{26315271553053477373}X - \frac{711559817674938777600000000}{26315271553053477373}$				
40	1	0	$X^3 - \frac{626598524391477891840000}{261082718496449122051}X^2 + \frac{355281363925023656448000000}{261082718496449122051}X - \frac{2701454242875369062400000000}{261082718496449122051}$				
42	0	1	$X^3 - \frac{2517281698328325249408000}{1520097643918070802691}X^2 + \frac{794257099004167042867200000}{1520097643918070802691}X - \frac{14264292158972028518400000000}{1520097643918070802691}$				
44	2	0	$X^3 - \frac{6679984699032245816400000}{2530297234481911294093}X^2 + \frac{4589149488283707309342720000}{2530297234481911294093}X - \frac{619900768147667101286400000000}{2530297234481911294093}$				
46	1	1	$X^3 - \frac{49168317720959020068480000}{25932657025822267968607}X^2 + \frac{20663763501904114880102400000}{25932657025822267968607}X - \frac{1070876844735655359283200000000}{25932657025822267968607}$				
50	2	1	$X^3 - \frac{42297687615797845143274080000}{19802288209643185928499101}X^2 + \frac{22351714002905339638890086400000}{19802288209643185928499101}X - \frac{2168284086442471069974528000000000}{19802288209643185928499101}$				

表 3: $P_{E_k}(X)$ の根の近似値

k	根の近似値	k	根の近似値
12	625.181	26	696.000
24	96.727, 1343.273	38	265.869, 1150.131
36	29.990, 582.725, 1547.285	50	124.728, 640.366, 1370.906
48	12.903, 278.423, 964.354, 1624.320	62	67.692, 374.191, 926.037, 1488.080
60	6.680, 151.115, 582.852, 1198.319, 1661.035	74	40.649, 233.569, 621.505, 1123.769, 1556.508
16	955.488	18	216.655
28	242.033, 1437.967	30	50.947, 885.053
40	89.696, 729.945, 1580.359	42	19.102, 395.810, 1241.087
52	42.252, 382.895, 1055.529, 1639.324	54	9.119, 202.256, 746.861, 1417.764
64	23.108, 220.070, 673.531, 1254.264, 1669.027	66	5.039, 115.675, 460.180, 1000.342, 1514.765
20	1199.924	22	456.007
32	418.012, 1501.988	34	141.815, 1034.185
44	178.168, 856.626, 1605.207	46	60.163, 522.697, 1313.140
56	90.523, 485.426, 1132.739, 1651.311	58	30.782, 287.135, 841.875, 1456.207
68	51.903, 293.318, 756.873, 1302.231, 1675.676	70	17.783, 172.002, 543.014, 1065.893, 1537.307

表 4: Atkin の直交多項式 $A_n(X)$

n	$A_n(X)$
0	1
1	$X - 720$
2	$X^2 - 1640X + 269280$
3	$X^3 - \frac{12576}{5}X^2 + 1526958X - 107765856$
4	$X^4 - 3384X^3 + 3528552X^2 - 1133263680X + 44184000960$
5	$X^5 - \frac{12752}{3}X^4 + 6276237X^3 - 3725740832X^2 + 743683026790X - 18343724398560$
6	$X^6 - \frac{56280}{11}X^5 + \frac{107473392}{11}X^4 - 8530590848X^3 + 3313730346654X^2$ $-451680528901680X + 7674347243833920$
7	$X^7 - \frac{77760}{13}X^6 + \frac{182140890}{13}X^5 - 16192908000X^4 + 9526679156520X^3$ $-2625575462743296X^2 + 260117286781088940X - 3227358183233849280$
8	$X^8 - \frac{34232}{5}X^7 + 18997848X^6 - 27357715392X^5 + 21712146798600X^4 - 9276503963281344X^3$ $+ \frac{9569428083006507072}{5}X^2 - 144093381719940266496X + 1362313994259911121792$
9	$X^9 - \frac{131088}{17}X^8 + \frac{840865833}{34}X^7 - \frac{725390184288}{17}X^6 + 42757015780305X^5$ $-25033362243049584X^4 + 8160074959363315956X^3 - 1309806391050643540608X^2$ $+77494040966860890204870X - 576679534187816788835040$
10	$X^{10} - \frac{162936}{19}X^9 + \frac{593015488}{19}X^8 - \frac{20276254282496}{323}X^7 + \frac{1293792315071445}{17}X^6$ $-56898948368134824X^5 + 25755382322033519376X^4 - 6635474022393919536768X^3$ $+853153171976052615016998X^2 - 40716853474206045161992560X$ $+244653763082978694519455040$

表 5: $A_n(X)$ の根の近似値

n	近似値
1	720.000
2	185.083, 1454.917
3	81.047, 827.721, 1606.432
4	45.034, 502.267, 1176.874, 1659.825
5	28.559, 331.809, 843.603, 1362.197, 1684.498
6	19.695, 234.046, 621.232, 1074.330, 1469.196, 1697.864
7	14.391, 173.413, 472.222, 849.844, 1229.934, 1535.830, 1705.903
8	10.970, 133.418, 369.352, 681.749, 1022.119, 1337.774, 1579.909, 1711.109
9	8.636, 105.725, 296.002, 555.790, 853.167, 1151.702, 1414.869, 1610.495, 1714.672
10	6.974, 85.790, 242.131, 460.185, 718.221, 990.603, 1250.310, 1471.600, 1632.549, 1717.216

表 6: $H_n(X) = (X - 720)|T_n$

n	$H_n(X)$
1	$X - 720$
2	$X^2 - 1488X + 159840$
3	$X^3 - 2232X^2 + 1069956X - 36866880$
4	$X^4 - 2976X^3 + 2533680X^2 - 561444608X + 8507424960$
5	$X^5 - 3720X^4 + 4550940X^3 - 2028551200X^2 + 246683410950X - 1963211493600$
6	$X^6 - 4464X^5 + 7121736X^4 - 4850017536X^3 + 1304194222980X^2 - 96687754014528X + 453039686271360$
7	$X^7 - 5208X^6 + 10246068X^5 - 9437674400X^4 + 4079701128594X^3 - 720168419610864X^2 + 34993297342013192X - 104545516658693760$
8	$X^8 - 5952X^7 + 13923936X^6 - 16203352576X^5 + 9778267498800X^4 - 2895840108006912X^3 + 355479814776346880X^2 - 11941355072680120320X + 24125403112135459200$
9	$X^9 - 6696X^8 + 18155340X^7 - 25558882848X^6 + 19911358807902X^5 - 8462621974879728X^4 + 1807128632206069128X^3 - 160958016085240175040X^2 + 3894864835363363281933X - 5567288717204029449360$
10	$X^{10} - 7440X^9 + 22940280X^8 - 37916096000X^7 + 36296842633500X^6 - 20302880596711488X^5 + 6374905736966075360X^4 - 1018904531858621598720X^3 + 68051488066250903929350X^2 - 1225667011364362067493600X + 1284733088879405339419200$

表 7: $H_n(X)$ の根の近似値

n	近似値
1	720.000
2	116.548, 1371.452
3	37.312, 632.483, 1562.205
4	16.334, 315.420, 1011.124, 1633.121
5	8.548, 176.222, 632.836, 1235.596, 1666.796
6	5.019, 107.623, 410.748, 882.659, 1372.635, 1685.315
7	3.194, 70.312, 278.520, 632.833, 1065.804, 1460.778, 1696.558
8	2.156, 48.384, 196.484, 462.643, 818.752, 1199.396, 1520.297, 1703.887
9	1.524, 34.686, 143.376, 345.945, 632.833, 968.337, 1298.192, 1562.181, 1708.925
10	1.116, 25.699, 107.652, 264.371, 495.036, 780.733, 1087.530, 1372.635, 1592.688, 1712.537

表 8: $(X - 744)|T_n$

n	$(X - 744) T_n$
1	$X - 744$
2	$X^2 - 1488X + 159768$
3	$X^3 - 2232X^2 + 1069956X - 36866976$
4	$X^4 - 2976X^3 + 2533680X^2 - 561444608X + 8507424792$
5	$X^5 - 3720X^4 + 4550940X^3 - 2028551200X^2 + 246683410950X - 1963211493744$
6	$X^6 - 4464X^5 + 7121736X^4 - 4850017536X^3 + 1304194222980X^2 - 96687754014528X + 453039686271072$
7	$X^7 - 5208X^6 + 10246068X^5 - 9437674400X^4 + 4079701128594X^3 - 720168419610864X^2 + 34993297342013192X - 104545516658693952$
8	$X^8 - 5952X^7 + 13923936X^6 - 16203352576X^5 + 9778267498800X^4 - 2895840108006912X^3 + 355479814776346880X^2 - 11941355072680120320X + 24125403112135458840$
9	$X^9 - 6696X^8 + 18155340X^7 - 25558882848X^6 + 19911358807902X^5 - 8462621974879728X^4 + 1807128632206069128X^3 - 160958016085240175040X^2 + 3894864835363363281933X - 5567288717204029449672$
10	$X^{10} - 7440X^9 + 22940280X^8 - 37916096000X^7 + 36296842633500X^6 - 20302880596711488X^5 + 6374905736966075360X^4 - 1018904531858621598720X^3 + 68051488066250903929350X^2 - 1225667011364362067493600X + 1284733088879405339418768$

表 9: $(X - 744)|T_n$ の根の近似値

n	近似値
1	744.000
2	116.491, 1371.509
3	37.312, 632.482, 1562.205
4	16.334, 315.420, 1011.124, 1633.121
5	8.548, 176.222, 632.836, 1235.596, 1666.796
6	5.019, 107.623, 410.748, 882.659, 1372.635, 1685.315
7	3.194, 70.312, 278.520, 632.833, 1065.804, 1460.778, 1696.558
8	2.156, 48.384, 196.484, 462.643, 818.752, 1199.396, 1520.297, 1703.887
9	1.524, 34.686, 143.376, 345.945, 632.833, 968.337, 1298.192, 1562.181, 1708.925
10	1.116, 25.699, 107.652, 264.371, 495.036, 780.733, 1087.530, 1372.635, 1592.688, 1712.537

表 10: $F_k(\tau)$ の零点多項式 ($k \not\equiv 2 \pmod{3}$)

k	$P_{F_k}(X)$	k	$P_{F_k}(X)$	k	$P_{F_k}(X)$
12	$X - \frac{6912}{7}$	24	$X^2 - \frac{34560}{19}X + \frac{119439360}{247}$	36	$X^3 - \frac{82944}{31}X^2 + \frac{286654464}{155}X - \frac{660451885056}{2945}$
16	$X - \frac{13824}{11}$	28	$X^2 - \frac{48384}{23}X + \frac{334430208}{391}$	40	$X^3 - \frac{20736}{7}X^2 + \frac{71663616}{29}X - \frac{330225942528}{667}$
18	$X - \frac{6912}{13}$	30	$X^2 - \frac{6912}{5}X + \frac{23887872}{95}$	42	$X^3 - \frac{82944}{37}X^2 + \frac{1433272320}{1147}X - \frac{660451885056}{5735}$
22	$X - \frac{13824}{17}$	34	$X^2 - \frac{48384}{29}X + \frac{334430208}{667}$	46	$X^3 - \frac{103680}{41}X^2 + \frac{71663616}{41}X - \frac{330225942528}{1189}$
k	$P_{F_k}(X)$				
48	$X^4 - \frac{152064}{43}X^3 + \frac{6306398208}{1591}X^2 - \frac{72649707356160}{49321}X + \frac{2510773886228896}{246605}$				
52	$X^4 - \frac{179712}{47}X^3 + \frac{9316270080}{1927}X^2 - \frac{4292937252864}{1927}X + \frac{14836391145897984}{55883}$				
54	$X^4 - \frac{152064}{49}X^3 + \frac{6306398208}{2107}X^2 - \frac{72649707356160}{77959}X + \frac{125538694311444480}{2416729}$				
58	$X^4 - \frac{179712}{53}X^3 + \frac{9316270080}{2491}X^2 - \frac{150252803850240}{102131}X + \frac{14836391145897984}{102131}$				

表 11: $P_{F_k}(X)$ の根の近似値

k	根の近似値
12	987.429
24	323.315, 1495.633
36	153.326, 903.609, 1618.678
48	88.628, 567.968, 1214.790, 1664.986
60	57.557, 383.446, 887.365, 1383.046, 1687.132
72	40.331, 274.429, 662.390, 1103.131, 1481.708, 1699.383
16	1256.727
28	550.809, 1552.843
40	293.199, 1030.537, 1638.550
52	179.857, 687.857, 1281.920, 1674.026
64	121.061, 482.534, 969.035, 1421.505, 1691.967
76	86.875, 354.447, 741.866, 1158.143, 1505.477, 1702.262
18	531.692
30	215.484, 1166.916
42	114.465, 709.757, 1417.507
54	70.609, 462.846, 1036.714, 1533.178
66	47.805, 322.325, 764.015, 1236.810, 1594.946
78	34.479, 236.283, 578.394, 984.460, 1363.762, 1631.553
22	813.176
34	393.178, 1275.236
46	226.432, 837.113, 1465.235
58	146.170, 572.532, 1114.304, 1557.786
70	101.866, 411.405, 845.755, 1285.354, 1609.157
82	74.950, 308.256, 654.343, 1043.064, 1395.599, 1640.462

表 12: D.E.S.D. コードのテータの平均の零点多項式

k	$P_{\Theta_C^{(k)}}(X)$	k	$P_{\Theta_C^{(k)}}(X)$
12	$X - \frac{518784}{1025}$	24	$X^2 - \frac{1126806528}{838861}X + \frac{358849019904}{4194305}$
16	$X - \frac{97280}{113}$	28	$X^2 - \frac{397059712}{253241}X + \frac{64433094656}{253241}$
18	$X - \frac{40704}{257}$	30	$X^2 - \frac{503565824}{617093}X + \frac{16504913920}{617093}$
20	$X - \frac{121472}{109}$	32	$X^2 - \frac{31543199744}{17602325}X + \frac{658626576384}{1354025}$
22	$X - \frac{860416}{2325}$	34	$X^2 - \frac{52550341376}{50529027}X + \frac{24401559617536}{252645135}$
26	$X - \frac{1284608}{2169}$	38	$X^2 - \frac{338515712}{267813}X + \frac{1476198400}{6867}$
k	$P_{\Theta_C^{(k)}}(X)$		
36	$X^3 - \frac{6926919963264}{3435973837}X^2 + \frac{2652630646063104}{3435973837}X - \frac{248220139256807424}{17179869185}$		
40	$X^3 - \frac{123145297250304}{54975581389}X^2 + \frac{60940809008152576}{54975581389}X - \frac{3374520498997166080}{54975581389}$		
42	$X^3 - \frac{13301409211392}{8939118925}X^2 + \frac{3425665877999616}{8939118925}X - \frac{8075188247724032}{1787823785}$		
44	$X^3 - \frac{74736459076224}{30331355249}X^2 + \frac{226772336078880768}{151656776245}X - \frac{1819607591223820288}{11665905865}$		
46	$X^3 - \frac{980876813312}{572942063}X^2 + \frac{344681170468864}{572942063}X - \frac{63216664023400448}{2864710315}$		
50	$X^3 - \frac{53503736374528}{27636227463}X^2 + \frac{8015830946545664}{9212075821}X - \frac{134041330673254400}{2125863651}$		

表 13: $P_{\Theta_C^{(k)}}(X)$ の根の近似値

k	根の近似値	k	根の近似値
12	506.131	26	592.258
24	67.039, 1276.219	38	202.519, 1061.482
36	19.721, 484.688, 1511.591	50	89.437, 539.281, 1307.282
48	8.267, 213.217, 863.538, 1602.978	62	46.771, 295.218, 823.768, 1442.243
60	4.214, 109.931, 484.708, 1114.161, 1646.985	74	27.393, 175.985, 521.277, 1032.879, 1522.466
16	860.885	18	158.381
28	183.828, 1384.084	30	34.210, 781.819
40	63.223, 626.106, 1550.671	42	12.376, 314.247, 1161.377
52	28.608, 302.828, 959.636, 1620.928	54	5.792, 150.542, 642.781, 1360.885
64	15.260, 164.951, 571.173, 1176.013, 1656.605	66	3.161, 82.586, 371.623, 901.226, 1473.405
20	1114.422	22	370.071
32	333.513, 1458.477	34	103.088, 936.915
44	131.143, 752.673, 1580.184	46	41.453, 428.663, 1241.884
56	63.589, 394.518, 1042.590, 1635.303	58	20.556, 220.498, 737.717, 1405.229
68	35.377, 225.717, 652.671, 1229.618, 1664.616	70	11.635, 126.345, 447.481, 970.688, 1499.852

表 14: Extremal modular form の零点多項式

k	$P_{F_{ex}^{(k)}}(X)$	k	$P_{F_{ex}^{(k)}}(X)$	k	$P_{F_{ex}^{(k)}}(X)$
12	$X - 720$	24	$X^2 - 1440X + 125280$	36	$X^3 - 2160X^2 + 965520X - 27302400$
16	$X - 960$	28	$X^2 - 1680X + 347760$	40	$X^3 - 2400X^2 + 1360800X - 103488000$
18	$X - 216$	30	$X^2 - 936X + 45144$	42	$X^3 - 1656X^2 + 522504X - 9380160$
20	$X - 1200$	32	$X^2 - 1920X + 627840$	44	$X^3 - 2640X^2 + 1813680X - 244992000$
22	$X - 456$	34	$X^2 - 1176X + 146664$	46	$X^3 - 1896X^2 + 796824X - 41294400$
26	$X - 696$	38	$X^2 - 1416X + 305784$	50	$X^3 - 2136X^2 + 1128744X - 109496640$
k	$P_{F_{ex}^{(k)}}(X)$				
48	$X^4 - 2880X^3 + 2324160X^2 - 465638400X + 5611550400$				
52	$X^4 - 3120X^3 + 2892240X^2 - 779251200X + 27992437200$				
54	$X^4 - 2376X^3 + 1518264X^2 - 227810880X + 1953107640$				
56	$X^4 - 3360X^3 + 3517920X^2 - 1199654400X + 82194386400$				
58	$X^4 - 2616X^3 + 1965384X^2 - 410061120X + 10835705160$				
62	$X^4 - 2856X^3 + 2470104X^2 - 670071360X + 34904945880$				
60	$X^5 - 3600X^4 + 4201200X^3 - 1740672000X^2 + 186755382000X - 1172065593600$				
64	$X^5 - 3840X^4 + 4942080X^3 - 2416128000X^2 + 363531168000X - 7170206883840$				
66	$X^5 - 3096X^4 + 3032424X^3 - 1021665600X^2 + 85731517800X - 406396668096$				
68	$X^5 - 4080X^4 + 5740560X^3 - 3239846400X^2 + 637695248400X - 25143846094080$				
70	$X^5 - 3336X^4 + 3652344X^3 - 1478667840X^2 + 178203868920X - 2721578118336$				

表 15: $P_{F_{ex}^{(k)}}(X)$ の根の近似値

k	根の近似値	k	根の近似値
12	720.000	26	696.000
24	93.007, 1346.993	38	265.869, 1150.131
36	30.303, 582.232, 1547.465	50	124.728, 640.366, 1370.906
48	12.864, 278.487, 964.318, 1624.331	62	67.692, 374.191, 926.037, 1488.080
60	6.686, 151.105, 582.857, 1198.316, 1661.035	74	40.649, 233.569, 621.505, 1123.769, 1556.508
16	960.000	18	216.000
28	241.803, 1438.197	30	51.011, 884.989
40	89.714, 729.914, 1580.373	42	19.095, 395.822, 1241.084
52	42.250, 382.899, 1055.527, 1639.325	54	9.120, 202.254, 746.862, 1417.764
64	23.108, 220.069, 673.531, 1254.264, 1669.027	66	5.038, 115.675, 460.180, 1000.342, 1514.765
20	1200.000	22	456.000
32	418.004, 1501.996	34	141.816, 1034.184
44	178.168, 856.624, 1605.207	46	60.163, 522.697, 1313.140
56	90.523, 485.427, 1132.739, 1651.311	58	30.782, 287.135, 841.875, 1456.207
68	51.903, 293.318, 756.873, 1302.231, 1675.676	70	17.783, 172.002, 543.014, 1065.893, 1537.307

表 16: Supersingular j -polynomial

p	$ss_p(X)$
2	X
3	X
5	X
7	$X + 1$
11	$X(X - 1)$
13	$X - 5$
17	$X(X - 8)$
19	$(X + 1)(X - 7)$
23	$X(X - 3)(X + 4)$
29	$X(X - 2)(X + 4)$
31	$(X - 2)(X - 4)(X + 8)$
37	$(X - 8)(X^2 - 6X - 6)$
41	$X(X - 3)(X + 9)(X + 13)$
43	$(X + 2)(X - 8)(X^2 + 19X + 16)$
47	$X(X + 3)(X - 9)(X - 10)(X + 11)$
53	$X(X + 3)(X + 7)(X^2 - 3X - 14)$
59	$X(X + 11)(X + 12)(X - 15)(X - 17)(X - 28)$
61	$(X - 9)(X + 11)(X + 20)(X^2 - 23X + 24)$
67	$(X + 1)(X + 14)(X^2 + 8X - 22)(X^2 - 23X + 24)$
71	$X(X + 5)(X - 17)(X + 23)(X - 24)(X + 30)(X + 31)$
73	$(X - 9)(X + 17)(X^2 - 5X + 9)(X^2 - 16X + 8)$
79	$(X + 10)(X - 15)(X + 15)(X - 17)(X - 21)(X^2 + 14X - 17)$
83	$X(X + 15)(X + 16)(X - 17)(X - 28)(X + 33)(X^2 + 7X - 10)$
89	$X(X - 6)(X - 7)(X - 13)(X + 23)(X + 37)(X^2 + 26X - 33)$
97	$(X - 1)(X - 20)(X^2 + 7X + 45)(X^2 + 32X - 30)(X^2 + 42X + 8)$
101	$X(X - 3)(X - 21)(X + 35)(X + 37)(X + 42)(X + 44)(X^2 + 27X - 47)$
103	$(X - 23)(X + 23)(X - 24)(X - 34)(X + 34)(X^2 - 19X - 30)(X^2 - 40X - 34)$
107	$X(X + 13)(X - 16)(X + 26)(X + 35)(X - 47)(X^2 - 25X + 30)(X^2 - 41X - 49)$
109	$(X - 17)(X - 41)(X - 43)(X^2 + 22X + 23)(X^2 - 31X - 23)(X^2 - 48X + 17)$
113	$X(X + 14)(X + 41)(X - 54)(X^2 + 9X - 31)(X^2 + 18X + 38)(X^2 + 32X - 48)$
127	$(X + 1)(X + 2)(X + 32)(X + 50)(X + 54)(X^2 + 17X + 38)(X^2 - 32X - 25)$ $(X^2 - 39X + 8)$
131	$X(X - 10)(X + 18)(X - 25)(X - 28)(X - 31)(X + 37)(X + 49)(X - 50)(X - 62)$ $(X^2 - 47X - 42)$
137	$X(X + 1)(X - 22)(X + 59)(X^2 - 9X - 35)(X^2 + 30X - 46)(X^2 - 38X - 24)$ $(X^2 + 39X - 18)$
139	$(X - 8)(X - 36)(X + 39)(X - 44)(X - 60)(X - 65)(X^2 + 8X + 8)(X^2 + 25X - 45)$ $(X^2 + 32X + 23)$
149	$X(X - 12)(X - 30)(X + 46)(X - 62)(X - 68)(X - 74)(X^2 + 18X + 22)$ $(X^2 - 21X + 18)(X^2 - 35X - 44)$

表 17: Supersingular t -polynomial

p	$ss_p^{(5)}(t)$
2	$t - 1$
3	$t^2 + 1$
5	$t - 2$
7	$(t^2 + 1)(t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 3t + 1)$
11	$(t^2 + 1)(t^2 - 2t - 1)(t^2 + 2t - 1)(t^2 + 3t - 1)(t^2 + 5t - 1)$
13	$(t^4 - 4t^3 - 6t^2 + 4t + 1)(t^4 - 3t^3 - 5t^2 + 3t + 1)(t^4 + 4t^3 - 6t^2 - 4t + 1)$
17	$(t^4 + 4t^3 - 5t^2 - 4t + 1)(t^4 - 5t^3 - 3t^2 + 5t + 1)(t^4 + 5t^3 - 6t^2 - 5t + 1)$ $(t^4 - 7t^3 + t^2 + 7t + 1)$
19	$(t - 1)(t + 1)(t - 3)(t + 4)(t - 5)(t - 6)(t - 7)(t - 8)(t^2 + 1)(t^2 + t - 9)(t^2 - 2t + 2)$ $(t^2 - 3t - 5)(t^2 + 7t - 4)$
23	$(t^2 + 1)(t^4 + 2t^3 + 11t^2 - 2t + 1)(t^4 - 5t^3 + 5t^2 + 5t + 1)(t^4 - 5t^3 - 7t^2 + 5t + 1)$ $(t^4 - 7t^3 - t^2 + 7t + 1)(t^4 - 11t^3 - 9t^2 + 11t + 1)$
29	$(t - 1)(t + 1)(t - 2)(t - 5)(t + 5)(t - 6)(t + 6)(t + 8)(t - 8)(t - 11)(t + 11)(t - 14)$ $(t^2 + 12)(t^2 - 12)(t^2 - t + 10)(t^2 - 3t + 9)(t^2 + 3t + 3)(t^2 - 9t - 6)(t^2 + 10t + 13)(t^2 + 13t - 5)$
31	$(t^2 + 1)(t^2 - t - 5)(t^2 + 3t - 1)(t^2 + 6t + 6)(t^2 + 7t + 5)(t^2 + 7t - 1)(t^2 - 8t - 6)(t^2 + 9t + 5)$ $(t^2 + 10t - 1)(t^2 - 11t + 1)(t^2 + 11t + 1)(t^2 + 11t - 6)(t^2 - 12t - 1)(t^2 + 12t - 1)(t^2 + 15t - 1)$
37	$(t^4 - t^3 - 9t^2 + t + 1)(t^4 - 3t^3 + 6t^2 + 3t + 1)(t^4 + 9t^3 - 10t^2 - 9t + 1)$ $(t^4 + 12t^3 + 17t^2 - 12t + 1)(t^4 - 14t^3 - 12t^2 + 14t + 1)(t^4 + 14t^3 - 12t^2 - 14t + 1)$ $(t^4 - 15t^3 - 6t^2 + 15t + 1)(t^4 + 16t^3 + 8t^2 - 16t + 1)(t^4 + 16t^3 - 7t^2 - 16t + 1)$
41	$(t^2 - t + 14)(t^2 - 2t + 14)(t^2 - 3t + 9)(t^2 + 3t - 1)(t^2 + 3t + 3)(t^2 + 6t + 3)(t^2 - 7t - 1)$ $(t^2 + 7t - 1)(t^2 - 9t - 1)(t^2 - 10t - 1)(t^2 + 10t - 3)(t^2 - 11t + 1)(t^2 + 11t + 1)(t^2 + 13t + 3)$ $(t^2 + 14t - 9)(t^2 + 15t - 1)(t^2 + 17t - 14)(t^2 - 18t + 14)(t^2 - 20t - 1)(t^2 + 20t - 1)$
43	$(t^2 + 1)(t^4 + 2t^3 - 19t^2 - 2t + 1)(t^4 - 3t^3 + 12t^2 + 3t + 1)(t^4 + 4t^3 + 3t^2 - 4t + 1)$ $(t^4 + 6t^3 + 13t^2 - 6t + 1)(t^4 - 14t^3 + 20t^2 + 14t + 1)(t^4 + 14t^3 + 20t^2 - 14t + 1)$ $(t^4 + 15t^3 - 5t^2 - 15t + 1)(t^4 + 18t^3 - 12t^2 - 18t + 1)(t^4 + 18t^3 - 15t^2 - 18t + 1)$ $(t^4 - 20t^3 - 20t^2 + 20t + 1)$
47	$(t^2 + 1)(t^4 - 2t^3 - 16t^2 + 2t + 1)(t^4 + 2t^3 + 15t^2 - 2t + 1)(t^4 + 5t^3 + 5t^2 - 5t + 1)$ $(t^4 + 7t^3 - 23t^2 - 7t + 1)(t^4 - 10t^3 + 12t^2 + 10t + 1)(t^4 + 12t^3 + 14t^2 - 12t + 1)$ $(t^4 - 16t^3 - 4t^2 + 16t + 1)(t^4 - 18t^3 + 6t^2 + 18t + 1)(t^4 + 18t^3 + 12t^2 - 18t + 1)$ $(t^4 + 18t^3 - 20t^2 - 18t + 1)(t^4 - 19t^3 - 17t^2 + 19t + 1)$
53	$(t^4 - 3t^3 - 18t^2 + 3t + 1)(t^4 + 3t^3 + 8t^2 - 3t + 1)(t^4 - 11t^3 - 20t^2 + 11t + 1)$ $(t^4 + 12t^3 + 14t^2 - 12t + 1)(t^4 - 16t^3 + 17t^2 + 16t + 1)(t^4 - 17t^3 + 16t^2 + 17t + 1)$ $(t^4 - 17t^3 - 26t^2 + 17t + 1)(t^4 + 18t^3 - 8t^2 - 18t + 1)(t^4 - 19t^3 - 26t^2 + 19t + 1)$ $(t^4 - 21t^3 + 20t^2 + 21t + 1)(t^4 + 21t^3 + 20t^2 - 21t + 1)(t^4 + 22t^3 - 6t^2 - 22t + 1)$ $(t^4 + 25t^3 + 12t^2 - 25t + 1)$
59	$(t - 2)(t - 3)(t + 4)(t - 5)(t + 7)(t + 8)(t + 9)(t + 12)(t + 13)(t - 14)(t - 15)(t - 17)$ $(t + 19)(t + 20)(t - 21)(t + 22)(t - 24)(t + 24)(t - 25)(t + 26)(t - 27)(t + 27)(t - 28)(t - 29)$ $(t^2 + 1)(t^2 + 7)(t^2 + 17)(t^2 + 2t - 7)(t^2 + 3t - 25)(t^2 + 4t - 26)(t^2 + 7t - 28)(t^2 - 11t - 20)$ $(t^2 + 14t + 19)(t^2 + 15t - 19)(t^2 - 16t - 3)(t^2 - 18t - 25)(t^2 + 19t - 26)(t^2 + 21t + 28)$ $(t^2 - 25t - 17)(t^2 - 25t - 20)(t^2 + 26t - 3)$