

多重ゼータ値と多重ベルヌーイ数

金子 昌信 (九州大学数理学研究院)

多重ゼータ値とは、自然数 k_1, k_2, \dots, k_n に対し無限級数

$$\zeta(k_1, k_2, \dots, k_n) := \sum_{m_1 > m_2 > \dots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}}$$

で定義される一つの実数である。ただし収束のためには $k_1 \geq 2$ が必要である。こういう級数を最初に考えたのは Euler ($n = 2$ の場合) で、1775 年の論文がある。以後いろいろな人の研究があるが、広く注目を集めて沢山の論文が出るようになったのは 1990 年代になってからで、未だ 20 年に満たない。その 90 年代初頭に先駆的な仕事をした Michael Hoffman は自分のホームページに多重ゼータ値関係の文献表を載せている。そこに載っている論文を試みに年代別に勘定してみると、Euler の 1775 年から 1953 年までが 5 編、そこからしばらく飛んで、1982 年から 1985 年までに 3 編、また空白があつて 1992 年から 1990 年代最後の 1999 年までが 25 編、そして、2000 年から現在までが実に 170 編であつた。タイトルを見ても、この 10 年の論文は多様な分野とのつながりを示すものが多い。

私は、故荒川恒男さんと共にこの分野の研究を始めたのが 1995 年頃で、当時は読むべき文献も少なく、興味を持つ人も日本には余りいなかった。我々の研究動機も、半ば戯れに定義した多重ベルヌーイ数という、ベルヌーイ数のある一般化との関係で、リーマンゼータの場合のように何か面白いことでもないか、といったところで、何か既存の問題に取り組もうというのではなかったから、ある意味自由でのんびりしたものであつた。その後の爆発的ともいえる進展ぶりは上述の通りで、それは当初我々がやり始めた、「多重ベルヌーイ数と多重ゼータ値」という線とは全く違うところでの進展であつた。

ところがこの数年来、多重ベルヌーイ数が思いがけぬところに現れて、荒川さんとの仕事も見直してみるとまだ結構面白いことがあるのかも知れないと思うようになった。そこで、本稿 (および講演) では、多重ベルヌーイ数をむしろ中心に据えて、最近の話題のいくつかを紹介することとした。この数年の代数学シンポジウムの午前の講演は、他分野の人にも分かる概説的な講演をということになっており、私も最近の多重ゼータ値研究の全体像を概観するような講演を依頼されたと理解はしたものの、すでに色々な概説論文や記事もあり、何よりそれは自分の手に余ることに思われたので、我が儘をさせてもらい「多重ゼータ値と多重ベルヌーイ数」として話をすることにした。内容からするとしかし「多重ベルヌーイ数と多重ゼータ値」とすべきであつたかも知れない。

1. 多重ベルヌーイ数

今年 (2008 年) は関孝和の没後 300 年にあたるそうであるが、彼は「関・ベルヌーイ数」を漸化式

$$\sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} B_i = n+1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

で定義した。これを母関数の形で書くと

$$\frac{x e^x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

となる. よく見る形の $x/(e^x - 1)$ とは e^x が掛かっている点が異なるが, B_n の値は $B_1 = 1/2$ (もう一方は $-1/2$) となるだけであとは同じである.

さてこの母関数を

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = \frac{x}{1 - e^{-x}} = \frac{-\log(1 - (1 - e^{-x}))}{1 - e^{-x}}$$

と変形し, さらに多重対数級数

$$Li_k(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}$$

を用いて

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = \frac{Li_1(1 - e^{-x})}{1 - e^{-x}}$$

と書く. そこで, 整数 k と $n \geq 0$ に対し, 多重ベルヌーイ数 $B_n^{(k)}$ とその一つの変種 $C_n^{(k)}$ を

$$\frac{Li_k(1 - e^{-x})}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} \frac{x^n}{n!} \quad \text{および} \quad \frac{Li_k(1 - e^{-x})}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}$$

で定義する. $C_n^{(k)}$ は $x/(e^x - 1)$ の方を Li_k を使って一般化したものである. 多重対数級数というのは $k \geq 1$ の場合の $Li_k(z)$ を指すが, ここでは単に形式的冪級数として扱うだけで, $k \leq 0$ でも構わない. そのときは有理関数の展開級数である. これらの数は [13] や [5] で導入され, [6], [18], [1] などですらに調べられた. それらは主として, 古典的なベルヌーイ数で成り立っている Clausen - von Staudt の定理の一般化や, ゼータ関数の値との関係を目指したものであるが, 最近, k が負のときの $B_n^{(k)}$ に非常にきれいな組合せ的意味がつくことが示された. ゼータ値とは離れるが, まず次節でその結果を紹介し, そのあとゼータ関数との関係について述べる.

2. 負の指数をもつ多重ベルヌーイ数の組合せ的解釈

負の指数をもつ多重ベルヌーイ数 $B_n^{(-k)}$ ($k, n \geq 0$) は自然数であることが示される ([13], [6], また [18]). そこでこれらの数の組合せ的意味を問うのは自然であるが, 最近 C. Brewbaker と S. Launois によりそれぞれ異なる解釈が与えられた.

まず定義であるが, 「ロンサム行列」 (“lonsum matrix”, 孤独和行列とでも訳すのか) とは, 成分が 0 か 1 の行列で, その行和から作られる列ベクトル, 列和から作られる行ベクトルによって一意的に復元されるものをいう. 例えば, 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は行和が ${}^t(1, 2, 1)$, 列和が $(3, 1)$ となるが, この情報だけから元の行列が一意的に復元される (例えば列和の成分に 3 があるが, これより第一列はすべて 1 でなければならない, 等). Brewbaker はこのような「ロンサム行列」の個数を数え上げ, それが多重ベルヌーイ数に等しいことを証明した. ちなみに Brewbaker は情報関係の人で, このような行列も何か情報通信関係で応用があるらしい.

定理 (Brewbaker [9]). k, n を任意の自然数とする. k 行 n 列のロンサム行列の総数は $B_n^{(-k)}$ に等しい.

証明には, ロンサム行列であるための必要十分条件がどの 2×2 のマイナーにも $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が現れないこと, という特徴付けを利用して数え上げる. するとスターリング数が出てくるが, 多重ベルヌーイ数のスターリング数を用いた公式 [13] により, 定理が証明される.

定義から明らかに, k 行 n 列のロンサム行列の総数と n 行 k 列のロンサム行列の総数は等しいから, この定理より多重ベルヌーイ数の対称性 $B_n^{(-k)} = B_k^{(-n)}$ が従う (これは既に証明されていることではあるが).

もう一つの解釈は対称群のある元の個数に関するものである. n 次対称群 \mathfrak{S}_n を通常のように集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上の置換全体の群と同一視する. S. Launois が次を証明した.

定理 (Launois [14]). k, n を正整数とする. 対称群 \mathfrak{S}_{k+n} の部分集合

$$\{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+n} \mid -k \leq \sigma(i) - i \leq n, 1 \leq \forall i \leq k+n\}$$

の元の個数は $B_n^{(-k)}$ に等しい.

この証明にも多重ベルヌーイ数のスターリング数を用いた公式を使う. またこの定理からも (i を $\sigma^{-1}(i)$ で置き換えれば) 対称性 $B_n^{(-k)} = B_k^{(-n)}$ が従う.

対称群の元は置換行列を考えると 0-1 行列と同一視出来るが, この Launois の定理と先の Brewbaker の間に何か関係があるだろうか. 最近 Pohang (韓国) の Kim Hyun Kwang 氏が両者の集合の間に全単射を構成された由を伺ったが, 二つの関係がよく分かるような直接的なものではないとのことで, どうもすっきりした説明ではないようである.

3. あるゼータ関数の特殊値と多重調和級数 mod p

荒川さんとの共著論文 [5] において, 次の積分で定義される関数 $\xi_k(s)$ ($k \geq 1$) を導入した.

$$\xi_k(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} Li_k(1 - e^{-t}) dt.$$

これは $\text{Re}(s) > 0$ で収束し, 全 s -平面に有理型に解析接続される. [5] においてこの関数の次の表示を証明した.

$$\begin{aligned} \xi_k(s) = & (-1)^{k-1} \left[\zeta(s, \underbrace{2, 1, \dots, 1}_{k-1}) + \zeta(s, \underbrace{1, 2, 1, \dots, 1}_{k-1}) + \dots + \zeta(s, \underbrace{1, \dots, 1, 2}_{k-1}) \right. \\ & \left. + s \cdot \zeta(s+1, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-1}) \right] + \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \zeta(k-j) \cdot \zeta(s, \underbrace{1, \dots, 1}_j). \end{aligned} \quad (1)$$

ここに

$$\zeta(s_1, s_2, \dots, s_n) := \sum_{m_1 > m_2 > \dots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{s_1} m_2^{s_2} \dots m_n^{s_n}} \quad (2)$$

は多重ゼータ関数で、絶対収束域はやや複雑であるが、 \mathbf{C}^n 全体の有理型関数に解析接続されることが知られている ([2]). この正整数点での値が多重ゼータ値である. ここでは一つの変数を除いてすべて正整数値に固定し、一変数関数としたものの結合が右辺に現れている.

この表示から特に、関数 $\xi_k(s)$ の正整数点 (≥ 2) での値が多重ゼータ値の (\mathbf{Z} 上の) 一次結合となっていることが分かる. この値について、大野泰生氏はその有名な関係式の一つの系として、

$$\xi_{k-1}(n) = \zeta^*(k, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}) \quad (k, n \geq 2), \quad (3)$$

なる簡明な表示式を導いた (後の都合上 k を $k-1$ に変えている). ここで

$$\zeta^*(k_1, k_2, \dots, k_n) := \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}}$$

は「多重 S 値 (multiple zeta star value, non-strict multiple zeta value)」と呼ばれるもので、多重ゼータ値の定義級数の和において等号を許すものである.

一方負の整数点での値は [5] によれば

$$\xi_{k-1}(-n) = (-1)^n C_n^{(k-1)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

と、多重ベルヌーイ数である.

さて p を奇素数とする. Hoffman [12] にしたがって、 $S_{(k, 1^{n-1})}(p-1)$ で、級数 $\zeta^*(k, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1})$ を分母に p が現れる直前で打ち切って得られる有限和を表すことにする:

$$S_{(k, 1^{n-1})}(p-1) := \sum_{p-1 \geq m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq 1} \frac{1}{m_1^k m_2 \dots m_n}.$$

Hoffman はこの量を $\text{mod } p$ したものの公式を与えているが、それは、多重ベルヌーイ数の公式

$$C_n^{(k)} = (-1)^n \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{i! \left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ i+1 \end{smallmatrix} \right\}}{(i+1)^k}$$

($\left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ i+1 \end{smallmatrix} \right\}$ は第二種スターリング数で、 $n+1$ 元集合を $i+1$ 個の空でない部分集合の和に分ける仕方の数. この公式は [13] で与えられている $B_n^{(k)}$ に対する同様の公式 (前節でも言及した) と同じようにして証明される) を使うと、次のように書くことが出来る.

定理 (Hoffman [12]). 任意の正整数 k, n および任意の素数 $p > n$ に対し次の合同式が成り立つ.

$$S_{(k, 1^{n-1})}(p-1) \equiv (-1)^n C_{p-1-n}^{(k-1)} \pmod{p}. \quad (5)$$

これと $\xi_{k-1}(-n)$ についての公式 (4) を合わせると

$$S_{(k,1^{n-1})}(p-1) \equiv \xi_{k-1}(-p+1+n) \pmod{p} \quad (6)$$

を得る。これは、大野の公式 (3) と見比べると大変面白く思われる。すなわち、関数 $\xi_{k-1}(s)$ の正整数点 n での値は多重S値 $\zeta^*(k, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1})$ で与えられるが、素数 $p > n$ を任意に選んで、この級数を p の手前で打ち切って得られる有理数 $S_{(k,1^{n-1})}(p-1)$ を \pmod{p} するとそれは $\xi_{k-1}(s)$ の $n - (p-1)$ での値、つまりもとの n を $p-1$ だけ左にシフトした点での値と合同だというのである！

$$\xi_{k-1}(n) = \zeta^*(k, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}) \xrightarrow{\text{truncate}} S_{(k,1^{n-1})}(p-1) \xrightarrow{\pmod{p}} \xi_{k-1}(n - (p-1)) \pmod{p}.$$

リーマンゼータ関数等の負整数点での値に関して Kummer の合同式というものがあり、それは $p-1$ だけ異なる点での値が \pmod{p} で等しいという形を取る。これを思い出させるようでもあるが、どう理解して良いのか分からない、不思議な現象に思われる。

Hoffman は [12] において一般の

$$\sum_{p-1 \geq m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}} \quad \text{や} \quad \sum_{p-1 \geq m_1 > m_2 > \dots > m_n \geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}} \quad (k_i \geq 1),$$

を \pmod{p} したものについても色々調べているのだが、 $S_{(k,1^{n-1})}(p-1)$ に関して「双対性」

$$(-1)^k S_{(k,1^{n-1})}(p-1) \equiv (-1)^n S_{(n,1^{k-1})}(p-1) \pmod{p} \quad (7)$$

を証明している。これは合同式 (5) から、多重ベルヌーイ数の双対性 (先に紹介した $B_n^{(-k)} = B_k^{(-n)}$ ($k, n \geq 0$) と同様に証明される [13])

$$C_{n-1}^{(-k)} = C_{k-1}^{(-n)} \quad (k, n \geq 1) \quad (\text{等式})$$

の帰結となるが、Hoffman が行っている議論は多重S値についての一つの予想を示唆した。次にそれを述べる。

まず、リーマンゼータ値を p の手前で打ち切ったものについての合同式

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots + \frac{1}{(p-1)^n} \equiv 0 \pmod{p}$$

に注意する。これは $p > n+1$ のとき常に成り立つ (項を並べ替えると $1+2+\dots+(p-1) = p(p-1)/2$ に等しくなるので)。さて、Hoffman はいろいろな合同式を示す際に、ある量が上のリーマンゼータ値を打ち切ったもので書けることを言うておいて、したがって \pmod{p} すると 0、という議論を何度か行っている。先の双対性については異なる議論で証明されており、差

$$(-1)^k S_{(k,1^{n-1})}(p-1) - (-1)^n S_{(n,1^{k-1})}(p-1)$$

がリーマンゼータ値の多項式で書けるのかは分からないが、これの標数 0 での対応物を実験してみることにした。

すなわち、公式 (3), (6), (7) に示唆され、差

$$(-1)^k \zeta^*(k, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}) - (-1)^n \zeta^*(n, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}) \quad (8)$$

がリーマンゼータ値の多項式で書けないかを調べた。数値実験の結果は肯定的であったので、大野氏に予想を伝えたところ、ほどなくしてそれが正しいことを証明された。彼は (3), (1), および自身の結果 [16] をつかい

$$\begin{aligned} & (-1)^k \zeta^*(k, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}) - (-1)^n \zeta^*(n, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}) \\ = & (n-1) \zeta(n+1, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-2}) - (k-1) \zeta(k+1, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-2}) \\ & - (-1)^k \sum_{j=1}^{k-2} (-1)^j \zeta(k-j) \zeta(n, \underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}) + (-1)^n \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^j \zeta(n-j) \zeta(k, \underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}) \end{aligned}$$

という式を証明した (数値実験によれば右辺は 0 ではない)。既に “height 1” の多重ゼータ値 ($\zeta(m, 1, \dots, 1)$ の形のもの) はリーマンゼータ値の多項式で書けることが知られている ([3], [10], また [17] も参照) ので、(8) がリーマンゼータ値の多項式であることが分かる。

注意すべきは、多重ゼータ値の双対性として知られる等式はこの “height 1” の場合

$$\zeta(k+1, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}) = \zeta(n+1, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1})$$

という形を取り、これをそのまま ζ^* -値に変えても成り立たない。また別の形でも ζ^* の双対性にあたることは知られていないのであり、上の主張

$$(-1)^k \zeta^*(k, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}) - (-1)^n \zeta^*(n, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}) \in \mathbf{Q}[\zeta(2), \zeta(3), \zeta(5), \dots]$$

は双対性の代用物の一種とみなせるのかも知れない。このときのインデックスの対応

$$(k, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}) \longleftrightarrow (n, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1})$$

が多重ゼータ値の場合とずれているのが何を意味するのか、今後の説明を待ちたい。

4. 中央二項級数 (Central binomial series)

この節では多重ベルヌーイ数が特殊値に現れる別の形のゼータ関数について見ていくとする。この関数はまた多重ゼータ値とも関連して興味深い。

$\zeta_{CB}(s)$ で次のディリクレ級数を表す：

$$\zeta_{CB}(s) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s \binom{2m}{m}}$$

これは全複素平面で絶対収束する. 論文 [7] において Borwein, Broadhurst, Kamnitzer は, 各整数 $k \geq 2$ に対して $\zeta_{CB}(k)$ が, (height 1 の) 多重ゼータ値, および “multiple Clausen values”, “multiple Glaisher values” の \mathbf{Q} 線形結合で表されることを示した. 最後の二つは彼らの命名で, 多重対数級数

$$Li_{k_1, \dots, k_n}(z) := \sum_{m_1 > \dots > m_n > 0} \frac{z^{m_1}}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}}$$

の 1 の 6 乗根での値の実部ないし虚部をとったものをいう.

多重ゼータ値について, Zagier の「次元予想」というものがあり, それは, $k_1 + \dots + k_n$ の値を固定 (n は動かす) したときの $\zeta(k_1, \dots, k_n)$ たちで \mathbf{Q} 上張られる線形空間の次元についての予想であるが, これの対応物として彼らは次を予想している.

予想 ([7]). 次のような空間の次元を考える:

$$a_k := \dim_{\mathbf{Q}} \sum_{k_1 + \dots + k_n = k, n \geq 1} \mathbf{Q} \cdot \operatorname{Re} \left(i^{k_1 + \dots + k_n} Li_{k_1, \dots, k_n}(e^{\pi i/3}) \right),$$

$$b_k := \dim_{\mathbf{Q}} \sum_{k_1 + \dots + k_n = k, n \geq 1} \mathbf{Q} \cdot \operatorname{Im} \left(i^{k_1 + \dots + k_n} Li_{k_1, \dots, k_n}(e^{\pi i/3}) \right).$$

このとき, a_k, b_k は, 次で定まるであろう:

$$\begin{aligned} \text{初期値:} \quad & a_0 = a_1 = 1, \quad b_0 = b_1 = 0, \\ \text{漸化式:} \quad & a_n = a_{n-1} + b_{n-2}, \quad b_n = b_{n-1} + a_{n-2}. \end{aligned}$$

(特に $a_n + b_n$ はフィボナッチ数列である.)

もとの多重ゼータ値の場合の次元予想については, Goncharov [11] と寺杣 [20] による決定的な結果 (予想次元が実際の次元の上限を与える) が得られているが, この場合にも同じような幾何的な解釈からの結果を期待できるのであろうか.

さて一方, $k \leq 1$ に対する $\zeta_{CB}(k)$ は常に 1 と $\pi/\sqrt{3}$ の \mathbf{Q} 線形結合となる. これは D. H. Lehmer [15] の結果である. 彼は公式

$$\frac{2x \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2x)^{2m}}{m \binom{2m}{m}} \quad |x| < 1$$

を次々と微分することによりこれを示した. より詳しい結果は次の通り.

二つの多項式列 $\{p_k(t)\}$ および $\{q_k(t)\}$ ($k = -1, 0, 1, 2, \dots$) を $p_{-1}(t) = 0, q_{-1}(t) = 1$ と漸化式

$$\begin{aligned} p_{k+1}(t) &= 2(kt+1)p_k(t) + 2t(1-t)p'_k(t) + q_k(t), \\ q_{k+1}(t) &= (2(k+1)t+1)q_k(t) + 2t(1-t)q'_k(t) \quad (k \geq -1) \end{aligned}$$

で定める. 最初の幾つかを書き出すと $p_0(t) = q_0(t) = 1, p_1(t) = 3, q_1(t) = 2t + 1, p_2(t) = 8t + 7, q_2(t) = 4t^2 + 10t + 1, \dots$ となっている. このとき, $k \geq -1$ にたいし

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)^k (2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}} = \frac{x}{(1-x^2)^{k+3/2}} \left(x\sqrt{1-x^2} p_k(x^2) + \arcsin(x) q_k(x^2) \right)$$

が成り立ち, したがって

$$\zeta_{CB}(-k) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^k p_k\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{k+1} q_k\left(\frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad (k \geq -1) \quad (9)$$

となる.

これは, $\zeta_{CB}(-k)$ ($k \geq -1$) は常に 1 と $\pi/\sqrt{3}$ で張られる二次元 \mathbf{Q} ベクトル空間に入ることを示す. これはオイラーの $\zeta(s)$ に関する結果 ($\zeta(s)$ の負の整数点での値は一次元 \mathbf{Q} ベクトル空間 (\mathbf{Q} 自身) に含まれ, 正の整数点での値は π の冪をはじめいろいろな超越数 (今のところ予想) が現れる) を連想させる. リーマンゼータ関数の負整数点での値はベルヌーイ数で書き表せるが, R. Stephan [19] は, 公式 (9) の有理数部分は負の指数を持つ多重ベルヌーイ数のある和に他ならないことを観察した:

$$\left(\frac{2}{3} \right)^k p_k\left(\frac{1}{4}\right) = \sum_{l=0}^k B_{k-l}^{(-l)}.$$

この観察はまだ証明されていない. 論文 [8] にある, (9) の有理数部分の公式を使うと出来るはずだと思うが, 一度試みたときはどうもうまくいかなかった. (9) における $\pi/\sqrt{3}$ の係数が多重ベルヌーイ数か, 或いは何か関連する数で書けるのかどうか, 今のところ分からない.

$\zeta_{CB}(s)$ についてはいろいろと変種を考えることも出来るであろう. その中には特殊値について類似の結果を得たり予想を立てたりすることが可能なものもあると思われる.

参考文献

- [1] A. Adelberg, *Kummer congruences for universal Bernoulli numbers and related congruences for poly-Bernoulli numbers*, Int. Math. J, **1**, 53–63 (2002).
- [2] S. Akiyama, S. Egami and Y. Tanigawa, *Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers*, Acta Arith., **98-2**, 107–116 (2001).
- [3] K. Aomoto, *Special values of hyperlogarithms and linear difference schemes*, Illinois J. of Math., **34-2**, 191–216 (1990).
- [4] 荒川恒男, 伊吹山知義, 金子昌信, ベルヌーイ数とゼータ関数. 牧野書店 2001.
- [5] T. Arakawa and M. Kaneko, *Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions*, Nagoya Math. J. **153**, 1–21 (1999).

- [6] T. Arakawa and M. Kaneko, *On Poly-Bernoulli numbers*, Comment. Math. Univ. Sanct. Pauli, **48-2**, 159–167 (1999).
- [7] J. Borwein, D. Broadhurst and J. Kamnitzer, *Central binomial sums, multiple Clausen values, and zeta values*, Experiment. Math., **10**, 25–34 (2001).
- [8] J. Borwein and R. Girgensohn, *Evaluations of binomial series*, Aequationes Math., **70**, 25–36 (2005).
- [9] C. Brewbaker, *Lonesum $(0,1)$ -matrices and poly-Bernoulli numbers of negative index*, Master’s thesis, Iowa State University, 2005.
- [10] V. G. Drinfel’d, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$* , Leningrad Math. J. **2**, 829–860 (1991).
- [11] A. G. Goncharov, *Multiple polylogarithms and mixed Tate motives*, preprint, math.AG/10013059.
- [12] M. Hoffman, *Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums*, preprint, arXiv:math/0401319v2 [math.NT] 17 Aug. 2007.
- [13] M. Kaneko, *Poly-Bernoulli numbers*, J. de Théorie des Nombres **9**, 199–206 (1997).
- [14] S. Launois, *Rank t \mathcal{H} -primes in quantum matrices*, Comm. Alg., **33-3**, 837–854 (2005).
- [15] D. H. Lehmer, *Interesting series involving the central binomial coefficient*, Amer. Math. Monthly **92-7**, 449–457 (1985).
- [16] Y. Ohno, *A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values*, J. Number Th. **74**, 39–43 (1999).
- [17] Y. Ohno and D. Zagier, *Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height*, Indag. Math., **12** (4), 483–487 (2001).
- [18] R. Sanchez-Peregrino, *A note on a closed formula for poly-Bernoulli numbers*, Amer. Math. Month., **109-8** 755–756 (2002).
- [19] R. Stephan, Sequence number A098830 in *On-line Encyclopedia of Integer Sequences*, <http://www.research.att.com/~njas/sequences/Seis.html>
- [20] T. Terasoma, *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, Invent. Math. **149** 339–369 (2002).