べき乗和からベルヌーイ数へ

金子昌信　(九州大学)

表題にいう「べき乗和」とは自然数のべき乗を順に加えた和

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k,$$

特にそれを n と k の式で書き表す公式のことをさす．高校の教科書をいくつか眺めてみると，たいてい何らかの形（本文や練習問題）で $k = 1, 2, 3$ に対する公式

$$\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + \cdots + n &= \frac{n(n+1)}{2}, \\
1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

までは載っている．一昔（二昔？）前の高校生なら 4 乗和

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

も習ったという人が多いかもしれない．さてそれでは一般の k についてはどうか，という話になるのであるが，その前に少し寄り道をする．これらの公式を見たときまず誰もの目を惹くであろうことに，3 乗の和が 1 乗のときの和の平方になっているということがある．例えば自然数の（1 乗の）和の公式は，少年ガウスの伝説にもあるように，同じ数列を逆に並べたものを足して 2 で割るという方法で一目瞭然となる．このような工夫を 2 乗，3 乗と考えるのは楽しいことで，読者の楽しみを奪うのはよろしくないかもしれないが，あるときどこかで見かけて感心した，上記 3 乗和の結果の説明をご覧に入れたい．自分で思いついたのではないことは確かなのだが，今となってはどこで見たのか定かではない（あるいは昔の「数学セミナー」？）．

奇数を下のように順に三角形状に並べる.

$$\begin{array}{c}
1 \\
3 \quad 5 \\
7 \quad 9 \quad 11 \\
13 \quad 15 \quad 17 \quad 19 \\
21 \quad 23 \quad 25 \quad 27 \quad 29 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

1 から始まり第 n 行まで並んだ奇数の個数は, 自然数の和の公式から $n(n+1)/2$ である．また，最初の i 個の奇数の総和は i^2 である．このことは，1 個, 3 個, 5 個 $\cdots$ の点（でも石でも）を順に鉤状に並べながら正方形を作っていくという，これもよく知られた工夫によって視覚

的に分かる． するとこの三角形の第 n 行目までの奇数の合計は $(n(n+1)/2)^2$ である． 一方，第 i 行には i 個の連続する奇数が並んでいるが, その平均は i^2 である (これまでに書いたことから分かるので理由を考えてみられたし). 従って第 i 行の和は i^3 となる（第 i 行目までの和から第 $i-1$ 行目までの和を引いてもよい）. よって

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

が示された.

さて一般の公式である. 結論から言うと，これを記述するためには新しい量を導入する必要があり，その新しい量が表題にある「ベルヌーイ数」とよばれる有理数の列である. ベルヌーイは Jakob Bernoulli，有名なベルヌーイ一族の一番の年長である. 実は彼とほぼ同時期に日本の和算家関孝和も独立にべき乗和の公式，ベルヌーイ数を発見しており，出版は関の方が一年早い（1712 年と 1713 年）. しかし共に没後の出版で，どちらが早く発見していたのか，またそういう考証があるのかも，筆者は知らない. 出版は一年早いのだし，少なくとも日本では「ベルヌーイ数」の代わりに「関数」と呼ばれてしかるべきだ，すると function に当てるのは代用字でない「函数」しかなかったであろう，とは黒川信重氏のいみじくも指摘したところである [2].

関－ベルヌーイの公式は次のように述べられる.

べき乗和の公式　k, n には無関係な有理数列 $B_0, B_1, B_2, \ldots$ があって

$$\sum_{i=1}^{n} i^k=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}B_j\frac{n^{k+1-j}}{k+1-j},\quad \text{あるいは}\quad =\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}B_j n^{k+1-j} \tag{1}$$

と書かれる． ここに $\binom{k}{j}$ は 2 項係数

$$\binom{k}{j}=\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-j+1)}{j!}$$

で, B_j は具体的には漸化式

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}B_j=k+1,\quad k=0,1,2,\ldots,$$

すなわち (1) で $n=1$ とすると左辺は常に 1 であること，により定まる数である. 始めの方の例をあげておく.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
B_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$	0	$-\frac{3617}{510}$

表 1: ベルヌーイ数

ここでの B_n の定義は，関やベルヌーイのものに合わせているのだが，そうすると通常流布している定義と B_1 の符号だけずれる．しかし，n が 3 以上の奇数のときは $B_n = 0$ となることから，$(-1)^n B_n$ が通常のベルヌーイ数となる．以下の諸公式においてはこれを念頭において適宜読み替えられたい．

このべき乗和の公式はそれ自体を最終目標として考えるならば，B_j という一見訳の分からない数を使ってしか記述できていない点で不十分なものに見えるかもしれない．しかし，ベルヌーイがその計算上の意義を強調したべき乗和の公式に遥かに増して，こうして導入された関−ベルヌーイ数こそ，数学のあらゆる，とは言わぬまでも実に様々な分野に亘って登場する極めて基本的，そして魅力的な数なのである． その魅力をこの小文でお伝えすることは到底出来そうにない．また公式 (1) の導出もここでは行わない．ベルヌーイが仄めかしているように，関もベルヌーイも 2 乗，3 乗，4 乗と順に公式を求めていき（これは高校の教科書にあるような方法でも可能である），一般公式を (1) のような形に書くとその係数 B_j が k によらなくなる，ということを見抜いたのであろうと思われる．彼らは表として，関は 11 乗，ベルヌーイは 10 乗までの公式を載せている．

さて本特集はゼータ函数がテーマであるから，ベルヌーイ数とくると話は自然にゼータ函数の特殊値に向く．これは他の稿でも触れられるであろうが，リーマンゼータ函数

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p^s}} = \sum_{n:\text{自然数}} \frac{1}{n^s}$$

の整数点での値，正確には正の偶数と負の整数（0 も含めることにする）での値がともにベルヌーイ数を使って書き表される（両方にベルヌーイ数が現れるのは勿論，ゼータ函数の関数等式の故である）：

$$\zeta(2k) = \frac{|B_{2k}|}{2}\frac{(2\pi)^{2k}}{(2k)!} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{2}$$

$$\zeta(-k) = -\frac{B_{k+1}}{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

このオイラーによる公式，特に後者 (3) と関−ベルヌーイの公式 (1) がどのように関わり合うのかを見ていこう．(1) によればべき乗和 $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ は n の多項式であるから，この多項式を x を変数として $S_k(x)$ と書くことにする．従って

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k = S_k(n)$$

である．

さて $k \geq 0$ に対して $\zeta(-k)$ は形式的には発散級数

$$1^k + 2^k + 3^k + 4^k + 5^k + \cdots \tag{4}$$

である．これを

$$\left[1^k + 2^k + \cdots + n^k\right] + \left[(n+1)^k + (n+2)^k + (n+3)^k + \cdots\right]$$

とみて，

$$(n+1)^k + (n+2)^k + (n+3)^k + \cdots = \zeta(-k) - S_k(n)$$

とする．驚くべきことに，この「公式」は，n を勝手な（-1 より大きい）実数に置き換えても，つまり，(4) をあたかも勝手な実数のところで切って二つに分けたかのように思っても成り立つ．すなわち

$$\sum_{m=1}^{\infty}(x+m)^k = -\frac{B_{k+1}}{k+1} - S_k(x) \tag{5}$$

という式が，左辺に「フルヴィッツゼータ函数の負整数点での値」としての意味をつけた上で，成り立つのである．

フルヴィッツゼータ函数 $\zeta(s,x)$ は正の実数 x に対し

$$\zeta(s,x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+x)^s}$$

で定義される．$x=1$ とするとリーマンゼータ函数になる．絶対収束域は s の実部が 1 より大きい半平面だが，全 s 平面上の有理型函数に解析接続され，極は $s=1$ にのみ（一位）ある．特に $s=-k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ で有限の値を持つ．その値を x の函数と思うとこれが x の多項式で，しかも本質的にべき乗和公式の多項式だというのである．(5) を $\zeta(s,x)$ で書くと，定義では $m=0$ から和をとっているので x が 1 だけずれて，

$$\zeta(-k,x+1) = -\frac{B_{k+1}}{k+1} - S_k(x), \tag{6}$$

あるいは

$$S_k(x) = \zeta(-k) - \zeta(-k,x+1)$$

となる．

これがべき乗和公式の別の姿である．この，フルヴィッツゼータ函数の負整数点での値を与える公式 は通常 $S_k(x)$ の代わりにベルヌーイ多項式と呼ばれる多項式を用いて表わされる．ベルヌーイ多項式 $B_k(x)$ を $S_k(x)$ を用いて表わすと

$$B_k(x) = \frac{d}{dx}S_k(x-1) \tag{7}$$

となる． ここではこれが $B_k(x)$ の定義だと思うことにしよう．$S_k(x)$ の定義から

$$S_k(x) - S_k(x-1) = x^k$$

であるから，(7) を x から $x+1$ まで積分すると

$$\int_x^{x+1} B_k(y)\,dy = x^k \tag{8}$$

を得る．実はベルヌーイ多項式 $B_k(x)$ は (8) を満たす多項式として一意的に特徴付けられる．このことを使うと

$$B_k(x+1) - B_k(x) = kx^{k-1},$$

また

$$B_k(x) = \frac{B'_{k+1}(x)}{k+1} \tag{9}$$

が得られる． また公式 (1) と (7) から，

$$B_k(1) = S'_k(0) = B_k$$

が分かるので， (7) を 1 から $x+1$ まで積分し (9) を用いて（$S_k(0)=0$ に注意）

$$S_k(x) = \frac{B_{k+1}(x+1)}{k+1} - \frac{B_{k+1}}{k+1}.$$

これを使って (6) を書き直すと（$x \to x-1$ とする）

$$\zeta(-k, x) = -\frac{B_{k+1}(x)}{k+1} \tag{10}$$

となる．オイラーの公式 (3) はこれの $x=1$ とした特殊化である．しかもこの公式は $\zeta(s,x)$ の解析接続さえ出来ると，ベルヌーイ多項式が (8) で特徴付けられることから容易に導かれるのである．

べき乗和公式やベルヌーイ数，ベルヌーイ多項式についてより詳しいことは共著 [1] を参照してくだされば幸いである．

参考文献

[1] 荒川恒男，伊吹山知義，金子昌信: ベルヌーイ数とゼータ関数，牧野書店， (2001).

[2] 黒川信重 : 数学セミナー.