Gamma, Exploring Euler's constant, Julian Havil の書評

金子昌信

書名の Gamma は，副題にもあるがオイラー定数 $\gamma = 0.5772156649015328606065120 9\cdots$ のことである．Euler が最初にあてた記号 C をオイラー定数に使う本や論文を見ることもあるが，オイラー定数を表す記号として γ が広く定着していることに異論は無いであろう（γ の使用は Mascheroni に始まり，オイラー定数を Euler-Mascheroni constant とも呼ぶこともある）．本書はこの一つの数 γ をめぐる様々な数学物語をふんだんに盛り込んだ，まさに「γ 探険記」のような本である．数学定数として，その登場する頻度，知名度は円周率 π，自然対数の底 e には遥かに及ばないかもしれないが，γ に関わる数学世界もまた実に豊穣で，しかも神秘に満ちていることを，付録を除く本文 216 ページのこの本は明かしてくれている．書評としての結論を先に書いてしまうと，意欲的な高校生から大学生，中学や高校の数学の先生，あるいは数学に興味を持つ社会人からプロの数学者に至るまで，幅広い読者がそれぞれに楽しんで読むことの出来るすぐれた本であると思う．

著者 Julian Havil はイギリスの名門パブリック・スクール，ウィンチェスター校で 30 年数学教師をしている人で，その縁であろうか，同校出身の物理学者 Freeman Dyson がはしがきを寄せている．（物理学者と書いたが，Dyson はそのはしがきの中で自分のことを professional mathematician と言っている．ついでにまったくの蛇足を書くが，Dyson の学者としての出発は整数論の研究者としてである．その辺の事情を自身で述べた，彼の論文選集冒頭の commentary は非常に面白い読み物である.）Dyson も述べているように，この本は主に 18 世紀の数学に題材をとって，歴史の流れを十分に意識しつつ，自然対数，自然数の逆数和から始まって，ガンマ関数やリーマンゼータ関数，素数の分布など，オイラー定数をめぐる数学が，専門の数学者にはまねの出来そうに無いゆったりとした筆致で書き進められている．裏表紙に著者のにこやかな写真があるが，人柄のよく出たスタイル，とでも言おうか.

オイラー定数 γ は周知の通り極限

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

で定義される．こう書くとまず，この極限の存在を問題にせねばならないが，著者は急がない．Napier による対数の導入の物語（ケプラーの法則まで出てきて楽しい）から始め（第一章），次に「調和級数」（著者は有限和もこう呼ぶ）

$$H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

について，その発散性やこれが決して整数にならないこと，またこれが有限小数になるのは $H_1 = 1, H_2 = 1.5, H_6 = 2.45$ の三つだけに限ることを証明する．この証明に，n と $2n$ の間に必ず素数が存在することを言う Bertrand–Chebychev の定理を使っている．さらに，通常調和級数と呼ばれる

発散無限級数 $H_\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ のいくつかの部分級数についての話題（格子の Madelung constant なども登場する），特に素数の逆数の和の発散などを論じていく（第二，三章）．この素数の逆数和の発散の証明としてここでは Erdös の見事な議論（“proof from The Book”）が紹介されている（Euler の元の証明も後章で取り上げられる）．調和級数から話題は自然にリーマンゼータ関数の整数点での値についての Euler の仕事に及ぶ（第四章）．そう，γ は $\zeta(1) = H_\infty$ の発散を「繰り込んで」得られる値なのである．$\zeta(2) = \pi^2/6$ を考えると，γ は π に何らかの意味で近い数なのだろうか． $\zeta(3)$ との関係は？ いろいろと妄想がわく．第五章では，γ が存在するなら，0 と 1 の間で，0.5 に近いこと，Euler がどのように γ の導入に至ったかが述べられる．そのあとがガンマ関数（第六章），これはギリシャ大文字の Γ であるが，もちろん γ と無関係ではなく，$-\Gamma'(1) = \gamma$ である． そしてリーマンゼータのオイラー積（第七章）ときて，γ の存在が証明されるのはようやく第九章になってである．(一つ前の第八章は，オイラー積の応用として，でたらめに選んだ二つの自然数が互いに素である確率が $1/\frac{1}{6}\pi^2 = 1/\zeta(2)$ であることの証明にあてられている.）そこにはオイラー–マクローリンの和公式による γ の近似式など，大学の微積分の教程の始めの方でやるような単なる極限の存在証明を大きく越えた内容が盛られていて楽しめる．ここまでで，ページ数にしてようやく本文全体の三分の一強くらいなのであるが，あとこの倍近くの量，一体 γ について何をそんなに書くことがあるのかと訝しく思われるかも知れない．評者がこの本を最初に手にしたときの率直な感想もそれであった．初等的な細部に延々紙幅を費やして「水増し」しているのではないか．しかしこれは全くの無知からくる大変失礼な誤りであった．

ここではこれ以上逐次的に内容を追うことはやめて，ごくかいつまんで残りの部分を紹介すると，γ の様々な表示式や近似式，有理数による近似，γ ないしは調和級数 H_n が現れる種々の数学的問題（よくぞ集めたと思うほど色々あり，知らないものも多かった），リーマンゼータ関数についての諸事実と素数分布の話題（n 番目の素数を表わす式なども出てくる．一体どんな式か，想像してみて下さい）など．またそれぞれの話題に，著者の驚くほど広範な教養による，歴史的なエピソードや雑学，といってしまっては貶めるようであるが，そうではない豊富な補足的記述のあれこれ． 圧倒される．こういう先生に数学を教えてもらえる生徒は幸せであろう． 一つだけ，有名なところを紹介しておくと，γ は未だに無理数であることすら証明されていないという現状があるが，もし有理数であるとするとその分母は 10^{242080} より大きくなければならないのだそうである（第十一章）．γ のような，数学に自然に出てくる数がかくも巨大な分母分子を持つ有理数であるとすればそれこそ驚天動地であるから，まず間違いなく無理数なのであろう．それはどのように証明されるのであろうか．Apéry による $\zeta(3)$ の無理性の証明のように，Euler が証明していてもおかしくなかったような，初等的な道具立てしか使わない証明があるのだろうか． そのような証明がもしやこの本を読んだ若者によって発見されるかもしれない，と想像するのは楽しい．

この本を読んで評者もずいぶん勉強させてもらった．人名索引にあげられている数学者，天文学者の数は遠く Eulcid, Archimedes から近くは Wiles まで，100 人を軽く超えている． これも盛られた内容と話題の豊富さを示す証左であろう．各章ごとにつけられているエピグラフも興を添えている．もっとも巻頭の Churchill のエピグラフなどは，著者とは教養のレベルが違いすぎる評者などにとっては，人に聞かないと理解しづらいものであったが．それにしても文句無く楽しい本である．順番に読んでいかなければ分からなくなる，という本ではないから，好きなところから読み始めればよい．付録に少し「進んだ」数学についての解説があり，大学初年の微積分の知識があれば

確実に，高校までの微積分しか習得していなくとも意欲（と少々の英語力）があれば十分読める本であると思う．関心を抱かれたすべての人にお勧めしたい．

(かねこまさのぶ・九州大学大学院数理学研究院)