

ラマヌジャン

金子昌信（九州大学）

ラマヌジャンと聞くと“Taxicab Number”のエピソードをすぐに思い出す。彼の「発見者」、イギリスでの師であり共同研究者であったハーディーが、ラマヌジャンの病床を見舞いに言ったときのことをこう記している（[2], [3]）。

彼が数の色々変わった性質を覚えているさまといったら、もう神秘的とさえ言えた。リトルウッドが言ったのだと思うが、どの自然数もみなラマヌジャンの仲間だった。思い出すのはプトニーで病床にあった彼を見舞いに行ったときのこと。乗ったタクシーのナンバーが 1729 で、どうもつまらない数字（ $7 \cdot 13 \cdot 19$ ）のようだ、何か縁起でもないことの前触れでなければいいのだがと言ったら、「いいえ」、彼が言うには、「非常に面白い数です。二つの 3 乗数の和として、二通りに表せる数の中の最小のものです¹。」そこで私は当然、では 4 乗で同じことを考えたら解はいくつになるのかと尋ねた。ラマヌジャンは、しばらく考えて、そのような数の例は知らないが、最初の数は相当大きいに違いないと答えた²。

1729 と聞いて即座にそのような数であると答えるのも尋常ではないが、4 乗ではどうかときかれ「しばらく考えて」、小さい範囲にはない、と言い切れるのは頭の中でどういう計算をしたものか、不思議でならない。

ラマヌジャンの残した膨大な量の数式の中にはどのようにして思いついたのか、そこに辿りついたものか、常人の理解を全く超えて神秘としか言いようのないものが数多く見られる。あるいは殆どがそうなのかも知れない。そのようなもののごくごく一端を紹介するのがこの小文の目的であるが、私が研究してきた数学とラマヌジャンの数学との直接の接点はそう多くなく、また彼の仕事を組織的に調べたこともないので、すでに有名ないくつかの数式の表面的な記述しか出来そうにない。ご寛恕を請う。幸いごく最近、ラマヌジャンについてずっとよく調べておられる藤原正彦氏の論説（[1]）が出た。是非ご一読され、興味を持たれたらさらにそこに挙げられている文献へと進めたい。

まずロジャース・ラマヌジャンの恒等式と呼ばれる二つの等式

$$\begin{aligned} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})} &= 1 + \frac{q^{1^2}}{1-q} + \frac{q^{2^2}}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^{3^2}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots, \\ \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})} &= 1 + \frac{q^{1 \cdot 2}}{1-q} + \frac{q^{2 \cdot 3}}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^{3 \cdot 4}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots \end{aligned}$$

¹1729 = 12³ + 1³ = 10³ + 9³.

²オイラーが 635318657 = 158⁴ + 59⁴ = 134⁴ + 133⁴ を与えている。

からはじめよう。これはロジャースが既に発表していたのを知らずに再発見したもので、はじめインド数学会のジャーナルに問題として提出された。バクスターの可解格子模型の仕事
を筆頭に、数学、数理物理学の様々な文脈で登場する実に見事な等式である。

これらの式にそれぞれ $q^{-1/60}$, $q^{11/60}$ を掛けたものは、 $q = \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau)$ として複素上半
平面 $\{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\tau) > 0\}$ 上の関数と見たとき、モジュラー関数という素性のよい関数になっ
ている。有名なヤコビの3重積公式（後述）によれば、これらの関数はテータ級数とデデキ
ントのエータ関数との比として

$$q^{-\frac{1}{60}} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})} = \frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{(10n+1)^2}{40}}}{q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)}, \quad (1)$$

$$q^{\frac{11}{60}} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})} = \frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{(10n+3)^2}{40}}}{q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)} \quad (2)$$

とも表される。右辺の分母がデデキントのエータ関数（重さ $1/2$ のモジュラー形式）

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)$$

であるが、ついでに言うと、オイラーの5角数定理によればこれもテータ級数としての表示
を持つ。

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} - q^{\frac{25}{24}} - q^{\frac{49}{24}} + q^{\frac{121}{24}} + q^{\frac{169}{24}} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \chi(n) q^{\frac{n^2}{24}},$$

ここに

$$\chi(n) = \begin{cases} 1, & n \equiv \pm 1 \pmod{12}, \\ -1, & n \equiv \pm 5 \pmod{12}, \\ 0, & (n, 12) > 1 \end{cases}$$

は12を法とする指標である。

エータ関数の逆数（因子 $q^{1/24}$ は取り去る）が「分割数」 $p(n)$ の母関数である。

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots} = 1 + p(1)q + p(2)q^2 + p(3)q^3 + \dots$$

分割数とは、 n を自然数の和として表す書き方が何通りあるかを数えたものである。例えば
3は3自身も一つに数えて、他に $2+1$, $1+1+1$ と書けるので（ $1+2$ は $2+1$ と同じとみな
す） $p(3) = 3$ 。また

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1,$$

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

より $p(4) = 5, p(5) = 7$ など. ラマヌジャンはハーディーと共同で $p(n)$ の非常に精密な漸近公式を得たほか, 様々な合同式を発見, 証明している. そのうちの最初の二つが

$$\begin{aligned} p(5m+4) &\equiv 0 \pmod{5}, \\ p(7m+5) &\equiv 0 \pmod{7} \end{aligned}$$

であるが, 彼はこれに関連して次の驚異的な等式を発見している. すなわちすべての $p(n)$ の代わりに n が 5 で割って 4 余るものだけ, また 7 で割って 5 余るものだけから成る母関数を考えると,

$$p(4) + p(9)q + p(14)q^2 + p(19)q^3 + \dots = 5 \frac{\{(1-q^5)(1-q^{10})(1-q^{15})\dots\}^5}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots\}^6}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &p(5) + p(12)q + p(19)q^2 + p(26)q^3 + \dots \\ &= 7 \frac{\{(1-q^7)(1-q^{14})(1-q^{21})\dots\}^3}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots\}^4} + 49q \frac{\{(1-q^7)(1-q^{14})(1-q^{21})\dots\}^7}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots\}^8} \end{aligned}$$

が成り立つというものである. 先の合同式はこれらから直ちに従うし, さらに少しの考察で

$$\begin{aligned} p(25m+24) &\equiv 0 \pmod{25}, \\ p(49m+47) &\equiv 0 \pmod{49} \end{aligned}$$

が証明される. 式 (3) はハーディーをして [2] において, ラマヌジャンの全仕事の中から一つだけ公式を選べといわれたらこれを選ぶ, と言わしめたものである.

またエータ関数の 24 乗を展開したときの係数がいわゆるラマヌジャンの $\tau(n)$ で, その性質に関して彼がなした観察, 予想は 20 世紀の整数論の一つの中心として位置し続けその影響は今に及んでいる.

$$\begin{aligned} q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)q^n \\ &= q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + 4830q^5 - 6048q^6 - 16744q^7 + \dots \end{aligned}$$

今は計算機の発達によって, $\tau(n)$ もラマヌジャンの計算したよりずっと先まで計算できる. もしこの $\tau(n)$ の性質についてご存じなければ, 追体験としてご自分で何が発見できるか, やってみられては如何だろう.

上で触れたヤコビの 3 重積公式はラマヌジャンの手にかかると次のような姿をとる. $|ab| < 1$ とするとき

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{n(n+1)/2} b^{n(n-1)/2} &= (1-ab)(1-a^2b^2)(1-a^3b^3)\dots \\ &\quad \times (1+a)(1+a^2b)(1+a^3b^2)\dots \times (1+b)(1+ab^2)(1+a^2b^3)\dots \end{aligned}$$

この式で $a = qz, b = qz^{-1}$ とおいて得られるのが通常目にする 3 重積公式である.

さてまたロジャース・ラマヌジャンの関数に戻って，(1), (2) の比をとって得られる関数を $\phi(\tau)$ と書こう．

$$\phi(\tau) = q^{1/5} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - q^{5n+1})(1 - q^{5n+4})}{(1 - q^{5n+2})(1 - q^{5n+3})}.$$

$\phi(\tau)$ はレベル5のモジュラー関数となっている． $\phi(\tau)$ の次の連分数展開も非常に美しい．

$$\phi(\tau) = q^{1/5} \cdot \frac{1}{1 + \frac{q}{1 + \frac{q^2}{1 + \frac{q^3}{1 + \frac{q^4}{1 + \frac{q^5}{1 + \dots}}}}}}$$

右辺で $q = 1$ とおくと黄金比 (の逆数) の連分数展開になるが，これは実はモジュラー関数 $\phi(\tau)$ の「尖点」 $\tau = 0$ での値に等しい．モジュラー関数を表示するのに通常フーリエ展開 (「 q -展開」) を用いる．尖点 $\tau = 0$ ($q = 1$) での値は $\phi(\tau)$ のフーリエ展開

$$\phi(\tau) = q^{1/5}(1 - q + q^2 - q^4 + q^5 - q^6 + q^7 - q^9 + 2q^{10} - 3q^{11} + 2q^{12} - \dots)$$

からは分からないが，連分数展開を行うと現れ出るのは一寸面白い．

ラマヌジャンはインドからハーディーに宛てた最初の手紙の中に，この連分数に関する次のような等式を書きしたためてハーディーを驚倒させた．まず

$$v = \phi(\tau), \quad u = \phi(5\tau)$$

とおくとき (u は v の q を q^5 にしたもの)

$$v^5 = u \frac{1 - 2u + 4u^2 - 3u^3 + u^4}{1 + 3u + 4u^2 + 2u^3 + u^4} \quad (4)$$

が成り立つ．また

$$\phi(\sqrt{-1}) = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad (5)$$

および

$$\phi(\sqrt{-5}) = \frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt[5]{5^{\frac{3}{4}} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} - 1}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2}. \quad (6)$$

一体どうやってこういう値を計算したのであろう，全く啞然とする外ない．

現代的な言葉遣いで言うと (4) 式はモジュラー関数 $\phi(\tau)$ についてのレベル5のモジュラー方程式 (変換方程式)，(5), (6) は $\phi(\tau)$ の虚数乗法点での値すなわち singular moduli である．ハーディーの言を引こう ([3], p.9)．

..., しかし (4)-(6) には全く圧倒された。それまでにおよそ見たこともないような類の式だった。こんなものを書き下せるのは第一級の数学者しかいない, それは一瞥しただけで分かった。これらの式は正しいに決まっている。間違っているとしたら, 一体誰がこんな式をでっち上げるだけの想像力を持ち合わせているだろうか。

ハーディーの驚嘆ぶりが彷彿とする。

連分数はラマヌジャンの十八番の一つであったろう。最後に一つ, 私のお気に入りを書いてこの稿を終えよう。こういう式が何の役に立つのかなどと問うてはいけない。ただもう, 美の極致と思える。

$$\sqrt{\frac{\pi e}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{4}{1 + \frac{5}{1 + \dots}}}}}} + 1 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots$$

参考文献

- [1] 藤原正彦: Ramanujan の数学, 「数学」第 57 巻 4 号, 2005 年 10 月
- [2] G. H. Hardy: Obituary notice, Proceedings of the London Mathematical Society (2), XIX (1921), pp. xl-lviii. Ramanujan 全集 [4] に所収。
- [3] G. H. Hardy: Ramanujan, Amer. Math. Soc., Chelsea, Providence, RI, 1999.
- [4] S. Ramanujan: Collected Papers, Amer. Math. Soc., Chelsea, Providence, RI, 1999.