

# 「多重ゼータ値」小史

九州大学数理学研究院 金子昌信

多重ゼータ値というのは、与えられたいくつかの自然数  $k_1, \dots, k_r$  に対して次の多重級数で定まる実数のことである。

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) = \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}.$$

またこの「等号付き版」として、

$$\zeta^*(k_1, \dots, k_r) = \sum_{1 \leq m_1 \leq \dots \leq m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}$$

も導入しておく。和は大小関係のついた自然数の組をわたっていて、 $\zeta^*$  の方は等号も許す。 $k_r$  が 1 だと発散してしまうので、 $k_r > 1$  と仮定する。 $r = 1$  の場合はいずれもリーマンゼータ関数の正整数点での値に他ならない。

この 2~30 年来、この対象が様々な数学分野、あるいは物理学にまで現れて、多方面からの研究が今なお活発である。私は数えるともう 30 年近く、この多重ゼータ値の研究を行ってきた古株だからであろう、本シンポジウムの世話人のお一人である佐藤文広さんが、多重ゼータの歴史について講演いただけないかと声をかけて下さった。そのときのメールには、この「数学史シンポジウム」は故杉浦光夫先生の「現代数学史研究会」の伝統を引き継ぐものでもあり、一般の数学史に加えて現代数学の研究史も守備範囲にしてきた、であるから多重ゼータの歴史もシンポジウムにふさわしいと思う、とも書き添えられていた。私は歴史には全くの素人ながら、それならば何か話せることもあろうかと、お引き受けしたのであったが、それはもちろん、敬愛する先輩から頼まれて断るわけにはいかないということもあるが、実は私が多重ゼータ値の研究を始めるようになったのは、杉浦先生の遠い影響、学恩が関係しているのである。そのあたりの事情はかつて [17] にいくらか書いたことがあるので繰り返さないが、ともかくも杉浦先生が始められた研究会（私も何度か参加したことがある）の流れをくむ集会でお話をする機会が頂けたというのは、一種の奇縁にも感じ、また光栄なことであった。ここに佐藤さん、またもう一人の世話人であり元同僚でもある中屋敷さんに心から感謝を申し上げる次第である。

ところがしかし、いざ準備を始めてみると、多重ゼータ値という特殊な話題でありながら、その研究はやはり膨大なことになっており<sup>1</sup>、歴史と言っても何をどのようにまとめればよいのか、途方に暮れてしまった。結局「始祖」Goldbach と Euler のお話をしたあとは、幾つかの「小ネタ」とでもいうような話題でお茶を濁してしまった。報告集には講演で話せなかったようなことも盛り込んで沢山書ければよかったのだろうが、大変申し訳ないけれども、力も余裕もなく、本当に小史も小史、一断面とでもいうようなものになってしまった。どうかご寛恕ください。

また講演を準備するにあたって、渋川元樹さん、梅澤瞭太さんのお二人にお世話になった。ここに記して感謝したい。

<sup>1</sup>Michael Hoffman の HP [15] にその膨大な文献表がある。これを書いている 23 年 1 月 29 日現在、1121 篇の論文が、内容別に A から H のカテゴリーに分けられてリストアップされている。そのうち 2000 年より前に出ているのはわずか 43 篇に過ぎない。

# 1 Goldbach と Euler

現在文献で確認できる範囲で、多重ゼータ値が最初に登場するのは、1742年の12月24日付の Goldbach から Euler に宛てた手紙（ドイツ語）においてであると思われる（[8]、この「Part II」は英訳の方で、原本は Part I）。そこで Goldbach は和

$$1 + \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{2^m}\right) + \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m}\right) + \frac{1}{4^n} \left(1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m}\right) + \dots \quad (*)$$

を、 $m$  と  $n$  が等しい偶数でない場合に求めることが、「問題の中の問題」であると述べているのである。これは最初に定義した記号でいうと  $\zeta^*(m, n)$  を求める問題である。彼はその手紙の冒頭に、このような級数を考えたきっかけを書いている。それは、前の手紙（1742年12月6日付）で話題にしていた級数

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \left(1 \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} \left(1 \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \mp \frac{1}{4}\right) + \dots \\ & 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) + \dots \\ & \frac{1 \cdot 1}{4} - \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{25} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots \end{aligned}$$

を再考していた時、それらが何かの書き間違いから出てきたことに気がついたのだが、「間違わなかったらばより小さい手柄しか挙げなかったろう」という警句<sup>2</sup>のごとくに、その再考の機会がなければ決して考えなかったであろう和 (\*) に出会ったのだと。そして、(\*) について例えば

$$1 + \frac{1}{2^3} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \dots (= \zeta^*(1, 3)) = \frac{\pi^4}{72}$$

は分かるのだけでも、

$$A (= \zeta^*(1, 5)) = 1 + \frac{1}{2^5} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^5} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^5} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \dots$$

や

$$B (= \zeta^*(2, 4)) = 1 + \frac{1}{2^4} \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3^4} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \frac{1}{4^4} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \dots$$

は分からない、しかし

$$2A + B = \frac{19\pi^6}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3^4}$$

であることは分かる、と書いている。また一般に  $m, n$  が偶数であれば和  $\zeta^*(m, n) + \zeta^*(n, m)$  は決定できると、理由は書かずに、述べている。これは、まず間違いなく、Euler による  $\zeta(m)$  ( $m$ : 偶数) の決定と、下に述べる調和積と呼ばれる、級数の積から容易に分かる等式から導いたものと思われる。

Euler は Goldbach のこの手紙にいたく刺激を受けたらしく、1743年1月19日付の返信では、その書き間違いは実に幸運であった、かくも “herrlichen Erfindungen”（素晴らしい発見）に結びついたのでから、と書いている。そして、“Es hat mich viele Stunden und grosse calculos gekostet”（何時間も、そして膨大な計算を費やし）、“grosser mühe”（多大な努力）の末に得た、Goldbach がいくつか書いた式を含むはるかに一般的な言明を書き送っている。たとえば

$$\zeta^*(1, 2n-1) = \sum_{j=2}^{n-1} (-1)^j \zeta(j) \zeta(2n-j) + \frac{(-1)^n}{2} \zeta(n)^2$$

や（このように一般的な形では書いていないが、書かれているものからパターンを推測するのは容易である）いくつかの具体的な値、また Goldbach は書かなかった、今日「調和積」あるいは「stuffle product」として知られる、

$$\zeta(m)\zeta(n) + \zeta(m+n) = \zeta^*(m, n) + \zeta^*(n, m)$$

<sup>2</sup>Si non errasset, fecerat illa minus. ローマの詩人マルティアリス (Martialis) のエピグラム (Epigrammata) 1.21 の最終行。ローマの英雄スカエウォラがエトルリアの王ボルセナを殺害しようとして誤って従者を殺してしまったときの逸話に基づく。私が多重ゼータ値に出会った頃である京都工芸繊維大学時代の元同僚山下太郎さんにご教示頂いた。氏に感謝したい。

など。そして、自分の方法（それは書かれていない）は自然なものとは言い難く、Goldbach がどういう方法で結果を得たのか知らせて欲しい、と書いている。Goldbach は続く 2 月 5 日に返事を書き短く実例によって自分の手法を知らせ、それを受けて Euler は 2 月 26 日に、その手法を発展させた式を一般的に書いている。彼らの往復書簡に多重（二重）ゼータ値（または類する級数）が現れるのは 1743 年までであるようで、晩年（1776 年、Euler 69 歳の年）の論文 [9] との間に随分とブランクがある。この間に何かしら多重ゼータ値について書かれたものがあるのか、私は知らない。[9] の結果のどこまでをいつ、Euler は得ていたのか、興味のあるところではある。Euler の論文 [9] はラテン語で書かれ、“Euler Archive” で見ることが出来るが、今のところ英訳はないようである（イタリア語訳はある）。なお、この論文の方法を現代的に、正規化の観点から解説した原田遼太郎氏による論文 [12] がある。

Euler の 1 月 19 日の手紙の中には、たとえば

$$\zeta^*(3, 5) = \frac{3}{2}\zeta(4)^2 - \frac{5}{8}\zeta(8)$$

のような、間違った式<sup>3</sup>もいくつか含まれるのであるが、論文 [9] では正しい式

$$4\zeta^*(3, 5) + 10\zeta^*(2, 6) = 20\zeta(3)\zeta(5) - 9\zeta(4)^2$$

が記されたあと、左辺の各々の値は決められない、と書いている。Euler–Goldbach の書簡集が刊行されたのはずっとあとのことであるから、一般的には多重ゼータ値（二重ゼータ値）はこの論文 [9] で世に出たと行ってよいのであろう。刊行 250 周年を 3 年後に控えているということになる。

## 2 先行者たち

「二重」ゼータ値の研究は先述のように Goldbach, Euler に遡る二百数十年の歴史を持つのであるが、一般の深さ（冒頭の定義級数における  $r$  のこと）の多重ゼータ値が考えられるようになったのはたかだか四半世紀ほど前のことに過ぎない。そのパイオニアが Michael Hoffman と Don Zagier であり、彼らの論文 [13, 21] の刊行がそれぞれ 1992 年、94 年のことである。Zagier [21] が提示した “Zagier 予想” はこの分野を牽引する大きな原動力であったと言ってよいし、また Hoffman の [14] における “Hoffman 予想” は、Brown [3] による実質的解決によってその大きな広がり明らかになり、今なお波紋が次々と広がりつつある（最後の節でこの二つの予想について簡単に解説する）。この二人の初期の論文 [13, 21, 14] が与えた影響は非常に大きかった。それは間違いないことであろうが、一般の深さの多重ゼータ値が世に現れた最初の論文が [13] でありまた独立に [21] であるかということ、実はそうではないのである。

級数の形で多重ゼータ値が最初に現れた論文は Jean Écalle の [7] であると思われる。Hoffman の 10 年以上前のことである。その 429 ページに、

$$\zeta_{\leq}^{s_1, \dots, s_r} = \sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r} n_1^{-s_1} \dots n_r^{-s_r}$$

および

$$\zeta_{<}^{s_1, \dots, s_r} = \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} n_1^{-s_1} \dots n_r^{-s_r}$$

として、我々の記号では  $\zeta^*(s_1, \dots, s_r)$  および  $\zeta(s_1, \dots, s_r)$  が導入されている。“resurgent analysis” をテーマとする論文の中にどのような動機、目的をもってこれらが登場するのか、私は不勉強で語ることはできない。少なくとも当時は広く注目を集めることはなかった。しかし Écalle は彼の mould（「鋳型」）の理論をその後も展開し多重ゼータ値のなす代数の構造についても深い研究を発表するようになった。残念ながら

<sup>3</sup>少なくとも数値的に合わない。現在では  $\zeta^*(3, 5)$  はリーマンゼータ値だけでは書けないと予想されている。

らその論文群は独特難解で、ようやくこの 10 年くらいで、解説論文や Mould 理論を使った研究などが始めている状況である<sup>4</sup>。日本では名古屋の小宮山尚さんが専門家で、日本語のよい解説 [18] がある。

もうひとつの先行研究は Butzer-Markett-Schmidt による [4] である。その中で彼らはまず「有限版」

$$S_R^N(p_1, \dots, p_R) := \sum_{j_R=R}^{N-1} \sum_{j_{R-1}=R-1}^{j_R-1} \cdots \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \frac{1}{j_1^{p_1}} \cdots \frac{1}{j_R^{p_R}}$$

を導入して、その  $N \rightarrow \infty$  の極限として

$$C_{p_1, \dots, p_R} = C_{R; p_1, \dots, p_R} := S_R^\infty(p_1, \dots, p_R)$$

と定義している。我々の記号では  $C_{p_1, \dots, p_R} = \zeta(p_1, \dots, p_R)$  である。彼らは、論文のタイトルにも現れているが、リーマンゼータ値の様々な表現に興味があったようで、多重ゼータ値が出てくる定理として

$$\begin{aligned} \zeta(m+1) &= C_{m; 1, \dots, 1, 2} \quad (= \zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{m-1}, 2)) \\ \zeta(2m) &= (-1)^{m-1} (2m+1) 2^{2m-1} B_{2m} C_{m; 2, \dots, 2} \quad (= (-1)^{m-1} (2m+1) 2^{2m-1} B_{2m} \zeta(\underbrace{2, \dots, 2}_m)) \end{aligned}$$

の二式が書かれている。他にもスターリング数やそれに類する数 (“central factorial numbers”) による表現、log-sin 積分など色々面白い題材が登場するのであるが、この論文もまた、広く知られることなく埋もれてしまった<sup>5</sup>。その理由として Hoffman は、“The authors never really single out MZVs as a class of objects to study, or try to generalize their results on them.” と書いている。上の二式が、多重ゼータ値を既知のもので書く、という書き方になっていない点からも、その通りであろうと思う。著者の一人 Market はその後論文 [19] を書いて、そこでは  $C_{m; 1, \dots, 1, 2} = \cdots$ ,  $C_{m; 2, \dots, 2} = \cdots$  の形で上の式を紹介し、また「和公式」として知られる等式を予想として述べている<sup>6</sup>。しかしその後は特殊関数や直交多項式の研究を行っていて、多重ゼータ値に立ち返ることはなかったものようである。

多重ゼータ値はある重積分 (反復積分) の形で書くことも出来る。ここではそれを具体的に書いて紹介することはしないが、Zagier [21] に、Kontsevich によるものだとして登場する。しかしそれよりも前に、その形で多重ゼータ値が現れている文献として Aomoto (青本和彦) [1], Drinfel'd [6] がある。ともに 1990 年の掲載である。

[1] の冒頭に

$$L_{r,s} = \int_0^1 (d \log x)^r \cdot (d \log(1-x))^s, \quad r, s \geq 1$$

という積分が書かれているが (この積分の正確な定義も省略する)、これが  $(-1)^s \zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{s-1}, r+1)$  に等しい。そしてそのあと続けて、母関数表記で書くと

$$1 - \sum_{r,s=1}^{\infty} (-1)^{r+s} \zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_{s-1}, r+1) X^r Y^s = \frac{\Gamma(1+X)\Gamma(1+Y)}{\Gamma(1+X+Y)}$$

という結果を記している (符号にミスがあるように見える)。右辺の  $\Gamma$  はガンマ関数である。これによって (あとで述べるガンマ関数の展開式によって)  $L_{r,s}$  はリーマンゼータ値で書けることを述べて、さらに一

<sup>4</sup>私が多重ゼータ値の研究を始めて間もない 90 年代後半、Écalle が何かをやっているというのはよく知られていて、論文もいくつか手には入ったと思う。しかしとても読めないとして敬遠する、というのが多くの人の態度であったように思う。

<sup>5</sup>私はこの論文のことを 2018 年 2 月に名古屋の松本耕二さんから聞いて知った。彼は当時学生さんだった梅澤瞭太さんから教わったと言っていた (しかしもっと前から知っておられたものようである)。この論文の MathSciNet での引用は 6 件、そのうち多重ゼータ値関連の論文であると言えるのは一篇のみである。Hoffman も知らなくて、私が知らせてから [15] に載るようになった。

<sup>6</sup>それは、同じ重さ、深さをもつすべての多重ゼータ値の和をとるとリーマンゼータ値に等しくなる、というきれいな等式のことです、[4] の共著者 Schmidt が 1990 年に私信で伝えたものらしい。Hoffman [13] においても同じ予想が “Sum conjecture” として、彼の同僚 Moen にクレジットを与えつつ提出されている。

般の

$$L_{r_1, r_2, r_3, \dots} = \int_0^1 (d \log x)^{r_1} \cdot (d \log(1-x))^{r_2} \cdot (d \log(x))^{r_3} \cdots, \quad r_1, r_2, r_3, \dots \geq 1$$

はそうではないことが期待される、と書いている。収束する場合は

$$L_{r_1, r_2, r_3, \dots} = (-1)^{r_2+r_4+\dots} \zeta(\underbrace{\dots, 1, \dots, 1}_{r_4-1}, r_3+1, \underbrace{\dots, 1}_{r_2-1}, r_1+1)$$

であって、収束しないときの「正規化」についても書かれている。これらの値が  $\mathbb{Q}$  上一次独立か、という問題も述べられていて先駆的である。Aomoto はこの論文で、より一般的な反復積分のある型の母関数を考え、それらが満たす線形差分方程式を考察している。この研究は、少なくとも多重ゼータ値研究の観点からは、その後発展させられた形跡がないように見える。ことによると何か面白い、価値のあることが眠っているかも知れない。

また Drinfel'd [6] にも同じ型の積分

$$c_{k\ell} = \frac{1}{(2\pi i)^{k+\ell+2} (k+1)! \ell!} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{k+1} \left(\ln \frac{1}{1-x}\right)^\ell \frac{dx}{x-1}$$

が登場し、その母関数

$$1 + \sum_{k, \ell} c_{k\ell} u^{k+1} v^{\ell+1} = \exp \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n \cdot (2\pi i)^n} (u^n + v^n - (u+v)^n)$$

が記されている。ここでは反復積分の中身を計算した形で書いてあって Aomoto の  $L_{r,s}$  とは見かけが異なるが、 $(2\pi i)^{k+\ell+2} c_{k\ell} = -\zeta(\underbrace{1, \dots, 1}_\ell, k+2)$  であり、実質同じものである。母関数の方は、よく知られたガンマ関数の展開

$$\Gamma(1-u) = \exp \left( -\gamma u + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n} u^n \right) \quad (\gamma \text{ はオイラー定数})$$

によって、同じことになる。Drinfel'd のこの論文には Aomoto の  $L_{r_1, r_2, r_3, \dots}$  のような一般の反復積分は登場しないが、論文に登場する “KZ associator”  $\Phi_{KZ}$  の係数は多重ゼータ値そのものなのである。ちょうど Drinfel'd が京都でフィールズ賞を受賞した頃に出回った<sup>7</sup>この論文は、量子群, associator, Grothendieck-Teichmüller 群など、まさに monumental な論文として、多方面に多大な影響を与えて今日に至っている<sup>8</sup>。

### 3 祐乗坊瑞満

大阪大学数学教室が 1934 年（昭和 9 年）から 1949 年（昭和 24 年）にかけて発刊した「全国紙上数学談話会」というものがあって、その中の昭和 21 年 12 月 18 日刊行の号に、「名古屋大学理学部数学科学生 祐乗坊瑞満」による、

$$\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1 + \frac{1}{2}}{2^{2n}} + \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{3^{2n}} + \dots \text{ナル}$$

$$\text{無限級数ヲ } \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots \text{ノイツカニヨリ表ハス関係式}$$

というタイトルの記事が載っている（受付は昭和 20 年 3 月 10 日）。我々の記号を使ってこのタイトルを書き換えるならば、

「 $\zeta^*(1, 2n)$  を  $\zeta(n)$  のいくつかにより書き表す関係式」

<sup>7</sup> 当時まづロシア語のプレプリントが（確か私は伊原先生経由で）手に入ったのであった。もちろん紙媒体だけの時代である。

<sup>8</sup> MathSciNet における引用件数が実に 347 件にのぼる（2023.2.7 現在）。

ともなろうか。ちなみにこの全国紙上数学談話会の記事はすべて電子化されていて、オンラインで読むことが出来る。私はこの祐乗坊氏の論考を、もう10年近く前になろうか、(当時九州大学博士課程学生であったか、ポスドクであったか) 渋川元樹さんから教わったのであるが、そのときは余り丁寧に読まないで、知られていたことの再発見だろうくらいにしか思っていなかった。今回の講演を機によく見てみると、どうやら当時としては数十年も先んじた研究も含まれているようなのである。残念ながら欧文論文としての発表はされていないと思われ、まったく歴史の中に埋もれてしまっている。祐乗坊瑞満氏は一時期立教大学に助教授として在籍しておられたようなのだが、その後の消息は不明である。MathSciNetで調べると、1949年から56年にかけて15篇の論文を発表しておられて、タイトルにはフックス群、リーマン面、擬等角写像などの言葉が見られ、複素関数論や幾何学を専門とされたようである。ご存命だとしても100歳近くであらうか。

さて氏がこのわずか4ページの寄稿の中で得ているのは、一つにはリーマンゼータ関数の奇数点での値を“log-sin”の入った積分で書く公式で、氏が書いたままを記すと(ただし氏は左辺を  $C_{2n+1}$  と書いている)

$$\zeta(2n+1) = \frac{(2\pi)^{2n-1}}{(2n)!} (-1)^n \int_0^{2\pi} B_{2n}\left(\frac{\theta}{2\pi}\right) \log 2 \sin \frac{\theta}{2} d\theta,$$

ここに  $B_k(x)$  はベルヌーイ多項式である。あるいは変数変換をして

$$\zeta(2n+1) = \frac{(2\pi i)^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 B_{2n}(t) \log 2 \sin \pi t dt$$

と書くと、これは実に60年後の論文[16]の主結果そのものなのである<sup>9</sup>。他に二重ゼータ値に関する等式

$$\zeta(1, 2n) = \frac{(-1)^n (2\pi)^{2n-1}}{2(2n-1)!} \int_0^{2\pi} B_1\left(\frac{\theta}{2\pi}\right) B_{2n-1}\left(\frac{\theta}{2\pi}\right) \log 2 \sin \frac{\theta}{2} d\theta$$

を得ていて、この方面の研究をしている名古屋大学(祐乗坊氏の後輩!)の梅澤瞭太さんに尋ねると、恐らく新しいのではないかとのことである。証明の方法は  $\int \log(1-t)t^{s-1}dt$  の適当な ‘contour integral’ を計算するというもので、ここからリーマンゼータが出てきて、 $\int \log(1-t)^2 t^{s-1} dt$  で同様のことを行うと二重ゼータが出てくるというのである。当然一般化が考えられようが、梅澤さんがすでに考察をされているそうである。祐乗坊氏は更に、実質 Euler による

$$\zeta^*(1, 2n) = (n+1)\zeta(2n+1) - \sum_{k=1}^{n-1} \zeta(2k+1)\zeta(2n-2k)$$

も得ていて、特別な場合としての  $\zeta^*(1, 2) = 2\zeta(3)$ , 彼流に書くと

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1+\frac{1}{2}}{2^2} + \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{3^2} + \dots = 2 \left( \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots \right)$$

を記している。また最後に、

log(1-x)ノ代リニ log(1+x) tan<sup>-1</sup> x ヲ入レタ積分ヲ用ヒル事ニヨリ先ニ得タ公式ト  
同様ノ関係ガ類似ノ級数ニ対シ成立スル事ガワカル

と書いているのであるが、梅澤さんによると、積ではなく「log(1+x) や tan<sup>-1</sup> x」という意味か?(手書きなので、「,」が抜けてしまったり印刷時に消えてしまうことくらいは大いに有り得る) その場合はいわゆる Euler 和とか交代多重 T-値という対象が出てくるのでは、とのこと、また log(1+x) tan<sup>-1</sup> x でも計算は出来るが、「類似ノ級数」とは違うものが出てくるのではないかとのことである。このあたりも色々と問題を提供していると思われ、どなたか追求されれば、歴史に埋もれてしまったこの論考を再評価し世に出さしめる良い契機となるのかも知れない。

<sup>9</sup>残念ながらしかしこの等式は、ある知られている等式に部分積分を適用することで直ちに出る、と MathSciNet のレビューで指摘されている。

## 4 Zagier 予想と Hoffman 予想

この節は付録のようなものであるが、冒頭に級数で定義した多重ゼータ値という実数の、一体何を研究するのかを示す一例として、二つの予想を紹介しておこうと思う。

まず Zagier 予想であるが、それは次のような  $\mathbb{Q}$  ベクトル空間の次元に関する予想である。すなわち  $\mathcal{Z}_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) を、重さが  $k$  の多重ゼータ値たちが  $\mathbb{Q}$  上生成する、 $\mathbb{R}$  の部分空間とする：

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= \mathbb{Q}, \quad \mathcal{Z}_1 = \{0\}, \\ \mathcal{Z}_k &= \sum_{\substack{1 \leq r \leq k-1 \\ k_1, \dots, k_{r-1} \geq 1, k_r \geq 2 \\ k_1 + \dots + k_r = k}} \mathbb{Q} \cdot \zeta(k_1, \dots, k_r) \quad (k \geq 2). \end{aligned}$$

「重さ」というのはインデックスの成分の和のことである。さて、数列  $d_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) を

$$d_0 = 1, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = 1, \quad d_k = d_{k-2} + d_{k-3} \quad (k \geq 3) \quad (1)$$

で定義するとき、

**Zagier 予想 [21]**  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k = d_k$  であろう。

重さが  $k$  になる（最後の成分が 2 以上の）インデックスは  $2^{k-2}$  個ある。例えば重さ 2 ならただひとつ、 $\zeta(2)$  があるだけで、3 は  $\zeta(3)$  と  $\zeta(1, 2)$  の二つがある。このように個数は倍々で増えていくのだが、それらには沢山の線形関係があって、次元はずっと小さな  $d_k$  になるだろうと言うのである。重さが 15 までを表に示すと次のようになる。

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$d_k$	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28
$2^{k-2}$	—	—	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192

例えば重さ 3 での予想次元は 1 であるが、Euler による（また祐乗坊瑞満氏も独立に証明した） $\zeta(1, 2) = \zeta(3)$  という等式があるので、確かに 1 次元になっている。重さ 4 では 4 つのゼータ値すべてが  $\zeta(4)$  の定数倍になることが分かって、やはり予想通り 1 次元である。多重ゼータ値の実数としての正体が殆ど分かっていないために、この予想が正しいと確かめられているのはここまでで過ぎない。それどころか、次元が 2 以上であることが分かっているような  $k$ （重さ）の値は一つもない。 $\zeta(5)$  と  $\zeta(2, 3)$  が  $\mathbb{Q}$  上独立か、というようなことが分からないのである。したがって、もし予想が正しいならば、現時点での最良の結果は次元の上限が  $d_k$  で与えられることを示すことであるが、それは出来ていて、

**定理** (Goncharov [11], Terasoma [20], Deligne-Goncharov [5]). 不等式  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k \leq d_k$  が成り立つ。

この数列  $d_k$  はどこから来たのか。Zagier はまず Pari-GP を使って数値実験を行い、重さ 12 までの表から漸化式を予想した。そして、“after many discussions with Drinfel’d, Kontsevich and Goncharov!” と彼が書くよう、これら錚々たる人達との議論を通して、彼らに関わってきた様々な数学（量子群、Grothendieck-Teichmüller 群、結び目不変量、混合 Tate モチーフなど）の構造が背後にあって出てきた数列である、予想は間違いない、との確信を得るのである。まさに Zagier 予想は、その後の多重ゼータ値研究の豊かさを保証するような予想であった<sup>10</sup>。

上記 Terasoma らの定理によって、重さ  $k$  をもつ  $2^{k-2}$  個の多重ゼータ値の間には、 $2^{k-2} - d_k$  個の独立な線形関係式があるはずである。これらが具体的にどのように与えられるか、についても様々な予想があ

<sup>10</sup>私が 2000 年 6 月に東京大学で多重ゼータ値についての集中講義をさせて頂いたとき、寺杉さんが、実はこの予想を狙っている、と言われたのを覚えている。氏はその一年後に [20] を Inventiones に投稿された。

る。しかしながら未だに、これで十分であるとの決定的な結果は得られていない。

一方 Hoffman 予想は、 $\zeta_k$  の生成元を具体的に与えるものである。

**Hoffman 予想 [14]** 多重ゼータ値はすべて、同じ重さを持ちインデックスの成分が2または3のみであるような多重ゼータ値たちの一次結合で書けるであろう。

成分が2または3で、重さが $k$ であるようなインデックスの個数が $d_k$ に等しいことは、 $d_k$ の定義漸化式を満たすことを確かめることで容易に分かる。したがって Zagier 予想と合わせると、

$$\underbrace{\zeta(2)}_{\text{重さ } 2}, \underbrace{\zeta(3)}_{\text{重さ } 3}, \underbrace{\zeta(2,2)}_{\text{重さ } 4}, \underbrace{\zeta(2,3), \zeta(3,2)}_{\text{重さ } 5}, \underbrace{\zeta(2,2,2), \zeta(3,3)}_{\text{重さ } 6}, \underbrace{\zeta(2,2,3), \zeta(2,3,2), \zeta(3,2,2), \dots}_{\text{重さ } 7}$$

たちが順に各重さの空間の基底をなしていこうと言うのである。ある種印象的な予想ではある。しかしながら、この予想が [14] で発表された当時、その個数の一致の背後に [3] で展開されるような深い数学があることをどれだけの人が予感したであろうか。Brown の慧眼には感服の他なく、また数学の面白さを感じるのである。繰り返しになるが、Brown は次を証明した。

**定理 (Brown [3]).** 多重ゼータ値はすべて、同じ重さを持ちインデックス成分が2または3であるような多重ゼータ値たちの一次結合で書ける。

彼は「モチビク多重ゼータ値」という枠組みの中で、成分が2,3のみのもたちが基底をなすことを証明し、その系としてこの定理を得たのである。彼が証明した事実から、例えば $l$ 進ガロア表現に関する Deligne-Ihara の予想として知られていた命題が従うなど、インパクトの非常に大きな仕事であった。また、モチビク多重ゼータ値というのは Goncharov が基礎を築き、Brown の仕事はその上に立っているが、[15] で ‘motivic’ がタイトルに入っている論文を検索するといずれも (15 篇ほどある) Brown [3] 以降であることから、使える道具として普及させた功績も大きいものがあつたと思われる。一つ面白いのが、彼の論文の主定理を証明するためには、ある (本来の実数値の) 多重ゼータ値の関係式 (正確には、その関係式に現れる係数の2-進的性質) を証明する必要があつた。Brown 自身はそれを証明することが出来なかつたので、Zagier に質問のメールを書いた。何の返信もないまま、ひと月ほどと言ったか、じりじりと待っていたら、ある日突然メールが来て、完全に解決されていたので驚喜した、というような話を Brown から聞いたことがある。その関係式について論じた Zagier の論文 [22] は Annals of Math. の同じ号、Brown [3] のすぐあとに載っている。

Brown がこの結果を最初に発表したのは日本においてで、2010年の10月末週、京大数理研で行われた “Development of Galois-Teichmüller Theory and Anabelian Geometry” という研究集会でのことであつた。最後に個人的なエピソードを書き加えることをお許し願うとして、私は当時研究院長という役職に就いたばかりで、多忙の中、この集会も殆ど木曜の晩のバンケットだけの参加<sup>11</sup>、確か翌朝はもう帰らなければならず、Brown の金曜午後の講演は聞けなかつた。しかしそのバンケットで Brown と話ができた。彼とは2008年にフランスのLyonで会つたことがあつて、知り合いであつた。彼の講演タイトルは “On the coalgebra structure of motivic multiple zeta values” というもので、Hoffman 予想の話が出てくるとは誰も思つていなかつたと思う。私は当時、Hoffman の基底に絡んだある種の実験的観察をしていて (正確なことはもう忘れてしまつたが、Zagier さんが [22] で少し言及して下さっている)、彼にこんなことを計算している、という話をしたら、彼はちょっとびっくりしたような顔をして、お前も Hoffman 予想に興味があるのか、明日その話をするんだよ、実は予想を解いたんだ、と言つたのもうびっくり仰天してしまつた。彼はにっこりしながら続けて、でも明日まで内緒だよ、と。

<sup>11</sup>この集会は日本数学会の学術委員会が関与するものでもあり、私は担当者としても参加したのであつたかと思う。



## 参考文献

- [1] K. Aomoto, Special values of hyperlogarithms and linear difference schemes, *Illinois J. of Math.*, **34-2** (1990), 191–216.
- [2] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, *Nagoya Math. J.*, **153** (1999), 189–209.
- [3] F. C. S. Brown, Mixed Tate motives over  $\mathbb{Z}$ , *Ann. of Math.*, **175** (2012), 949–976.
- [4] P. L. Butzer, C. Markett, and M. Schmidt, Stirling numbers, central factorial numbers, and representations of the Riemann zeta function, *Results Math.*, **19** (1991), no. 3-4, 257–274.
- [5] P. Deligne and A. Goncharov, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, (4) **38** (2005), 1–56.
- [6] V. G. Drinfel'd, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  (Russian), *Algebra i Analiz*, **2** (1990), no. 4, 149–181, English translation in *Leningrad Math. J.*, **2** (1991), 829–860.
- [7] J. Écalle, Les fonctions réurgentes, Tome II, *Publications Mathématiques d'Orsay*, **81**, Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, (1981) 248–531.
- [8] L. Euler, Leonhardi Euleri—Opera omnia. Series 4 A. Commercium epistolicum. Vol. 4.2. Leonhardi Euleri commercium epistolicum cum Christiano Goldbach. Pars II/Correspondence of Leonhard Euler with Christian Goldbach. Part II. Original text translated from the Latin and German. Edited by Franz Lemmermeyer and Martin Mattmüller. Springer, Basel, 2015.
- [9] L. Euler, Meditationes circa singulare serierum genus, *Novi Comm. Acad. Sci. Petropol.*, **20** (1776), 140–186. Reprinted in Opera Omnia, ser. I, vol. 15, B. G. Teubner, Berlin, 1927, pp. 217–267.
- [10] H. Gangl, M. Kaneko, and D. Zagier, Double zeta values and modular forms, *Automorphic Forms and Zeta Functions*, S. Böcherer et. al. (eds.), World Scientific, Singapore, (2006), 71–106.
- [11] A. B. Goncharov, Periods and mixed motives, *preprint*, <https://arxiv.org/abs/math/0202154> (2002).
- [12] R. Harada, On Euler's formulae for double zeta values, *Kyushu J. Math.*, **72** (2018), 15–24.
- [13] M. Hoffman, Multiple harmonic series, *Pacific J. Math.*, **152** (1992), 275–290.
- [14] M. Hoffman, The algebra of multiple harmonic series, *J. Algebra*, **194** (1997), 477–495.
- [15] M. Hoffman, References on Multiple Zeta Values and Euler Sums (web page compiled by Michael Hoffman), <https://www.usna.edu/Users/math/meh/biblio.html>
- [16] T. Ito, On an integral representation of special values of the zeta function at odd integers, *J. Math. Soc. Japan*, **58** (2006), no. 3, 681–691.
- [17] M. Kaneko, 多重ゼータ値導入—定義から正規化まで—, 第26回整数論サマースクール報告集「多重ゼータ値」, 2018年9月, <http://www.ist.aichi-pu.ac.jp/tasaka/ss2018/index.html>
- [18] 小見山 尚, Mould 理論入門, 数理解析研究所講究録, **2160** (2020), 126–170.

- [19] C. Markett, Triple sums and the Riemann zeta function, *J. Number Theory*, **48** (1994), no. 2, 113–132.
- [20] T. Terasoma, Mixed Tate motives and multiple zeta values, *Invent. Math.*, **149** (2002), 339–369.
- [21] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, in ECM volume, *Progress in Math.*, **120** (1994), 497–512.
- [22] D. Zagier, Evaluation of the multiple zeta values  $\zeta(2, \dots, 2, 3, 2, \dots, 2)$ , *Ann. of Math.*, **175** (2012), 977–1000.