多重ゼータ値の関係式について[1]

九州大学 数理学研究院 金子昌信
近畿大学 理工学部 大野泰生

講演では、2 人が「多重ゼータ値入門」と題して、基本的なことや我々自身の仕事の他、様々なトピックについて、そのさわりだけですが紹介もしました。しかしそのような紹介はいざ文章に書くとなると生半可なことでは書けず、結局断念してしまいました（ごめんなさい)。また基本的なことについては既に同じタイトルで書かれた文献もある（[10]）ということで、本稿では表記の関係式についての話題に絞って解説をすることとしました。

実は多重ゼータ値「業界」で懸案の予想であった「次元の上限予想」を、Goncharov が解決したとアナウンス（[5])、また、Drinfel'd associator の方からこれに迫る試みは最近数理研の古庄英和さんが、所謂 stable derivation (Lie) algebra との関係を明瞭につけることにより ([3])、この algebra に関する「スタンダード予想」を仮定すれば次元の上限予想が従うことを極めて見通しよく示され、ひとまずある地点にたどり着いた感を見せています。しかし、今まで色々知られていた、具体的な個々の関係式がどのように次元の上限を下げるのに寄与しているか、ということはまだよく分かっていません。これについて、現段階で描けそうな全体像（仮のものですが）を以下で提示してみます。

これまでに知られている関係式は

- 系列的、具体的に書き下せるが、それが関係式を与えていることは往々にして非自明で証明を要する関係式、所謂 Ohno 関係式がその一番大きなクラス、
- その存在理由（関係式を与えていること）ははっきりしているが、いざ具体的かつ一般的に書き下そうとすると困ってしまう “double shuffle relation” というもの、

の二つに大別されますが、それらがどのような位置づけになっているのかはよく理解されていなかったと思います。これを、次のように考えるとします。まず「発散の正規化」を使って double shuffle relation を拡張します。このとき、発散するゼータ値を使って得

[1]代数学シンポジウム（2000 年 8 月　九州大学）報告集原稿

られる double shuffle relation の全体を {infinite double shuffle relations}, 収束するゼータ値だけを用いて得られる double shuffle relation 全体を {finite double shuffle relations} とすると、まず、楽観的に

$$\text{全関係式} \stackrel{?}{=} \{\text{infinite double shuffle relations}\} \cup \{\text{finite double shuffle relations}\}$$

となっていないだろうか（weight 12 まではそうなっている）。そして、

$$\{\text{Ohno 関係式}\} \stackrel{?}{\supset} \{\text{infinite double shuffle relations}\}$$

であろう、ということを、Hoffman の導入した harmonic algebra における定式化を通して具体的な形で予想することができます。すなわち Ohno 関係式とは、上の作業仮説が正しいとすると、全関係式と、finite double shuffle relations の間のギャップを埋めているものである、ということになります。また、Ohno 関係式と finite double shuffle relations は共通部分を持ちます。つまり Ohno 関係式は、予想によれば infinite double shuffle relations の全部と、そして finite double shuffle relations の一部を含むもので、Ohno 関係式を何らかの形でどんどん拡張していけば全関係式が得られる、という可能性もあるわけです。最近証明された "cyclic sum formula" は Ohno 関係式に含まれない関係式も与えるので、この方向での最初の結果ということになります。以上のことを第 1 節から第 4 節まででもう少し詳しくみていきます。

最後の節では、「Riemann ゼータ値で書ける多重ゼータ値」という視点からの結果について述べます。これは Euler が持っていた問題意識に沿うものですが、多重ゼータ値の代数構造を具体的に考えていく上でも、まず最初のステップ（Riemann ゼータで生成される subalgebra を特定すること）として重要な問題と思われます。

1　具体的に一般形が書ける関係式の系列

これまでに証明されてきた関係式の系列で、公式の一般的な形が具体的に書けるものを、証明された順に並べてみます。これら全体を統一的に拡張したものが定理 1.4（Ohno 関係式）です。

整数 $n \geq 1$, $k_2, k_3, \ldots, k_n \geq 1$ および $k_1 \geq 2$ からなる index

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

を admissible index と呼ぶことにして、これに対する多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ を、

$$\zeta(\mathbf{k})=\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\sum_{m_1>m_2>\cdots>m_n>0}\frac{1}{{m_1}^{k_1}{m_2}^{k_2}\cdots{m_n}^{k_n}}$$

で定義します[2]。ここで、$k=k_1+k_2+\cdots+k_n$ を $\mathbf{k}$ の weight と言い、n を $\mathbf{k}$ の depth と言います。(右辺の級数は $k_1=1$ とすると発散します。)

初めに一般の weight, depth で系列的な関係式を証明したのが Hoffman です。

定理 1.1 (Hoffman[6]) 任意の *admissible index* $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ に対して以下が成り立つ。

$$\sum_{\substack{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n=1\\ \forall\varepsilon_j\geq 0}}\zeta(k_1+\varepsilon_1,k_2+\varepsilon_2,\ldots,k_n+\varepsilon_n)$$

$$=\sum_{\substack{1\leq l\leq n\\ k_l\geq 2}}\sum_{j=0}^{k_l-2}\zeta(k_1,\ldots,k_{l-1},k_l-j,j+1,k_{l+1},\ldots,k_n).$$

次に dual index を定義します。任意の admissible index $\mathbf{k}$ は、

$$\mathbf{k}=(a_1+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{b_1-1},a_2+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{b_2-1},\ldots,a_s+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{b_s-1}),$$

ここに $a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_s,b_s\geq 1$,$s\geq 1$, なる形に一意的に書けますが、このとき

$$\mathbf{k}'=(b_s+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{a_s-1},b_{s-1}+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{a_{s-1}-1},\ldots,b_1+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{a_1-1})$$

は admissible index となり、この $\mathbf{k}'$ を $\mathbf{k}$ の dual index と呼ぶことにします。

定理 1.2 (duality formula) 任意の *admissible index* $\mathbf{k}$ とその *dual index* $\mathbf{k}'$ に対して以下が成り立つ。

$$\zeta(\mathbf{k}')=\zeta(\mathbf{k}).$$

---

[2] 和の順序を、これまで筆者らが用いてきた convention と逆にしていることに注意。これは後の harmonic algebra の word との対応が自然な順序になるようにしたため。出版されている文献の中ではこちらが多数派で、Euler の順序もこちら。

これは、$\zeta(\mathbf{k})$ の反復積分表示

$$\zeta(k_1,k_2,\cdots,k_n)=\int\cdots\int_{1>t_1>t_2>\cdots>t_k>0}\frac{dt_1}{A_1(t_1)}\frac{dt_2}{A_2(t_2)}\cdots\frac{dt_k}{A_k(t_k)} \tag{$\sharp$}$$

（ここに $k=k_1+k_2+\cdots+k_n$（weight）で、$A_i(t_i)$ は i が $k_1, k_1+k_2, k_1+k_2+k_3,\ldots,k_1+k_2+\cdots+k_n$ のいずれかに等しいとき $1-t_i$, そうでないとき t_i と決めます。$k=k_1+k_2+\cdots+k_n$ なので必ず $A_k(t_k)=1-t_k$ であり、$\mathbf{k}$ が admissible ($k_1>1$) ということから必ず $A_1(t_1)=t_1$ となります。なお [10], [18] など参照）において、変数変換 $(t_1,t_2,\ldots,t_k)\to(1-t_k,\ldots,1-t_2,1-t_1)$ を行えば直ちに得られます。

次に、sum formula という以下のような定理が知られています（Granville [4], Zagier（未発表、cf. [2]））。

定理 1.3 (sum formula) 整数 $0<n<k$ に対して以下が成り立つ。

$$\sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n):\text{admissible},\\ k_1+k_2+\cdots+k_n=k}}\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\zeta(k).$$

ここまで述べたすべての定理を含む、統一的な一般化が次の定理です。

定理 1.4 ([13]) 任意の *admissible index* $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ と整数 $l\geq 0$ に対して $Z(\mathbf{k};l)$ を

$$Z(\mathbf{k};l)=\sum_{\substack{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n=l\\ \forall\varepsilon_j\geq 0}}\zeta(k_1+\varepsilon_1,k_2+\varepsilon_2,\ldots,k_n+\varepsilon_n),$$

とし、$\mathbf{k}'$ を $\mathbf{k}$ の *dual index* とする。この時、次が成り立つ。

$$Z(\mathbf{k}';l)=Z(\mathbf{k};l).$$

注意 この定理の $l=0$ の場合が duality formula そのものです。また、$\mathbf{k}$ の depth が 1 のときに sum formula と同じ主張になります。実際、$0<n<k$ に対して、$\mathbf{k}=(n+1)$ の dual index は

$$\mathbf{k}'=(2,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-1})$$

ですから、

$$Z(\mathbf{k}'; k-n-1) = \sum_{\substack{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n=k-n-1 \\ \forall \varepsilon_j \geq 0}} \zeta(2+\varepsilon_1, 1+\varepsilon_2, 1+\varepsilon_3, \ldots, 1+\varepsilon_n),$$

となり、この右辺は結局 weight k で depth n の多重ゼータ値全部の和になります。一方、定理の右辺は $Z(\mathbf{k}; k-n-1) = \zeta(k)$ です。

さらに、定理 1.4 は Hoffman の定理も含んでいます。すなわち、定理 1.1 の右辺の多重ゼータ値たちをすべて duality で書き換えると、定理 1.4 で $l = 1$ とした場合と同じ主張になることが確かめられます。

ここで、各々の weight の多重ゼータ値の張る $\mathbf{Q}$ ベクトル空間の次元の予想と、定理 1.4 から得られる次元の上限とを比較してみましょう。

$\mathcal{Z}_k$ で、weight k の（index を持つ）多重ゼータ値全体（2^{k-2} 個ある）で張られる $\mathbf{Q}$ ベクトル空間を表わすとします。このとき、$\dim_{\mathbf{Q}} \mathcal{Z}_k$ は漸化式

$$d_0 = 1,\ d_1 = 0,\ d_2 = 1,\ d_k = d_{k-2} + d_{k-3}\ (k \geq 3)$$

で与えられる数 d_k に等しいだろうというのが予想で、序で Goncharov が解いたと述べたのは不等式 $\dim_{\mathbf{Q}} \mathcal{Z}_k \leq d_k$ を証明したということです。$\dim_{\mathbf{Q}} \mathcal{Z}_k$ の下限を与えるのは、現段階では非常に難しい問題であろうと考えられています。異なる weight をもつ多重ゼータ値の間の独立性については、有名な Apéry による $\zeta(3)$ の無理性（1 と $\zeta(3)$ が $\mathbf{Q}$ 上独立）の他、最近 Rivoal [16] によって、奇整数点での Riemann ゼータ値の中に $\mathbf{Q}$ 上独立なものが無限個あることが証明されたようです。

表 1: 予想次元 d_k と定理 1.4 から得られる次元の上限の比較

weight k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
予想次元 d_k	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12
次元の上限	1	0	1	1	2	3	6	9	18	30	57	101	194
admissible index の個数	1	0	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

この範囲で見ると、予想されている (独立な) 関係式の 60 ～ 80% 前後は得られていますが、定理 1.4 で得られる次元の上限は一番 optimal に見積もったとしても、$\sqrt{2}^k =$

$(1.4142\ldots)^k$ の order で、予想値の order は $(1.32471\ldots)^k$ ですから（$1.32471\ldots$ は x^3-x-1 の実根）、比で考えるとまだまだ足りないことになります。sum formula の細分化である、cyclic sum formula （4 節）は、定理 1.4 に含まれない関係式も与えるので（しかし数はまだ足りない）、定理 1.4 と cyclic sum formula を更に統一するような関係式が見つかれば、かなり有効な上限が得られるのかも知れません。

2 Double shuffle relation

2.1 finite double shuffle relation

２つの多重ゼータ値の積は多重ゼータ値の 1 次結合として書き表されますが、計算の仕方によってその書き方が２通りあります。1 つは、定義級数のまま積を展開する方法で、もう 1 つは反復積分表示 ($\sharp$) とその shuffle 積を用いるものです。それらが具体的にどう計算されるかは [10] を参照頂くとして、その表示式をそれぞれ $\zeta(\mathbf{k})*\zeta(\mathbf{k}'), \zeta(\mathbf{k})\circ\zeta(\mathbf{k}')$ と表わすとします。例えば $\zeta(2)*\zeta(3)=\zeta(2,3)+\zeta(3,2)+\zeta(5), \zeta(2)\circ\zeta(3)=\zeta(2,3)+3\zeta(3,2)+6\zeta(4,1)$ など。右辺に現れるゼータ値の index の weight は、いずれの方法でも元の２つの weight の和になります。ところが depth については、$\circ$ による計算ではいつも元の depth の和になりますが、$*$ では必ず元の和より小さい項が出ます（２つの depth の大きい方から２つの和までのすべての値を depth とする項が出る）。こうして、同じ積をふた通りに計算すると必ず見掛けが異なるので、その差として多重ゼータ値の線形関係式が得られることになります。これを称して “double shuffle relation” と呼びます。あとで regularization の考えを導入して、発散する $\zeta(\mathbf{k})$ を許した形の double shuffle relation を定義するので、それと区別するためにこの普通の double shuffle relation を “finite double shuffle relation” と呼ぶことにします。

この finite double shuffle relation だけから得られる次元の上限をやはり表にしてみます。（パソコンでは weight 12 がメモリー不足で計算できませんでした。）

これと前節の表を比べると、この範囲では似たような上限値となっていますが、単純な数の勘定では、これから先どんどんこちらの方が沢山の関係式を与えていくと思われます。しかしともかく、どちらか一方では足りないことは確かで、２つを合わせると、weight 12 までは予想次元まで落とせることが確かめられています。

表 2: finite double shuffle relation から得られる次元の上限

weight k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
予想次元 d_k	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12
次元の上限	1	0	1	2	3	6	9	16	24	36	56	83	?
admissible index の個数	1	0	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

2.2 regularized double shuffle relation

発散する（admissible でない） index つまり $k_1 = 1$ の場合の $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ に対する $\zeta(\mathbf{k})$ の（「正規化された」）値は既に青本 [1] などにも現れていますが、 1 つの定義の仕方は、反復積分 ($\sharp$) において、積分区間の発散する端点 1 を $1-\varepsilon\,(\varepsilon > 0)$ で置き換えたもの

$$I_\varepsilon(\mathbf{k}) := \int_{1-\varepsilon > t_1 > t_2 > \cdots > t_k > 0} \cdots \int \frac{dt_1}{A_1(t_1)} \frac{dt_2}{A_2(t_2)} \cdots \frac{dt_k}{A_k(t_k)}$$

の、$\varepsilon \to \infty$ の挙動を見るというものです。このとき、適当な $0 < c < 1$ があって

$$I_\varepsilon(\mathbf{k}) = \log(1/\varepsilon) \text{ の多項式} + O(\varepsilon^c) \quad (\varepsilon \to \infty)$$

なることが shuffle 積を使って（depth に関して）帰納的に分かります。ここに現れる $\log(1/\varepsilon)$ の多項式（一意的）の定数項をもって $\zeta(\mathbf{k})$ の正規化値とするのです。これを $reg\zeta(\mathbf{k})$ と書くと、やはり帰納的に

$$reg\zeta(\mathbf{k}) \in \mathcal{Z}_k, \quad (k = \text{weight of } \mathbf{k})$$

であることが分かります。例として $reg\zeta(1) = 0,\ reg\zeta(1,2) = -2\zeta(2,1)$ など。$\mathbf{k}$ が admissible のときは単に $reg\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(\mathbf{k})$ です。この reg を記号 $\zeta(\mathbf{k})$ から実数への写像と見て、$\zeta(\mathbf{k})$ の形式的な（$\mathbf{Q}$ 係数） 1 次結合に対して線形に拡張しておきます。

さて、先の積を和に直す 2 通りの計算規則 $*, \circ$ は、admissible でない index にも同様に形式的に適用できます。例えば発散を無視して $(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n})^2 = \sum_{m>n>0} \frac{1}{mn} + \sum_{n>m>0} \frac{1}{mn} + \sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$ として $\zeta(1)^2 = 2\zeta(1,1) + \zeta(2)$ など。$\circ$ の方は積分 $I_\varepsilon(\mathbf{k})$ の積を和に直す shuffle 積の計算で形式的に $\varepsilon = 0$ とおいたものです。そこで、$\zeta(\mathbf{k}) * \zeta(\mathbf{k}') - \zeta(\mathbf{k}) \circ \zeta(\mathbf{k}')$ を各計算規則で線形和に直し、その正規化を考えます。

定理 2.1 (regularized double shuffle relation, essential には Zagier) $\mathbf{k}$ を *admissible index,* $\mathbf{k}'$ は任意の（$k_1 = 1$ も許した）*index* とする。このとき

$$reg(\zeta(\mathbf{k}) * \zeta(\mathbf{k}') - \zeta(\mathbf{k}) \circ \zeta(\mathbf{k}')) = 0$$

である。

２つの indices のうち１つは admissible でないといけません。また、$\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$ ともに admissible のときは finite double shuffle relation に他なりません。

予想（Zagier） regularized double shuffle relation ですべての関係式が出てくるであろう。

我々はこの予想を支持する理論的根拠を知りませんが、少なくとも weight 12 までは確かにこれで次元を予想値まで下げることができます。

定理の証明ですが、$\zeta(\mathbf{k})$ の、級数表示を使った別の regularization 及び、それとここでの regularization との関係（Zagier）を使います（cf.[9]）。

次に定理 1.4 と定理 2.1 の関係を見るために Hoffman の導入した harmonic algebra における言葉で定式化していきます。cyclic sum formula もこのコンテクストで発見されたものです。

3 Derivation relation

まず、$\mathfrak{h} := \mathbf{Q}\langle x, y\rangle$ で $\mathbf{Q}$ 上の２変数非可換多項式環を表し、$\mathfrak{h}^1 := \mathbf{Q} + \mathfrak{h}y$, $\mathfrak{h}^0 := \mathbf{Q} + x\mathfrak{h}y$ とします。つまり $\mathfrak{h}^1$ は 1 と、y で終わる（右端が y）word (monomial) の 1 次結合全体、$\mathfrak{h}^0$ は 1 と、x で始まり y で終わる word の 1 次結合の全体であり、それぞれ $\mathfrak{h}$ の subalgebra です。

今、各 word $w \in \mathfrak{h}^0$ に対して、微分形式 $\frac{dt_1}{A_1(t_1)}\frac{dt_2}{A_2(t_2)}\cdots\frac{dt_k}{A_k(t_k)}$ を、w の（左から）i 番目の文字が x なら $A_i(t_i) = t_i,$ y なら $A_i(t_i) = 1 - t_i$ という規則で対応させ、それを $(\sharp)$ のように反復積分して得られる値を $\widetilde{\zeta}(w)$ とします。（$w \in \mathfrak{h}^0$ ということから積分は必ず収束します。）更にこれを $\mathbf{Q}$ 線形に拡張して写像

$$\widetilde{\zeta} : \mathfrak{h}^0 \longrightarrow \mathbf{R}$$

を定義します。w の total degree が weight に、y についての degree が depth に対応しています。 word $w = x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y\cdots x^{k_n-1}y$ に対して $\widetilde{\zeta}(w) = \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ です。$\mathfrak{h}$ に shuffle 積を入れた algebra（w と w' の shuffle 積とは、各 word を構成する letters の合併の順列（word）で、それぞれの順序は保ったものの和。この algebra の構造は以前から知られている（cf.[15])）を考えると、$\mathfrak{h}^0$ はこの積でも subalgebra であり、定義と反復積分の shuffle 積から、$\widetilde{\zeta}$ はこの $\mathbf{Q}$-algebra 構造に関する $\mathfrak{h}^0$ から $\mathbf{R}$ への algebra homomorphism ($\mathbf{R}$ の方は自然な $\mathbf{Q}$-algebra 構造）となっています。$\mathfrak{h}$ における shuffle 積も $\circ$ で表わすことにします。

Hoffman [7] は $\mathfrak{h}$ に、先の対応で word を多重ゼータ値と見たときに多重ゼータ値の $*$ 積（級数による展開）に対応するような積構造を代数的に定義し、その積に関する $\mathfrak{h}$ の構造定理を証明しました。その積についてやはり $\mathfrak{h}^0$ が subalgebra をなし、写像 $\widetilde{\zeta}$ が algebra homomorphism となっています。

多重ゼータ値の関係式を求める、ということは、$\mathrm{Ker}\,\widetilde{\zeta}$ を調べることに他なりません。例えば、$\tau : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}$ を、x と y を入れ替えて逆の順序に並べ替える写像（$\tau(x) = y, \tau(y) = x$ なる（concatenation product に関する）anti homomorphism）と定義すると、先の duality formula は以下のように書かれます。

定理 3.1 (duality formula) $\mathfrak{h}^0$ の任意の *word* w に対して

$$(1-\tau)(w) \in \mathrm{Ker}\,\widetilde{\zeta}$$

さて $\mathrm{Der}(\mathfrak{h})$ を $\mathfrak{h}$ の derivation のなす Lie algebra とします。(derivation ∂ とはつまり、$\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{h}$ への $\mathbf{Q}$-linear map であって、$\partial(uv) = u\partial(v) + \partial(u)v$ が $\mathfrak{h}$ の任意の元 u, v に対して成り立つもの。$\partial, \partial' \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$ とすると $[\partial, \partial'] := \partial\partial' - \partial'\partial \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$。) derivation $\partial \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$ は、x と y の行き先だけで一意的に決まることに注意します。

Hoffman は、自ら与えた関係式（定理 1.1）の derivation の言葉による書き換えを [7] で行っています。彼の定式化はそのままでは一般化できないのですが、以下の形に述べかえると一般化が出来、結局それが定理 1.4 とほぼ同値な命題を与えることが証明されました。

各 $n \geq 1$ に対して $\partial_n \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$ を次で定義します：

$$\partial_n(x) = x(x+y)^{n-1}y, \quad \partial_n(y) = -x(x+y)^{n-1}y.$$

∂_n は $\mathfrak{h}$ の（特に $\mathfrak{h}^0$ の）元を $\mathfrak{h}^0$ に写します。

この derivation を用いると、Hoffman の関係式は以下のように述べることができます。

定理 3.2 (Hoffman [7]) $\mathfrak{h}^0$ の任意の *word* w に対して

$$\partial_1(w) \in \mathrm{Ker}\,\widetilde{\zeta}.$$

これが一般的に

定理 3.3 ([9]) $\mathfrak{h}^0$ の任意の *word* w と任意の自然数 n に対して

$$\partial_n(w) \in \mathrm{Ker}\,\widetilde{\zeta}.$$

証明の詳細は [9] に譲りますが、その方法は、∂_n 達の母関数

$$\exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial_n}{n} t^n)$$

を、定理 1.4 に対応する $\mathfrak{h}$ の写像（これもある derivation で書き表される）の母関数に関係づけることにより定理 1.4 に帰着させる、というものです。更にその関係づけは、上の定理と、定理 1.4 の右辺を duality で変換した形の定理が同値であることを示しています。つまり、定理 3.3 と定理 1.4 は duality の下で同値です。或は定理 1.4 と、定理 3.3+ 定理 1.2 が同値であると言っても同じことです。

さて今、前節で述べた発散する多重ゼータ値の regularization map “reg” を、$\mathfrak{h}^1$ から $\mathfrak{h}^0$ への写像として形式的に引き写します。($reg\zeta(\mathbf{k})$ はもともと超越的な方法で 1 つの実数として定義したのだからこの言い方は問題ですが、実は純代数的に定義することが出来ます。詳しくは [9] 参照。）そして、各自然数 n に対し、$\zeta(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n})$ に対応する y^n を用いて、写像 $\theta_n : \mathfrak{h}^0 \longrightarrow \mathfrak{h}^0$ を、

$$\theta_n(w) := reg(w * y^n - w \circ y^n)$$

で定義します。つまり、w に対応する $\zeta(\mathbf{k})$ と、$\zeta(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n})$ の regularized double shuffle relation を与えるべき写像が θ_n です。定理 2.1 により、すべての自然数 n と $w \in \mathfrak{h}^0$ に対し

$$\theta_n(w) \in \operatorname{Ker}\widetilde{\zeta}$$

ですが、これと先の derivation ∂_n の間に次のような関係が成り立つと予想しています。

予想

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial_n}{n}t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\theta_n t^n. \qquad (\theta_0 = \text{identity} \text{ とする。})$$

これは t のべき級数として形式的に展開したときの各係数が $\mathfrak{h}^0$ から $\mathfrak{h}^0$ への写像として等しいだろうというものです。

もしこれが正しいとすると、定理 3.3、従って定理 1.4（の右辺を duality で変換したもの）は infinite double shuffle relation の特別な（一番極端な）場合と同値であるということになります。しかも、weight 12 までの計算実験では、次の問いが肯定的である可能性があります。

$$\begin{aligned}\{\text{regularized double shuffle relations}\} &= \{\text{finite double shuffle relations}\} + \\ &\quad \{\text{admissible 掛ける } \zeta(1,1,\ldots,1) \text{ 型の infinite double shuffle relations}\} \text{ か?}\end{aligned}$$

非常に楽観的に、これが成り立ち、regularized double shuffle が全部の関係式だという予想も正しいと仮定すると、定理 1.4 とは finite double shuffle relations では足りない部分の関係式をカバーするものであると言うことができ、定理 1.4 を拡張することは、finite double shuffle relation に別の形を与えていくことである、と言うことができます。実際、$\theta_1 = -\partial_1$ で、これは Hoffman の関係式を与えるものでしたし、sum formula も θ_n を用いて解釈できるようですので（証明を詰めていませんがはっきりした予想式が立ちます）、これらは infinite double shuffle relation の特別な場合と見ることが出来ます。それらが定理 1.4 として統合されたのでした。

その、定理 1.4 の 1 つの拡張を与えるために、$\mathfrak{h}$ において、derivation の代わりに cyclic derivation なるものに着目してみましょう。これは $\mathbf{Q}$-linear map $\psi : \mathfrak{h} \longrightarrow \operatorname{End}\mathfrak{h}$ であっ

て、任意の $w_1, w_2, w \in \mathfrak{h}$ に対して

$$\psi(w_1w_2)(w) = \psi(w_1)(w_2w) + \psi(w_2)(ww_1)$$

を満たすもののことです ([17])。ここで End $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}$ の $\mathbf{Q}$ ベクトル空間としての自己準同型環。注意すべきは、その名前にも拘らず cyclic derivation は <u>derivation ではありません</u>。以下に幾つか一般的な性質を列挙します。

- $\psi(1)$ は zero endomorphism になる。
- cyclic derivation の定義式から一般に induction を用いて以下の式が導かれる。

$$\begin{aligned}\psi(w_1w_1\cdots w_n)(w) &= \psi(w_1)(w_2\cdots w_nw)\\ &\quad + \psi(w_2)(w_3\cdots w_nww_1) + \cdots\cdots + \psi(w_n)(ww_1\cdots w_{n-1})\end{aligned}$$

- cyclic derivation ψ に対し $\overline{\psi}\colon\ \mathfrak{h} \longrightarrow \mathrm{End}\,\mathfrak{h}$ を

$$\overline{\psi}(w_1)(w_2) = \tau(\psi(\tau(w_1))(\tau(w_2))) \quad (w_1, w_2 \in \mathfrak{h},\ \tau \text{は dual map})$$

  で定義すると、$\overline{\psi}$ もまた cyclic derivation になる。

さて C を、以下の性質で一意的に決まる $\mathfrak{h}$ の cyclic derivation とします：

- $C(x) = 0$ (zero endomorphism),
- 任意の $w \in \mathfrak{h}$ に対して $C(y)(w) = xwy.$

この cyclic derivation C の性質をいくつか挙げてみましょう。

$$\begin{aligned}
&C(x^{i-1}y)(w) = C(y)(wx^{i-1}) = xwx^{i-1}y,\\
&C(x^{i-1}y)(1) = x^iy,\\
&C(x^{i_1-1}yx^{i_2-1}y\cdots x^{i_n-1}y)(1)\\
&= x^{i_1}yx^{i_2-1}y\cdots x^{i_n-1}y + x^{i_2}yx^{i_3-1}y\cdots x^{i_n-1}yx^{i_1-1}y + \cdots + x^{i_n}yx^{i_1-1}y\cdots x^{i_{n-1}-1}y,\\
&\overline{C}(x^{i_1-1}yx^{i_2-1}y\cdots x^{i_n-1}y)(1) = \sum_{\substack{1\le j\le n\\ i_j\ge 2}}\sum_{t=0}^{i_j-2} x^{i_j-t-1}yx^{i_{j+1}-1}y\cdots x^{i_{j-1}-1}yx^ty.
\end{aligned}$$

この C から多重ゼータ値の関係式が導き出せるというのが次の定理です。

定理 3.4 (cyclic sum formula [8]) $\mathfrak{h}^0$ の任意の *word* w に対して

$$(C - \overline{C})(w) \in \mathrm{Ker}\ \widetilde{\zeta}.$$

証明は、もともとの多重ゼータ値の言葉に主張を書き換えた上での比較的簡単な部分分数の計算によっています。次の節では、その多重ゼータ値の言葉でのこの定理の表記を見てみることにしましょう。

4 Cyclic sum formula

前節の最後で見た、cyclic sum formula を多重ゼータ値の関係式の形に書くと以下のようになります。

まず $0 < n < k$ に対して、

$$S(k,n) = \{(k_1, k_2, \dots, k_n) | k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k,\ k_i \geq 1\}$$

とし、$S(k,n)$ の 2 元 $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$ が n 文字の巡回置換の冪でうつりあうとき、これらを巡回同値と呼び、$\mathbf{k} \sim \mathbf{k}'$ と書くことにします。そして $S(k,n)$ の巡回同値類の全体を

$$\Pi(k,n) = S(k,n)/\sim$$

とします。このとき、cyclic sum formula （定理 3.4）は以下のように述べることができます。

定理 4.1 (cyclic sum formula) $\Pi(k,n)$ の任意の元 α に対して

$$\sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\alpha} \zeta(k_1+1, k_2, k_3, \dots, k_n) = \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\alpha} \sum_{i=0}^{k_1-2} \zeta(k_1 - i, k_2, k_3, \dots, k_n, i+1).$$

この定理の式は、duality formula を使って右辺を書き直すことで、以下のように、より対称性を持った公式として書けることがわかっています。

ここで、$\alpha \in \Pi(k,n)$ と $\beta \in \Pi(k, k-n)$ が dual class とは、α 内の admissible index の dual index が β に含まれていることとします。

定理 4.2 (cyclic sum formula) $\Pi(k,n)$ の任意の元 α とその *dual class* $\beta \in \Pi(k,k-n)$ に対して

$$\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\alpha} \zeta(k_1+1,k_2,k_3,\ldots,k_n) = \sum_{(k'_1,k'_2,\ldots,k'_{k-n})\in\beta} \zeta(k'_1+1,k'_2,k'_3,\ldots,k'_{k-n}).$$

定理 4.1 において、右辺の depth が左辺の depth よりも 1 増えていることに注意して、$\Pi(k,n)$ のすべての class に対する定理 4.1 の式の和を考えると、次のようになります。

系 4.1 (sum formula) $0 < n < k-1$ に対して

$$\sum_{\substack{\mathbf{k}:\text{admissible} \\ \mathrm{wt}(\mathbf{k})=k,\ \mathrm{dep}(\mathbf{k})=n}} \zeta(\mathbf{k}) = \sum_{\substack{\mathbf{k}:\text{admissible} \\ \mathrm{wt}(\mathbf{k})=k,\ \mathrm{dep}(\mathbf{k})=n+1}} \zeta(\mathbf{k})$$

この系は、weight を固定したときに、各々の depth を持つ多重ゼータ値の総和は、同じ値になることを意味しており、つまり sum formula（定理 1.3）なのです。すでに均整の取れた格好に見えていた sum formula が実は定理 4.1 として細分化できるものであったわけです。sum formula の証明はこれまで、母関数の議論によるものばかりが知られていましたが、このように cyclic sumformula から導かれたことにより、母関数の議論を使わず、比較的初等的な計算による別証明が得られたことになります。

先にも触れましたが、cyclic sum formula は weight 10 までは定理 1.4 に含まれますが、weight 11, 12 で（これより高い weight での実験は行っていない）定理 1.4 からは導かれない関係式を与えています。すなわち、finite double shuffle relation の方へ踏み込んでいる訳です。定理 1.4 と cyclic sum formula を統合して一般化することがこれからの課題です。

5　どのような値が Riemann ゼータ値で書けるのか

この節では、これまでの問題意識とは異なって、Euler が depth 2 の場合に調べた問題でもある「多重ゼータ値はいつ Riemann ゼータ値（の有理数係数多項式）で書けるのか」について、知られていることをある視点に基づいて見ていこうと思います。

Euler は weight 10 までの depth 2 の多重ゼータ値について、depth 1 のゼータ値（Riemann ゼータ値）で書けるものは具体的に書き表し（weight 8, 10 に書けないものが現れ

る）、weight が 15 までの奇数の時にすべてを Riemann ゼータ値で書き上げた上で、一般の奇数 weight （depth 2）の多重ゼータ値を Riemann ゼータ値で書き表す計算式を与えているようです。また、weight k が任意で

$$\zeta(k-1,1)=\frac{k-1}{2}\zeta(k)-\frac{1}{2}\sum_{r=2}^{k-2}\zeta(r)\zeta(k-r)$$

なども与えています。

さて、ここまでに見てきた関係式の系列の中で、この問題意識からまず思い出されるのは、sum formula でしょう。繰り返しになりますがもう一度書きますと

定理 5.1 (sum formula) $0<n<k$ に対して

$$\sum_{\substack{\mathbf{k}:\text{admissible}\\ \mathrm{wt}(\mathbf{k})=k,\ \mathrm{dep}(\mathbf{k})=n}}\zeta(\mathbf{k})=\zeta(k).$$

今、admissible index set $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ に対してその “height” $\mathrm{ht}(\mathbf{k})$ を

$$\mathrm{ht}(\mathbf{k})=\#\{i|k_i\geq 2\}$$

で定義します。$\mathrm{ht}(\mathbf{k})\leq \mathrm{wt}(\mathbf{k})/2$ であり、$\mathbf{k}'$ が $\mathbf{k}$ の dual index ならば $\mathrm{ht}(\mathbf{k}')=\mathrm{ht}(\mathbf{k})$ であることに注意します。

結び目不変量の研究から Le-Murakami が導いた関係式のうちの 1 つは、この height を用いて次のように述べられます（正確な式は [10] も参照。）

定理 5.2 (T. Q. T. Le and J. Murakami [11]) $1\leq s\leq k$ に対して

$$\sum_{\substack{\mathbf{k}:\text{admissible}\\ \mathrm{wt}(\mathbf{k})=2k,\ \mathrm{ht}(\mathbf{k})=s}}(-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\zeta(\mathbf{k})=（\text{有理数}）\cdot\zeta(2k).$$

ここで、この定理の左辺の細分化とも言える次の量を定義します。

$$F(k,n,s)=\sum_{\substack{\mathbf{k}:\text{admissible}\\ \mathrm{wt}(\mathbf{k})=k,\ \mathrm{dep}(\mathbf{k})=n,\ \mathrm{ht}(\mathbf{k})=s}}\zeta(\mathbf{k})$$

これを用いると上記 Le-Murakami の結果は

$$\sum_{n=1}^{2k-s}(-1)^nF(2k,n,s)\in\mathbf{Q}\zeta(2k)$$

と書けますし、sum formula は

$$\sum_{s=1}^{\min(n,k-n)} F(k,n,s) = \zeta(k)$$

ということです。今 R_k で、$\mathbf{Q}[\pi^2, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \ldots]$ の weight が k の部分（正確には、$\zeta(m)$ の次数を m と見て、k 次斉次式全体で張られる $\mathbf{Q}$ ベクトル空間）を表わすとすると、個々の $F(k,n,s)$ についてこれまでに、

$F(k,2,1)(=\zeta(k-1,1)),\ F(k,2,2) \in R_k$	Euler
$F(k,n,n) \in R_k$	Hoffman, Kaneko
$F(k,n,1)(=\zeta(k-n+1,1,\ldots,1)) \in R_k$	Aomoto, Drinfel'd, Zagier
$F(2n,n,n) = \zeta(2,2,\ldots,2) \in \mathbf{Q}\zeta(2n)$	Euler(?)
$F(2n+1,n,n) \in R_{2n+1}$	Kaneko

などが知られていました。（具体的に値が Riemann ゼータ値で書き下せているものも、そうでないものもあります。）最近、一般的に、次の結果を得ることが出来ました。height というのはまだ意味のはっきりしない概念ですが、この結果が何かを示唆しているのでしょうか。

定理 5.3 ([14]) 可能な全ての組 (k,n,s) に対して

$$F(k,n,s) \in R_k$$

証明は反復積分表示を用いた母関数の議論によっています。詳しくは論文を参照して下さい。

多重ゼータ値の文献に関しては Hoffman の web page

http://www.nadn.navy.mil/Users/math/meh/biblio.html

が便利です。また、多重ゼータ「値」でなく、index を変数にした多重ゼータ関数は解析数論の方で古くから扱われています。これについてかなり詳細な文献表が松本耕二さんの [12] にあります。

以下では本文で参照したもののみあげました。

参考文献

[1] K. Aomoto, Special values of hyperlogarithms and linear difference schemes, *Illinois J. of Math.*, **34-2** (1990), 191–216.

[2] 荒川恒男 金子昌信, 多重ゼータ値、多重ベルヌーイ数 および関連するゼータ関数, 津田塾大学数学・計算機科学研究所報, **13**, 第 2 回津田塾大学整数論シンポジウム報告集 (1997), 133–144.

[3] H. Furusho, The multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra, *in preparation.*

[4] A. Granville, A decomposition of Riemann's zeta-function, in London Math. Soc. Lecture Note Ser. 247, Cambridge, 1997, pp. 95–101.

[5] A. Goncharov, Multiple ζ-values, Galois groups, and geometry of modular varieties, *preprint* (AG/0005069, 8 May, 2000).

[6] M. Hoffman, Multiple harmonic series, *Pacific J. Math.*, **152** (1992), 275–290.

[7] M. Hoffman, The algebra of multiple harmonic series, *J. Algebra*, **194** (1997), 477–495.

[8] M. Hoffman and Y. Ohno, Relations of multiple zeta values and their algebraic expression, *preprint*, 2000.

[9] K. Ihara and M. Kaneko, Derivation relations and regularized double shuffle relations of multiple zeta values, *in preparation.*

[10] 金子昌信：多重ゼータ値入門、数理解析研究所講究録 1097、1999.

[11] T. Q. T. Le and J. Murakami, Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions, *Topology and its Applications*, **62** (1995), 193–206.

[12] K. Matsumoto, On analytic continuation of various multiple zeta-functions, *preprint*, 2000.

[13] Y. Ohno, A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values, *J. Number Theory*, **74** (1999), 39–43.

[14] Y. Ohno and D. Zagier, Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height, *preprint*, 2000.

[15] C. Reutenauer, Free Lie Algebras, Oxford Science Publications,1993.

[16] T. Rivoal, La fonction Zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs, *preprint* (arXiv:math.NT/0008051, 7 Aug. 2000).

[17] G. C. Rota, B. Sagan, and P. R. Stein, A cyclic derivative in noncommutative algebra, *J. Algebra* , **64** (1980), 54–75.

[18] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, in ECM volume, *Progress in Math.*, **120** (1994), 497–512.