都立大学数学教室セミナー報告

１９９７

多重ゼータ値と多重ベルヌーイ数

九州大学大学院数理学研究科

金子　昌信

まえがき

この講義録は、平成 9 年 6 月 10 日から 13 日まで、東京都立大学において「多重ゼータ値と多重ベルヌーイ数」と題して行われた集中講義のノートをもとにしております。

多重ゼータ値とは $\zeta(n)$ (いわゆるリーマンのゼータ関数の正整数点での値) のある一般化で、$\zeta(n)$ 同様オイラーが既に研究しています。近年結び目の不変量に現われたりして、整数論以外でも興味を持たれてきている対象です。一方多重ベルヌーイ数というのは筆者が平成 2, 3 年ごろに定義した、ベルヌーイ数の一般化で、はじめは半ばお遊びで初等的な公式を導いたりして喜んでいたのですが、その中のある公式と、多重ゼータ値に関係したある公式の類似に目が止まったときから二つの関係を真面目に考え出しました。すぐに立教大学の荒川恒男さんが実質的な結果を出して下さり、その後の共同研究がひとつの論文となって結実しました。この集中講義で述べさせてもらったのはこの二つの対象の紹介と、荒川さんとの共同研究の概観です。

多重ゼータ値は重要で面白い対象に間違い無いと思うのですが、多重ベルヌーイ数のほうは何やらいかがわしくもあり、集中講義の題材としてふさわしかったのか、自信がありません。それでも中村憲さん、三宅克哉さんのおすすめで講義させていただき、こうして講義録まで出していただけるのは、両先生と、熱心に聞いて下さった学生さんのお蔭と感謝いたします。また、当初より多重ベルヌーイ数をおもしろがって下さって御自身色々と計算され、また励まして下さった荒川さんに、この機会を借りまして心よりの感謝を表したいと思います。

講義録の出来上がりがこんなに遅れてしまったのは全く私の怠慢のせいで、申し訳なく思います。最後に、この原稿を作成するにあたっては、都立大大学院生の小池智君にかなりな部分のタイプ作業をしていただき、また大阪大学 (学振) の大野泰生君と九州大学大学院生の井原健太郎君には原稿の誤り、不明瞭な点などの指摘を多くしていただきました。どうもありがとうございました。

平成１０年７月２９日 金子昌信

第1章　多重 Bernoulli 数

古典的な Bernoulli 数 B_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ は指数関数型母関数により

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

で定義されます。$\dfrac{x}{e^x - 1}$ を母関数とする定義もよくみかけますが、違いは B_1 の符号だけで、我々の場合 $B_1 = \dfrac{1}{2}$ となります。1 次の項を除いた $\dfrac{xe^x}{e^x - 1} - \dfrac{x}{2}$ が偶関数であることは簡単に確かめられるので、n が 3 以上の奇数のときは常に $B_n = 0$ となることがわかります。

いま $\zeta(s)$ を Riemann zeta 函数とするとき、

$$\zeta(2m) = -\frac{1}{2}\frac{B_{2m}}{(2m)!}(2\pi i)^{2m} \quad および \quad \zeta(1-m) = -\frac{B_m}{m}$$

がすべての自然数 m について成り立ちます。Euler によるこれらの公式こそ、以後の整数論の大きな流れの、汲めども尽きぬ源泉のひとつと言えるでしょう。我々は以下に B_n の一般化であるところの「多重 Bernoulli 数 (Poly-Bernoulli numbers)」 $B_n^{(k)}$ を定義しますが、当初の目論見の一つはこの Euler の公式の一般化にあたるものを $B_n^{(k)}$ について探そう、ということでした。それは十分成功したとはまだ言えないのですが、ともかくひとつの試みを後章で述べるとして、まずこの章では、 $B_n^{(k)}$ 自体について、定義と、定義から導かれる初等的、組合せ論的ないくつかの性質を見ていきます。

1.1　定義

多重 Bernoulli 数 $B_n^{(k)} \in \mathbf{Q}$ を、次のようにやはり母関数により定義します。

Definition 1.1.1 (多重 Bernoulli 数)

$$\frac{Li_k(1 - e^{-x})}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}$$

ここに、k は整数（負も許す）で、 $Li_k(z)$ は形式的べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}$ を表します。

いくつかの値の表を与えておきましょう。

表 1.1: $B_n^{(k)}$ $(0 \le k \le 8,\ 0 \le n \le 7)$

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0
2	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{7}{450}$	$\frac{1}{40}$	$-\frac{38}{2205}$	$-\frac{5}{168}$
3	1	$\frac{1}{8}$	$-\frac{11}{216}$	$-\frac{1}{288}$	$\frac{1243}{54000}$	$-\frac{49}{7200}$	$-\frac{75613}{3704400}$	$\frac{599}{35280}$
4	1	$\frac{1}{16}$	$-\frac{49}{1296}$	$\frac{41}{3456}$	$\frac{26291}{3240000}$	$-\frac{1921}{144000}$	$\frac{845233}{1555848000}$	$\frac{1048349}{59270400}$
5	1	$\frac{1}{32}$	$-\frac{179}{7776}$	$\frac{515}{41472}$	$-\frac{216383}{194400000}$	$-\frac{183781}{25920000}$	$\frac{4644828197}{653456160000}$	$\frac{153375307}{49787136000}$

$Li_k(z)$ は $k \ge 1$ ならいわゆる多重対数級数 (polylogarithm, これが $B_n^{(k)}$ の名前の由来) で、$k \le 0$ のときは有理関数 $\left(z\dfrac{d}{dz}\right)^{-k}\left(\dfrac{z}{1-z}\right)$ の Taylor 展開です。これを単に形式的べき級数とみています。$k=1$ なら $Li_1(z) = -\log(1-z)$ で $Li_1(1-e^{-x}) = x$ となりますから、$B_n^{(1)} = B_n$ に外なりません。$k \ge 1$ のときは $Li_k(z)$ の「反復積分」表示

$$Li_k(z) = \underbrace{\int_0^z \frac{dz}{z}\int_0^z \frac{dz}{z}\cdots\int_0^z \frac{dz}{z}}_{(k-1)-\text{times}}\int_0^z \frac{dz}{1-z}$$

を用いることにより、簡単な変数変換の計算ののち、

$$e^x \cdot \underbrace{\frac{1}{e^x-1}\int_0^x \frac{1}{e^x-1}\int_0^x \cdots \frac{1}{e^x-1}\int_0^x}_{(k-1)-\text{times}} \frac{x}{e^x-1}dx\,dx\cdots dx = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}\frac{x^n}{n!}$$

とも書き表すことが出来ます。(こう書くと、得体の知れない定義も少しは意味ありげに見えてくるでしょうか？)

定義およびこの表示から導かれる漸化式を 2 つあげておきましょう。

Proposition 1.1.2 任意の $k \in \mathbf{Z}$ と $n \ge 0$ に対し

$$B_n^{(k)} = \frac{1}{n+1}\left\{B_n^{(k-1)} - \sum_{m=1}^{n-1}\binom{n}{m-1}B_m^{(k)}\right\}.$$

ただし empty sum は 0 と解釈する。

証明 定義式に $1-e^{-x}$ を掛けた $Li_k(1-e^{-x}) = (1-e^{-x})\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}\frac{x^n}{n!}\right)$ の両辺を x で微分する。$Li_k'(x) = \frac{1}{x}Li_{k-1}(x)$ より、

$$\frac{Li_{k-1}(1-e^{-x})}{1-e^{-x}}e^{-x} = e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}\frac{x^n}{n!} + (1-e^{-x})\sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(k)}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

両辺に e^x をかけて、$\dfrac{Li_{k-1}(1-e^{-x})}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k-1)} \dfrac{x^n}{n!}$ より、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k-1)} \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} \frac{x^n}{n!} + (e^x - 1) \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(k)} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n-1} B_{m+1}^{(k)} \frac{1}{(n-m)!m!} \right) x^n \\
&= B_0^{(k)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n^{(k)} + \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} B_{m+1}^{(k)} \right) \frac{x^n}{n!}.
\end{aligned}$$

よって

$$B_n^{(k-1)} = B_n^{(k)} + \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} B_{m+1}^{(k)} = (n+1) B_n^{(k)} + \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m-1} B_m^{(k)}.$$

あとは移項して $n+1$ で割ると Prop. が得られる。 ■

Proposition 1.1.3 $k \geq 1$ と $n \geq 0$ に対し

$$B_n^{(k)} = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} \left(\sum_{\ell=0}^{m} \frac{(-1)^\ell}{n-\ell+1} \binom{m}{\ell} B_\ell^{(1)} \right) B_{n-m}^{(k-1)}.$$

証明 (簡単に。) こんどは反復積分表示を用いる。それによると

$$\frac{Li_k(1-e^{-x})}{1-e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x-1} \int_0^x e^{-x} \frac{Li_{k-1}(1-e^{-x})}{1-e^{-x}} dx$$

であるので、

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} \frac{x^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(1)} \frac{x^{n-1}}{n!} \right) \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k-1)} \frac{x^n}{n!} \right) dx.$$

この右辺は計算すると

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m+1} B_{n-m}^{(1)} \left(\sum_{\ell=0}^{m} (-1)^{m-\ell} \binom{m}{\ell} B_\ell^{(k-1)} \right) \right) \frac{x^n}{n!}$$

となる。和の順序を変え、$\binom{n}{m}\binom{m}{\ell} = \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{m-\ell}$ を使って変形し、さらに適当に和の変数を変換すると Prop. の表示に到達する。■

二つの漸化式はいずれも $B_n^{(k)}$ を表すのに $B_n^{(k-1)}$ のように異なる (upper) index の数を必要としていますが、

Question 一つの k の中での漸化式は作れるのだろうか？

1.2 Stirling 数と多重 Bernoulli 数

この節では、多重 Bernoulli 数を Stirling 数で書き表す公式を与えます。即ち、

Theorem 1.2.1

$$B_n^{(k)} = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m m! \left\{ {n \atop m} \right\}}{(m+1)^k}, \qquad \forall n \geq 0,\ \forall k.$$

ここで $\left\{ {n \atop m} \right\}$ は第 2 種 Stirling 数, 又は Stirling subset number と呼ばれる整数ですが, 証明に使うことも含めて少し詳しく紹介しましょう。 Stirling 数はその定義や記号に様々な variation があるようですが、ここでは Knuth [12] の提案に従うとします。まず、

Definition 1.2.2 (Stirling subset number (第 2 種 Stirling 数)) 正整数 $n, m > 0$ に対し

$$\left\{ {n \atop m} \right\} := n \text{ 元集合を } m \text{ 個の空でない部分集合に分ける方法の個数}$$

とする（“ *n subset m* ”と読む)。

例えば 4 元集合 {1,2,3,4} を 2 個の空でない部分集合に分ける方法は

$$\{1,2,3\} \cup \{4\},\ \{1,2,4\} \cup \{3\},\ \{1,3,4\} \cup \{2\},\ \{2,3,4\} \cup \{1\},\ \{1,2\} \cup \{3,4\},$$
$$\{1,3\} \cup \{2,4\},\ \{1,4\} \cup \{2,3\}$$

の 7 通りであるから $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$ です。また定義から $m > n$ なら $\left\{ {n \atop m} \right\} = 0$ です。この定義のもとで、次の関係式は（二項係数の $\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$ の組み合わせ的証明と同じ要領で）容易に示されます:

$$\left\{ {n+1 \atop m} \right\} = \left\{ {n \atop m-1} \right\} + m \left\{ {n \atop m} \right\} \tag{$*$}$$

(即ち、ある一つの元に着目し、それが独立の 1 元集合をなす時と、他の集合の 1 要素となる時に分けて数える。）さてそこで、

Definition 1.2.3 (Stirling subset number (つづき)) 任意の整数 m, n に対し $\left\{ {n \atop m} \right\}$ を

$$\text{初期値 } \left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1,\ \left\{ {n \atop 0} \right\} = \left\{ {0 \atop m} \right\} = 0,\ (n, m \neq 0) \text{ および漸化式 } (*)$$

で定義する。

これは well-defined となり、$n, m > 0$ の時は先の組み合わせ的定義に一致することが確かめられます。(ロジカルにはこの定義だけでよいわけですが、それでは意味がわからないので Def. 1.2.2 から始めています。) $|m|, |n| \leq 5$ の範囲の $\left\{ {n \atop m} \right\}$ の表を与えておきます。

表 1.2: $\left\{ {n \atop m} \right\}$

$n \backslash m$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-4	10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-3	35	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0
-2	50	11	3	1	0	0	0	0	0	0	0
-1	24	6	2	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	1	3	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	1	7	6	1	0
5	0	0	0	0	0	0	1	15	25	10	1

次に、

Definition 1.2.4 (Stirling cycle number (第 1 種 Stirling 数)) 正整数 $n, m > 0$ に対し

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} := m \text{ 個のサイクルからなる } n \text{ 次置換 } (n \text{ 次対称群の元}) \text{ の個数}$$

とする（*"n cycle m"* と読む）。

つまり n 次対称群の元を互いに共通の文字のない巡回置換（サイクル）の積として書いたとき、現れるサイクルの個数が m となる置換の個数が $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ です。例えば $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 11$ 。(具体的に書き出して数えてみて下さい。）今度は漸化式

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ m-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} \tag{$**$}$$

をみたします（長さ j のサイクルに 1 つ別の文字を加える仕方は j 通りであることに注意して、先と同じ要領で計算する)。そこで

Definition 1.2.5 (Stirling cycle number (つづき)) 任意の整数 m, n に対し $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ を

$$\text{初期値 } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \ \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m \end{bmatrix} = 0 \ (n, m \neq 0) \text{ および漸化式 } (**)$$

で定義する。

こちらも同じ範囲で表をあげておきます。二つの表を見比べてみましょう。ある著しいことに気づかれると思います。それも含めて、以下にあとで必要となる、 Stirling 数の満たすいく

表 1.3: $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$

$n \backslash m$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-4	10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-3	25	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0
-2	15	7	3	1	0	0	0	0	0	0	0
-1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	2	3	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	6	11	6	1	0
5	0	0	0	0	0	0	24	50	35	10	1

つかの公式を並べておきましょう。他にも沢山の公式がありますが、それらは例えば [5] を参照して下さい。証明も方針を示すにとどめました。

Proposition 1.2.6

(1)
$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m \\ -n \end{Bmatrix}.$$

(2)
$$x^n = \sum_{m=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} x^{\underline{m}}.$$

ここに

$$x^{\underline{m}} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1) \ \ (m>0), \quad x^{\underline{0}} = 1.\ (\text{これも Knuth の記号。})$$

(3)
$$x^{\underline{n}} = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} x^m.$$

(4.1)
$$m, n \geq 0 \text{ に対し}, \sum_{\ell} (-1)^{m-\ell} \begin{bmatrix} \ell \\ m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n \\ \ell \end{Bmatrix} = \delta_{m,n} \quad \text{(Kronecker's delta)}.$$

(4.2)
$$\sum_{\ell} (-1)^{n-\ell} \begin{Bmatrix} \ell \\ m \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ \ell \end{bmatrix} = \delta_{m,n}.$$

(和は全整数をわたるものとするが、実質有限和。)

$$\text{(5)}\qquad \forall m, n \geq 0 \text{ に対し}, \ \left\{ {n \atop m} \right\} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\ell=0}^{m} (-1)^\ell \binom{m}{\ell} \ell^n.$$

$$\text{(6)}\qquad \frac{(e^x-1)^m}{m!} = \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ {n \atop m} \right\} \frac{x^n}{n!} \quad (m \geq 0).$$

$$\text{(7)}\qquad \frac{x^m}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-mx)} = \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ {n \atop m} \right\} x^n \quad (m \geq 1).$$

証明の方針 (1) は$\left\{ {-m \atop -n} \right\}$ が $\left[{n \atop m} \right]$ と同じ初期値、漸化式を満たすことを確かめればよい。(2),(3) についても、例えば (2) なら $x^n = \sum_{m=0}^{n} a_{n,m} x^{\underline{m}}$ とおくとき $a_{m,n}$ が $\left\{ {n \atop m} \right\}$と同じ初期値、漸化式を満たすことを確かめる。 (3) も同様。(4) は (2),(3) を使う。例えば (2) の $x^{\underline{m}}$ に (3) で得られる $x^{\underline{m}}$ の式を代入し、両辺の係数を比べると (4.1) が出る。(4.2) は逆にやる。(5) も右辺が $\left\{ {n \atop m} \right\}$ の漸化式を満たすことを見るのが一番手っ取り早いが、(2) 式から差分法の Taylor 展開の要領で自然に導きだすことも出来る。たとえば Jordan の本 [11, §58] を参照。(6) は $\frac{(e^x-1)^m}{m!} = \sum_{n=m}^{\infty} a_{n,m} \frac{x^n}{n!}$ と書いて、両辺微分した式から $a_{n,m}$が $\left\{ {n \atop m} \right\}$ と同じ漸化式をみたすことを導く。(7) の右辺 $= f_m$ とおくとき、$\left\{ {n \atop m} \right\}$ の漸化式より $f_m = \frac{x}{1-mx} f_{m-1}$, $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1 \ \ \forall n \geq 1$ より $f_1 = \frac{x}{1-x}$, これから $f_m =$ 左辺。

Theorem 1.2.1 の証

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} \frac{x^n}{n!} &= \frac{Li_k(1-e^{-x})}{1-e^{-x}} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-x})^{m-1}}{m^k} \quad (\mathrm{Li}_k\text{の定義}) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (e^{-x}-1)^m}{(m+1)^k} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m m!}{(m+1)^k} \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ {n \atop m} \right\} \frac{(-x)^n}{n!} \qquad (\text{Prop. 1.2.6 (6)}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m m! \left\{ {n \atop m} \right\}}{(m+1)^k} \right) \frac{x^n}{n!}.
\end{aligned}$$

両辺の $\frac{x^n}{n!}$ の係数を比べれば求める公式が得られる。∎

注1. $k=1$, 即ち古典的な Bernoulli 数のときの Th. 1.2.1 の公式は古くから知られ (少なくとも Kronecker に遡る) 何度も再発見されている。その歴史については Gould [4] を参照。
注2. Prop. 1.2.6 (5) を用いると

$$B_n^{(k)} = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(m+1)^k} \sum_{\ell=0}^{m} (-1)^\ell \binom{m}{\ell} \ell^n$$

とも書ける。

1.3 負の index の多重 Bernoulli 数

k が 0 又は負の時 $B_n^{(k)}$ は正整数になり、前節で与えた明示公式とは別の、組み合わせ的に意味のつく公式を持つことが示されます。この節ではそれを述べます。最初に表を与えておきましょう。

表 1.4: $B_n^{(k)}$ $(-5 \le k \le 0,\ 0 \le n \le 7)$

k \ n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	1	2	4	8	16	32	64	128
-2	1	4	14	46	146	454	1394	4246
-3	1	8	46	230	1066	4718	20266	85310
-4	1	16	146	1066	6902	41506	237686	1315666
-5	1	32	454	4718	41506	329462	2441314	17234438

次の定理の証明が目標です。

Theorem 1.3.1 (Generating function of negative index poly-Bernoulli numbers)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B_n^{(-k)} x^n y^k = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x) p_j(y),$$

$$\text{ここに } p_j(x) = \frac{j!x^j}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-(j+1)x)}.$$

Corollary 1.3.2 任意の $n, k \ge 0$ に対し、

$$B_n^{(-k)} = \sum_{j=0}^{\min(n,k)} (j!)^2 \left\{ {n+1 \atop j+1} \right\} \left\{ {k+1 \atop j+1} \right\} \ (>0)\,.$$

特に、

Corollary 1.3.3 (Duality)

$$B_n^{(-k)} = B_k^{(-n)}.$$

Cor. 1.3.2 の証明　Prop. 1.2.6 (7) より

$$p_j(x) = j! \sum_{n=j}^{\infty} \left\{ {n+1 \atop j+1} \right\} x^n.$$

これを代入して係数を比べる。そのとき $j > \min(n,k) \Rightarrow \left\{ {n+1 \atop j+1} \right\} \left\{ {k+1 \atop j+1} \right\} = 0$ に注意する。 ∎

この公式により $B_n^{(-k)}$ にある組み合わせの数としての意味をつけることが出来ます（各自考えてみて下さい)。また、定理の証明 (これからやります) の途中で得られる式から次の等式が示せます。

Proposition 1.3.4 任意の $n > 0$ に対し

$$\sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{\ell} B_{n-\ell}^{(-\ell)} = 0.$$

この式は、上の duality から n が奇数の時は自明な式になりますが、n が偶数の時は非自明なことを言っています。例えば 表 1.4 より $1-2+1=0$, $1-8+14-8+1=0$, など。

Th. 1.3.1 及び Prop. 1.3.4 の証明　Th. 1.3.1 の左辺 $= B(x,y)$ とおく。Th. 1.2.1 を使うと,

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m m! \left\{ {n \atop m} \right\} (m+1)^k \right) x^n y^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m m! \left\{ {n \atop m} \right\} x^n \sum_{k=0}^{\infty} (m+1)^k y^k \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m m! \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n \left\{ {n \atop m} \right\} x^n \frac{1}{1-(m+1)y}. \end{aligned}$$

ここで Prop. 1.2.6 (7) を使うと

$$B(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m! x^m}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+mx)(1-(m+1)y)}$$

となる ($m=0$ の項は $\frac{1}{1-y}$)。これから Prop. 1.3.4 が出る。即ち、

$$B(x,-x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m! x^m}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+mx)(1+(m+1)x)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m-1)!x^{m-1}}{(1+x)\cdots(1+mx)} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(m-1)!\sum_{n=m}^{\infty}\left\{ {n \atop m} \right\}(-1)^n x^{n-1} \qquad \text{(Prop. 1.2.6 (7))} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\left[{m \atop 1} \right]\left\{ {n \atop m} \right\}\right)x^{n-1} \qquad \left((m-1)! = \left[{m \atop 1} \right]\right) \\
&= 1. \qquad \text{(Prop. 1.2.6 (4.1))}
\end{aligned}
$$

一方

$$
\begin{aligned}
B(x,-x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k B_n^{(-k)} x^{n+k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell B_{n-\ell}^{(-\ell)}\right)x^n \qquad \begin{pmatrix} n+k \to n \\ k \to \ell \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

であるから、Prop. 1.3.4 が証明された。∎

定理の証明に戻る。まず補題を用意する。

Lemma 1.3.5 (1) $\dfrac{1}{1-(m+1)y} = \displaystyle\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}p_j(y)$ ($p_j(y)$ は Th. 1.3.1 の通り).

(2) $\displaystyle\sum_{m=j}^{n}(-1)^m m!\binom{m}{j}\left\{ {n \atop m} \right\} = (-1)^n j!\left\{ {n+1 \atop j+1} \right\} \quad (n \geq j \geq 0).$

先にこれを認めて Th. 1.3.1 を証明する。前頁中段 $B(x,y)$ の式より、

$$
\begin{aligned}
B(x,y) &= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m m!\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n\left\{ {n \atop m} \right\}x^n\frac{1}{1-(m+1)y} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\left((-1)^m m!\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n\left\{ {n \atop m} \right\}x^n\right)\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}p_j(y) \qquad \text{(Lem. 1.3.5 (1))} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}p_j(y)\left(\sum_{m=j}^{\infty}(-1)^m m!\binom{m}{j}\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n\left\{ {n \atop m} \right\}x^n\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}p_j(y)\sum_{n=j}^{\infty}(-1)^n x^n\left(\sum_{m=j}^{n}(-1)^m m!\binom{m}{j}\left\{ {n \atop m} \right\}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}p_j(y)\sum_{n=j}^{\infty}j!\left\{ {n+1 \atop j+1} \right\}x^n \qquad \text{(Lem. 1.3.5 (2))} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}p_j(x)p_j(y). \qquad \text{(Prop. 1.2.6 (7))}
\end{aligned}
$$

これが求める式であった。∎

Lem. 1.3.5 の証明（１）次の部分分数展開式は留数の計算で容易に示せる。

$$\frac{1}{z(z-1)\cdots(z-m)} = \frac{(-1)^m}{m!}\sum_{\ell=0}^{m}\frac{(-1)^\ell\binom{m}{\ell}}{z-\ell}.$$

これより、

$$\begin{aligned} yp_j(y) &= \frac{j!y^{j+1}}{(1-y)(1-2y)\cdots(1-(j+1)y)} \\ &= \frac{j!}{\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{y}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{y}-(j+1)\right)} \\ &= \frac{j!(-1)^{j+1}}{y(j+1)!}\sum_{\ell=0}^{j+1}\frac{(-1)^\ell\binom{j+1}{\ell}}{\frac{1}{y}-\ell} \\ &= \frac{(-1)^{j+1}}{j+1}\sum_{\ell=0}^{j+1}\frac{(-1)^\ell\binom{j+1}{\ell}}{1-\ell y}. \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} y\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}p_j(y) &= \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{(-1)^{j+1}}{j+1}\sum_{\ell=0}^{j+1}\frac{(-1)^\ell\binom{j+1}{\ell}}{1-\ell y} \\ &= \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{(-1)^{j+1}}{j+1}+\sum_{\ell=1}^{m+1}\frac{(-1)^\ell}{1-\ell y}\sum_{j=\ell-1}^{m}\frac{(-1)^{j+1}}{j+1}\binom{m}{j}\binom{j+1}{\ell}. \end{aligned}$$

(最初の和が $\ell=0$ に対応)

ここで、

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{(-1)^{j+1}}{j+1} = -\frac{1}{m+1}$$

($(1-x)^m = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}x^j$ の $\int_0^1 dx$ をとる)。また、

$$\begin{aligned} \sum_{j=\ell-1}^{m}\frac{(-1)^{j+1}}{j+1}\binom{m}{j}\binom{j+1}{\ell} &= \frac{1}{\ell}\sum_{j=\ell-1}^{m}(-1)^{j+1}\binom{m}{j}\binom{j}{\ell-1} \\ &= \frac{1}{\ell}\sum_{j=\ell-1}^{m}(-1)^{j+1}\binom{m}{\ell-1}\binom{m-\ell+1}{j-\ell+1} \\ &= \frac{1}{\ell}\binom{m}{\ell-1}\sum_{j=\ell-1}^{m}(-1)^{j+1}\binom{m-\ell+1}{j-\ell+1} \\ &= \begin{cases} \dfrac{(-1)^{m+1}}{m+1} & \ell = m+1 \\ 0 & \ell < m+1. \end{cases} \end{aligned}$$

（２つ目の等号は $\binom{p}{q}\binom{q}{r}=\binom{p}{r}\binom{p-r}{q-r}$ を用いた。) よって,

$$
\begin{aligned}
y\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}p_j(y) &= -\frac{1}{m+1}+\frac{(-1)^{m+1}}{1-(m+1)y}\cdot\frac{(-1)^{m+1}}{m+1} \\
&= \frac{y}{1-(m+1)y}.
\end{aligned}
$$

これで (1) が示せた。

（２） まず、右辺の generating series

$$\sum_{n=j}^{\infty}(-1)^n j!\left\{{n+1 \atop j+1}\right\}\frac{t^n}{n!}=(e^{-t}-1)^j\cdot e^{-t}$$

をいう。これには Prop. 1.2.6 (6)

$$\frac{(e^t-1)^j}{j!}=\sum_{n=j}^{\infty}\left\{{n \atop j}\right\}\frac{t^n}{n!}$$

より出発、$j\to j+1$ 　として

$$
\begin{aligned}
\frac{(e^t-1)^{j+1}}{(j+1)!} &= \sum_{n=j+1}^{\infty}\left\{{n \atop j+1}\right\}\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=j}^{\infty}\left\{{n+1 \atop j+1}\right\}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (n\to n+1).
\end{aligned}
$$

両辺 t で微分して、

$$\frac{(e^t-1)^j\cdot e^t}{j!}=\sum_{n=j}^{\infty}\left\{{n+1 \atop j+1}\right\}\frac{t^n}{n!}.$$

これより

$$(e^{-t}-1)^j\cdot e^{-t}=\sum_{n=j}^{\infty}(-1)^n j!\left\{{n+1 \atop j+1}\right\}\frac{t^n}{n!}.$$

従って、Lem. 1.3.5 (2) を言うためには左辺も同じ generating series をもつこと、つまり

$$\sum_{n=j}^{\infty}\left(\sum_{m=j}^{n}(-1)^m m!\binom{m}{j}\left\{{n \atop m}\right\}\right)\frac{t^n}{n!}=(e^{-t}-1)^j\cdot e^{-t}$$

を言えばよい。

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_{m=j}^{\infty}(-1)^m m!\binom{m}{j}\sum_{n=m}^{\infty}\left\{{n \atop m}\right\}\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{m=j}^{\infty}(-1)^m m!\binom{m}{j}\frac{(e^t-1)^m}{m!} \qquad \text{(Prop. 1.2.6 (6))} \\
&= \sum_{m=j}^{\infty}(-1)^m\binom{m}{j}(e^t-1)^m.
\end{aligned}
$$

ここで $\displaystyle\sum_{m=j}^{\infty}\binom{m}{j}X^m = \frac{X^j}{(1-X)^{j+1}}$ であるから (これは, $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+j}{j}X^m = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\binom{-j-1}{m}X^m$ $= (1-X)^{-(j+1)}$ において、$m \to m-j$ として得られる)

$$\sum_{m=j}^{\infty}(-1)^m\binom{m}{j}(e^t-1)^m = \sum_{m=j}^{\infty}\binom{m}{j}(1-e^t)^m = \frac{(1-e^t)^j}{(1-(1-e^t))^{j+1}} = (e^{-t}-1)^j \cdot e^{-t}.$$

これで Lemma の証明が完了し、Th. 1.3.1 がすべて証明された。∎

注1. もう少し証明が簡略化されないものでしょうか。
注2. $B_n^{(-k)}$ の指数関数型の母関数は Th. 1.2.1 を用いて容易に計算でき、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}B_n^{(-k)}\frac{x^n}{n!}\frac{y^k}{k!} = \frac{e^{x+y}}{e^x+e^y-e^{x+y}}$$

となります。これからも $B_n^{(-k)} = B_k^{(-n)}$ であって、右辺は

$$\frac{e^{x+y}}{1-(e^x-1)(e^y-1)} = e^{x+y}\left(1+(e^x-1)(e^y-1)+(e^x-1)^2(e^y-1)^2+\cdots\right)$$

と展開できるから、

$$B_n^{(-k)} > 0 \quad (\forall n, k \geq 0)$$

もわかります。

1.4 2重 Bernoulli 数の分母

古典的な Bernoulli 数の分母は Clausen-von Staudt の定理によって完全に決定されています。(ちなみに、Th. 1.2.1 の公式を用いると Clausen-von Staudt の定理の非常に自然な証明を与えることが出来ます。) この節ではそれにあたることを "di-Bernoulli" 数 ($k=2$) について与えます。

Theorem 1.4.1 **(1)** n が奇数のとき $B_n^{(2)} = -\dfrac{(n-2)}{4}B_{n-1}^{(1)}$. (従ってこの場合分母の決定は本質的に古典的な場合に帰する。)

(2) n を偶数 (≥ 2) とする。素数 p について $B_n^{(2)}$ の *p-order* を $\mathrm{ord}(p,n)$ と書くとき、次が成り立つ。

(2-1) $p > n+1$ ならば $\mathrm{ord}(p,n) \geq 0$. (つまり $B_n^{(2)}$ の分母に p は現われない。)

(2-2) $5 \leq p \leq n+1$ なる p について、

(a) $p-1 \mid n$ ならば $\mathrm{ord}(p,n) = -2$.

(b) $p-1 \nmid n$ のとき

(b-1) $p \mid \dfrac{B_n^{(1)}}{n}$ であるか、又は $1 < n' < p-1$ なる n' があって $n \equiv n' \bmod p(p-1)$ のとき $\mathrm{ord}(p,n) \geq 0$.

(b-2) その他のとき $\mathrm{ord}(p,n)=-1$.

(2-3) $n>2$ かつ $n\equiv 2 \bmod 3$ のとき $\mathrm{ord}(3,n)\geq 0$, その他のとき $\mathrm{ord}(3,n)=-2$.

(2-4) $n>2$ かつ $n\equiv 2 \bmod 4$ のとき $\mathrm{ord}(2,n)\geq 0$, $n\equiv 0 \bmod 4$ のとき $\mathrm{ord}(2,n)=-1, \mathrm{ord}(2,2)=-2$.

注. (b-1) において現われる有理数 $\frac{B_n^{(1)}}{n}$ は常に p-整数である (Ireland-Rosen [10, Prop. 15.2.4] 参照。)

証明のために一つ補題を用意する。

Lemma 1.4.2 $n\geq 2$ を偶数、$p\geq 5$ を素数とし、 $2p-1=m$ とする。このとき、

$$(-1)^m m!\left\{ {n \atop m} \right\} \equiv 0 \mod p^2,$$

従って $\dfrac{(-1)^m m!\left\{ {n \atop m} \right\}}{(m+1)^2}$ は p-整数。

証明 Prop. 1.2.6 (5) より

$$\begin{aligned}
(-1)^m m!\left\{ {n \atop m} \right\} &= \sum_{\ell=1}^{2p-1}(-1)^{\ell}\binom{2p-1}{\ell}\ell^n \\
&= \sum_{\ell=1}^{p-1}\left\{(-1)^{\ell}\binom{2p-1}{\ell}\ell^n+(-1)^{2p-\ell}\binom{2p-1}{2p-\ell}(2p-\ell)^n\right\}+(-1)^p\binom{2p-1}{p}p^n \\
&\equiv \sum_{\ell=1}^{p-1}\left\{(-1)^{\ell}\binom{2p-1}{\ell}\ell^n+(-1)^{\ell}\binom{2p-1}{2p-\ell}(-2np\ell^{n-1}+\ell^n)\right\} \qquad \mod p^2.
\end{aligned}$$

ここで $\displaystyle\binom{2p-1}{\ell}+\binom{2p-1}{\ell-1}=\frac{2p}{\ell}\binom{2p-1}{\ell-1}$ であるので、最後の和は

$$2p(1-n)\sum_{\ell=1}^{p-1}(-1)^{\ell}\binom{2p-1}{\ell-1}\ell^{n-1}$$

に等しい。

$$\binom{2p-1}{\ell-1}\equiv(-1)^{\ell-1} \qquad \mod p$$

と、 $p-1\nmid n-1$ であること (n は偶数で p は奇数) より

$$\sum_{\ell=1}^{p-1}(-1)^{\ell}\binom{2p-1}{\ell-1}\ell^{n-1}\equiv-\sum_{\ell=1}^{p-1}\ell^{n-1}\equiv 0 \qquad \mod p.$$

∎

Th. 1.4.1 の証明　ここでだけ、B_n を古典的 Bernoulli 数で、$B_1=-\frac{1}{2}$ の方とする。つまり $n\neq 1$ なら $B_n=B_n^{(1)}$で

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}=\frac{x}{e^x-1}.$$

$B_n^{(2)}$ の反復積分による定義より

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(2)} \frac{x^n}{n!} &= \frac{e^x}{e^x-1}\int_0^x \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell \frac{t^\ell}{\ell!}dt \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(1)} \frac{x^{m-1}}{m!}\cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell \frac{x^{\ell+1}}{(\ell+1)!}.\end{aligned}$$

これより

$$B_n^{(2)}=\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\frac{B_{n-\ell}^{(1)}B_\ell}{\ell+1}$$

を得る。n が奇数のとき、$n-\ell,\ell$ の一方は奇数であって、奇数 $\ell\geq 3$ に対しては $B_\ell^{(1)}=B_\ell=0$ であるので、

$$B_n^{(2)}=\frac{n}{2}B_{n-1}^{(1)}B_1+B_1^{(1)}B_{n-1}=-\frac{(n-2)}{4}B_{n-1}^{(1)}.$$

これで (1) が証明された。

(2-1) は Th.1.2.1 で与えた公式より自明。またその公式に現われる $\dfrac{m!}{(m+1)^2}$ が整数でないのは $m+1=8,\ 9,$ 素数, $2\times$ 素数 のときのみであることが初等的に確かめられる。ところが Lemma より、 $m+1=2p$, (p は素数 ≥ 5)、のとき $\dfrac{(-1)^m m!\left\{ {n \atop m} \right\}}{(m+1)^2}$ の分母に p が現われない。次に $B_n^{(2)}$ の分母に寄与しうる項として $m+1=p$ (p は 5 以上の素数) のときを考えると、このとき

$$(-1)^m m!\left\{ {n \atop m} \right\}=\sum_{\ell=1}^{p-1}(-1)^\ell\binom{p-1}{\ell}\ell^n\equiv\sum_{\ell=1}^{p-1}\ell^n \mod p.$$

これは mod p で、 $p-1\mid n$ なら -1 に, $p-1\nmid n$ なら 0 に合同である。従って $p-1\mid n$ のとき $\dfrac{(-1)^m m!\left\{ {n \atop m} \right\}}{(m+1)^2}$ の p-order は -2 。他の項は p-integral だから、これで (2-2)-(a) が示された。$p-1\nmid n$ とする。 mod p^2 で

$$\binom{p-1}{\ell}\equiv(-1)^\ell+(-1)^{\ell-1}p\sum_{i=1}^{\ell}\frac{1}{i} \qquad \mod p^2$$

なること ($(p-1)(p-2)\cdots(p-\ell)$ を展開する) を用いると

$$\sum_{\ell=1}^{p-1}(-1)^\ell\binom{p-1}{\ell}\ell^n\equiv\sum_{\ell=1}^{p-1}\ell^n-p\sum_{\ell=1}^{p-1}\ell^n\sum_{i=1}^{\ell}\frac{1}{i} \qquad \mod p^2.$$

ところで n が偶数で $p-1\nmid n$ のとき

$$\sum_{\ell=1}^{p-1}\ell^n\equiv pB_n^{(1)} \mod p^2.$$

(Ireland-Rosen [10, Prop. 15.2.2 の Cor.]) 一方 $n \equiv n' \bmod p-1,\ 1 < n' < p-1$, とすると、$n'$も偶数になり、Vandiver [18, (63)] より

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{p-1} \ell^n \sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{i} &\equiv \sum_{\ell=1}^{p-1} \ell^{n'} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{i} \qquad \bmod p \\ &\equiv B_{n'}^{(1)} \quad \bmod p.\end{aligned}$$

よって

$$(-1)^m m! \left\{ {n \atop m} \right\} \equiv p \left(B_n^{(1)} - B_{n'}^{(1)} \right) \bmod p^2.$$

$p-1 \not| n$ であるので$\dfrac{B_n^{(1)}}{n}$ は p-整数かつ $B_{n'}^{(1)} \equiv n' \dfrac{B_n^{(1)}}{n} \bmod p$ (Ireland-Rosen [10, Prop. 15.2.4, Th. 5])。以上より

$$(-1)^m m! \left\{ {n \atop m} \right\} \equiv p(n-n') \frac{B_n^{(1)}}{n} \quad \bmod p^2$$

となり、(2-2)-(b) がこれより従う。3-order については、Th. 1.2.1 の公式の和の項で 3-整数でないかもしれないのは

$$\frac{2!\left\{ {n \atop 2} \right\}}{3^2},\ \frac{-5!\left\{ {n \atop 5} \right\}}{6^2},\ \frac{8!\left\{ {n \atop 8} \right\}}{9^2}.$$

公式 Prop. 1.2.6 (5) をつかってそれぞれ計算することにより (2-3) が得られる。2-order についても同様に計算するが省略する。∎

この定理の (2-2)-(b-1) に $p \mid \frac{B_n^{(1)}}{n}$ という条件がでてくることに注目すると、素数 p の非正則性を $B_n^{(2)}$の分母の言葉で述べることができます。

Corollary 1.4.3 素数 $p\ (\geq 5)$ が非正則であるための必要十分条件は範囲 $p+1 \leq n \leq 2p-4$ の中の偶数 n で、$B_n^{(2)}$ の分母が p で割れないものが存在することである。

古典的な Bernoulli 数は、奇数番目は 0 で、偶数番目の分母は初等的に決めることが出来、分子が円分体の整数論などと深く結びついた微妙な量でした。この di-Bernoulli 数は奇数番目が本質的に古典的 Bernoulli 数になり、偶数番目の分母の決定に古典的 Bernoulli 数の分子の情報を必要とします。さて、それでは di-Bernoulli 数の分子と結びつくような面白い数論の対象はあるでしょうか。こういう対象が見つかったとき、多重 Bernoulli 数も一段深いものに格上げされるのですが。

一般の場合の分母については次のことが Th. 1.2.1 の公式を使って言えます。(荒川さんによる。共著論文を予定中。)

Theorem 1.4.4 p を $k+2 \leq p \leq n+1$ を満たす素数とする。
(1) $p-1 \not| n$ のとき、$p^{k-1}B_n^{(k)}$ は p-整数。
(2) $p-1 \mid n$ のとき、$p^k B_n^{(k)}$ が p-整数で、

$$p^k B_n^{(k)} \equiv -1 \quad \bmod p\mathbf{Z}_p.$$

1.5 Vandiver のある定理への応用

この節では Th. 1.2.1 と Cor. 1.3.3 の (ささやかな) 応用として、Vandiver のある結果の別証を与えます。

Theorem 1.5.1 (Vandiver) 奇素数 p と $1 \le i \le p-2$ なる i について

$$B_i^{(1)} \equiv \sum_{m=1}^{p-2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)(m+1)^i \qquad \mathrm{mod}\ p.$$

証明 Th. 1.2.1 と Fermat の小定理より

$$B_i^{(1)} \equiv B_i^{(2-p)} \quad \mathrm{mod}\ p.$$

この右辺は Cor. 1.3.3 より $B_{p-2}^{(-i)}$に等しく、これに再び Th. 1.2.1 を用いて

$$B_i^{(1)} \equiv -\sum_{m=0}^{p-2}(-1)^m m!\left\{{p-2 \atop m}\right\}(m+1)^i$$

従って次の Lemma がいえればよい ($\left\{{p-2 \atop 0}\right\} = 0$)。

Lemma 1.5.2 $1 \le m \le p-2$ とするとき

$$(-1)^m m!\left\{{p-2 \atop m}\right\} \equiv 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m} \quad \mathrm{mod}\ p.$$

証明 Stirling 数の漸化式 §1.2-(∗) より、$(-1)^{m-1}m!\left\{{p-2 \atop m}\right\} = b_m$ と書くと

$$(-1)^{m-1}m!\left\{{p-1 \atop m}\right\} = m(-b_{m-1}+b_m) \quad (m \ge 2).$$

一方公式 Prop. 1.2.6 (5) より

$$\begin{aligned}(-1)^{m-1}m!\left\{{p-1 \atop m}\right\} &= -\sum_{\ell=1}^{m}(-1)^\ell\binom{m}{\ell}\ell^{p-1} \\ &\equiv -\sum_{\ell=1}^{m}(-1)^\ell\binom{m}{\ell} \quad \mathrm{mod}\ p \\ &\equiv 1 \quad \mathrm{mod}\ p.\end{aligned}$$

よって $b_m \equiv b_{m-1} + \dfrac{1}{m} \quad \mathrm{mod}\ p.$

これと、$b_1 = \left\{{p-2 \atop 1}\right\} = 1$ より Lemma がいえて、Theorem が証明された。∎

注 $1 < i \le p-2$ に対しては 定理の右辺は

$$\sum_{m=1}^{p-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)m^i$$

と合同になります。B_iとこれが（$B_1 = -\frac{1}{2}$の方だと $i=1$ でも）mod p で合同である、というのがもとの Vandiver の合同式 [18, (63)] の特別な場合です。

第2章　多重ゼータ値

この章では、多重ゼータ値について、特に予備知識がいらずに理解できる範囲のことを紹介します。文献については Hoffman [7] の文献表を見て、そこからまた辿って下さい。ここでは引用したものだけを挙げました。様々な数学との関連などについては、結び目理論の Le-Murakami [14] 以外に出版されたものは余り無いようですが、いくつかプレプリントとして出回っています。興味をお持ちの方は直接私にコンタクトをとっていただけたらと思います。

2.1　定義と反復積分表示、duality

「多重ゼータ値」(multiple zeta values) $\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ を次で定義します。（人によって、multiple harmonic series とか Euler/Zagier sums とも呼ばれます。記号も、 k_i の順序が逆に書かれたりしますが、ここでは Don Zagier 氏の用法に従います。）

$$\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_n} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}}.$$

ここに m_i, k_i は正整数で $k_n \geq 2$ とします。（収束のため。m_n に関する和として Dirichlet 級数の形に書いてみれば $k_n > 1$ が収束条件であることがわかる。）k_i の個数 n をこのゼータ値の depth, 和 $k := k_1 + k_2 + \cdots k_n$ を weight と呼びます。depth が 1 の場合が Riemann ゼータ函数の特殊値であって、

$$\zeta(2k) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{B_{2k}}{(2k)!}(2\pi i)^{2k}$$

が、冒頭にもあげた Euler の有名な公式です。Euler は depth が 2 のときの徹底した研究 ([3]) も行っていて、沢山の公式を導き出しています。私はまだその全貌を把握しておりませんが、一つの問題意識として、$\zeta(k_1, k_2)$ が $\zeta(k)$ で書き表されるのはいつか、ということがあったようです。

weight が k で depth が n の多重ゼータ値は（実際の値が等しいかはさておくと）$\binom{k-2}{n-1}$ 個あります。weight が k なる多重ゼータ値の総数はしたがって 2^{k-2} 個です。これは簡単な数えあげですが、以下の反復積分表示を見ればよりはっきりわかります。

この、反復積分表示をもつことが、多重ゼータ値が色々な数学と結び付く根拠のひとつだと思われます。(Drinfel'd 積分ともいわれる。はじめに指摘したのは Kontsevich とのことです。）すなわち、まず、 k 個の $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ の組 $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ で $\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_k = 0$ なるものに対し積分 $I(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ を

$$
\begin{aligned}
I(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k) &= \int\cdots\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1} \frac{dt_1}{A_{\varepsilon_1}(t_1)}\cdots\frac{dt_k}{A_{\varepsilon_k}(t_k)} \\
&= \int_0^1 \frac{dt_k}{A_{\varepsilon_k}(t_k)}\int_0^{t_k}\cdots\int_0^{t_3}\frac{dt_2}{A_{\varepsilon_2}(t_2)}\int_0^{t_2}\frac{dt_1}{A_{\varepsilon_1}(t_1)},
\end{aligned}
$$

で定義します。ただし $A_0(t)$ と $A_1(t)$ はそれぞれ t および $1-t$ を表します。このとき

多重ゼータ値の反復積分表示：

$$
\begin{aligned}
(\heartsuit)\qquad \zeta(k_1,\dots,k_n) &= I\big(1,\underbrace{0,\dots,0}_{k_1-1},1,\underbrace{0,\dots,0}_{k_2-1},\dots,1,\underbrace{0,\dots,0}_{k_n-1}\big) \\
&= \underbrace{\int_0^1\frac{dt}{t}\cdots\int_0^t\frac{dt}{t}}_{k_n-1}\int_0^t\frac{dt}{1-t}\underbrace{\int_0^t\frac{dt}{t}\cdots\int_0^t\frac{dt}{t}}_{k_{n-1}-1}\int_0^t\frac{dt}{1-t}\cdots \\
&\qquad \cdots\underbrace{\int_0^t\frac{dt}{t}\cdots\int_0^t\frac{dt}{t}}_{k_2-1}\int_0^t\frac{dt}{1-t}\underbrace{\int_0^t\frac{dt}{t}\cdots\int_0^t\frac{dt}{t}}_{k_1-1}\int_0^t\frac{dt}{1-t}
\end{aligned}
$$

証明は、次の節で多重対数級数 $Li_{k_1,\cdots k_n}(z)$ の反復積分表示を与える際に同時に行うことにします ($\dfrac{1}{1-t}$ を展開して項別積分を繰り返していっても出来ます)。証明をすると、$\displaystyle\int\frac{dt}{1-t}$ が現れるごとに depth が一つずつ増えて、$\displaystyle\int\frac{dt}{t}$ を行うのが depth は変えず最後の index を一つふやすことになるのがわかります。つまり、積分の回数が weight であり、そのうちの$\displaystyle\int\frac{dt}{1-t}$ の個数が depth です。はじめの$\dfrac{dt}{A_{\varepsilon_1}(t)}=\dfrac{dt}{1-t}$ と最後の$\dfrac{dt}{A_{\varepsilon_k}(t)}=\dfrac{dt}{t}$ は決まっているので、残り $k-2$ 個のうちの$\dfrac{dt}{1-t}$ の個数が depth マイナス 1 だから、先に述べた数の勘定がわかります。

この積分表示から、多重ゼータ値の “duality” が自然に導かれます。すなわち、まず積分順序を交換して

$$
I(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)=\int_0^1\frac{dt_1}{A_{\varepsilon_1}(t_1)}\int_{t_1}^1\cdots\int_{t_{k-2}}^1\frac{dt_{k-1}}{A_{\varepsilon_{k-1}}(t_{k-1})}\int_{t_{k-1}}^1\frac{dt_k}{A_{\varepsilon_k}(t_k)}.
$$

そこで変数変換 $(t_1,\dots,t_k)\mapsto(1-t_k,\dots,1-t_1)$ を行うと直ちに

$$
I(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)=I(1-\varepsilon_k,\dots,1-\varepsilon_1)
$$

が言えます。これを $\zeta(k_1,\dots,k_n)$ に翻訳すると次のようになります。(dual index は慣れないとわかりにくいので、いくつか例をつくってみてください。)

Theorem 2.1.1 (Duality) $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_n)$ に対し $\zeta(\mathbf{k})$ で $\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ を表すことにする。今 $\mathbf{k}$ が、その成分が 1 とそうでないところを区別して

$$\mathbf{k}=(\underbrace{1,\ldots,1}_{a_1-1},b_1+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{a_2-1},b_2+1,\ldots,\underbrace{1,\ldots,1}_{a_s-1},b_s+1)$$

の形に書けているとする。ここで $s\geq 1$, $a_1,b_1,\ldots,a_s,b_s\geq 1$. このとき

$$\mathbf{k}'=(\underbrace{1,\ldots,1}_{b_s-1},a_s+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{b_{s-1}-1},a_{s-1}+1,\ldots,\underbrace{1,\ldots,1}_{b_1-1},a_1+1)$$

と置くと ($\mathbf{k}'$ を $\mathbf{k}$ の dual index set と呼ぶ)

$$\zeta(\mathbf{k}')=\zeta(\mathbf{k}).$$

weight が k, depth が n の多重ゼータ値の dual は、weight は同じ k で、depth が $k-n$ となります。

2.2 多重ゼータ値のなす環

Definition 2.2.1 各 $k\geq 0$ に対し、$\mathbf{Q}$ 上のベクトル空間 $\mathcal{Z}_k$ を $\mathcal{Z}_0=\mathbf{Q},\mathcal{Z}_1=\{0\}$,

$$\mathcal{Z}_k:=\sum_{\substack{1\leq n\leq k-1\\ k_1+\cdots+k_n=k}}\mathbf{Q}\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)\qquad(k\geq 2)$$

で定義し、さらに $\mathcal{Z}:=\sum_{k\geq 0}\mathcal{Z}_k$ とおく。

各 $\mathcal{Z}_k$ は weight が k の多重ゼータ値 (有限個) で張られる有限次元 $\mathbf{Q}$ ベクトル空間ですが、$\mathcal{Z}$ は無限次元になります。それは、 Euler の結果より $\pi^{2k}\in\mathcal{Z}_{2k}$ であり、π は超越数 (Lindemann) なのでπ^{2k} $(k=1,2,3,\ldots)$ が $\mathbf{Q}$ 上独立となるからです。(実際にはすべての $\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ は超越数だと予想され、 weight が違うと $\mathbf{Q}$ 上一次独立だと考えられています。しかしそれは、$\mathbf{Q}\cap\mathbf{Q}\zeta(3)=\{0\}$ がやっと２０年前に証明されたものの $m\geq 2$ については $\mathbf{Q}\cap\mathbf{Q}\zeta(2m+1)=\{0\}$ がまだわかっていないことを思うと、とても難しい問題だろうことは想像がつきます。このように多重ゼータ値の weight の考え方は、例えば $\zeta(5)$ の無理性という問題とならんで、$\zeta(3)$ は π^2 の有理数倍でないか (weight が違うから) とか、すべての $\zeta(2m+1)$ は $\mathbf{Q}$ 上独立かというような問題を浮かび上がらせます。こういう問題についての最近の状況をご存知の方はぜひ教えてください。)

さて $\mathcal{Z}$ は $\mathbf{Q}$ ベクトル空間であるだけでなく、積でも閉じていることが示されます。

Proposition 2.2.2 $\mathcal{Z}$ は積について閉じている。即ち $\mathbf{Q}$- *algebra* の構造を持つ。

つまり二つの多重ゼータ値の積がいくつかの多重ゼータ値の $\mathbf{Q}$ 線型結合で書けることを示すのですが、これには二通りの方法があります。しかもそれぞれ得られる線型結合は見かけが違うのです。これが後で問題にする多重ゼータ値の線型関係の重要な源となるので、それぞれ

について詳しく述べましょう。

まず最初は、定義の冪級数表示を用いるやり方です。例で見てみますと、

$$
\begin{aligned}
\zeta(p)\zeta(q) &= \left(\sum_{0<m}\frac{1}{m^p}\right)\left(\sum_{0<n}\frac{1}{n^q}\right) = \sum_{0<m,n}\frac{1}{m^p n^q} \\
&= \left(\sum_{0<n<m} + \sum_{0<m=n} + \sum_{0<m<n}\right)\frac{1}{m^p n^q} \\
&= \zeta(q,p) + \zeta(p+q) + \zeta(p,q), \\
\zeta(p)\zeta(q,r) &= \left(\sum_{0<\ell}\frac{1}{\ell^p}\right)\left(\sum_{0<m<n}\frac{1}{m^q n^r}\right) = \sum_{\substack{0<\ell \\ 0<m<n}}\frac{1}{\ell^p m^q n^r} \\
&= \left(\sum_{0<m<n<\ell} + \sum_{0<m<\ell=n} + \sum_{0<m<\ell<n} + \sum_{0<\ell=m<n}\sum_{0<m<\ell=n} + \sum_{0<\ell<m<n}\right)\frac{1}{\ell^p m^q n^r} \\
&= \zeta(q,r,p) + \zeta(q,p+r) + \zeta(q,p,r) + \zeta(p+q,r) + \zeta(p,q,r).
\end{aligned}
$$

これから一般の場合の計算の仕方はわかっていただけると思うのですが、それをきちんと書き表すには、Hoffman のやったように帰納的に記述するのがよいようです。そのためには少し準備が必要となります。

今、$\mathbf{Q}\langle x,y\rangle$ で $\mathbf{Q}$ 上の 2 変数非可換多項式環を表すものとし、

$$
\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0 := \mathbf{Q}\cdot 1 + x\mathbf{Q}\langle x,y\rangle y
$$

とします。$\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0$ の word (単項式) $u_1u_2\cdots u_k$ ($\neq 1,\ u_i = x$ or $y,\ u_1 = x, u_k = y$) に対して、$x \longleftrightarrow \dfrac{dt}{t},\ y \longleftrightarrow \dfrac{dt}{1-t}$ として、つまり、 $u_i = x$ ならば $A_i(t_i) = t_i,\ u_i = y$ ならば $A_i(t_i) = 1 - t_i$ として反復積分 (=多重ゼータ値)

$$
\int_0^1 \frac{dt_1}{A_1(t_1)}\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{k-2}}\frac{dt_{k-1}}{A_{k-1}(t_{k-1})}\int_0^{t_{k-1}}\frac{dt_k}{A_k(t_k)}
$$

の値を対応させる写像を考え、これを $\mathbf{Q}$-linear に $\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0$ 全体に拡張したものを $\widetilde{\zeta}$ と書きましょう ($\widetilde{\zeta}(1) = 1$ とする):

$$
\widetilde{\zeta} : \mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0 \longrightarrow \mathbf{R} \qquad (\mathbf{Q}\text{-linear}).
$$

word w の長さを k, y が含まれる個数を n とすると$\widetilde{\zeta}(w)$ は weight k, depth n の多重ゼータ値です。

例 $\widetilde{\zeta}(xy) = \zeta(2),\quad \widetilde{\zeta}(x^2y) = \zeta(3),\quad \widetilde{\zeta}(xy^2) = \zeta(1,2),\quad \widetilde{\zeta}(x^2y^2x^3y) = \zeta(4,1,3),\quad$ etc.

明らかに、$\widetilde{\zeta}$ の像は $\mathcal{Z}$ になります。つまり $\widetilde{\zeta}$ は $\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0$ から $\mathcal{Z}$ への全射です：

$$\widetilde{\zeta}:\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0 \longrightarrow \mathcal{Z} \quad (\text{全射}).$$

後の便宜のため $\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0$ を少しひろげて

$$\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^1 := \mathbf{Q}\cdot 1 + \mathbf{Q}\langle x,y\rangle y$$

とします。$z_p = x^{p-1}y$ $(p=1,2,3,\cdots)$ とすると $\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^1$ は z_p で生成される非可換多項式環ともみなせ、$\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0$ $(\subset \mathbf{Q}\langle x,y\rangle^1)$ の word w を $w = z_{k_n}z_{k_{n-1}}\cdots z_{k_1}$ ($w\in\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0$より $k_n\geq 2$) と書いたとき、p. 22 ($\heartsuit$) より、

$$\widetilde{\zeta}(w) = \zeta(k_1,k_2,\cdots,k_n)$$

となります（index の順序注意）。

さて、$\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^1$ 上の新たな積 $*$ (harmonic product) を次の規則および、$\mathbf{Q}$-双線型であること、分配則をみたすことを要請して定義します。

H1. $\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^1$ の任意の word w に対し $w*1=1*w=w$.

H2. $\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^1$ の任意の words w_1,w_2 と正整数 p,q に対し、

$$z_pw_1 * z_qw_2 = z_p(w_1*z_qw_2) + z_{p+q}(w_1*w_2) + z_q(z_pw_1*w_2).$$

例えば、H2 で $w_1=w_2=1$ とすると、

$$z_p*z_q = z_pz_q + z_{p+q} + z_qz_p,$$

又これと、H2 の $w_1=1, q=r, w_2=z_q$ の場合を使うと

$$\begin{aligned} z_p*(z_rz_q) &= z_pz_rz_q + z_{p+r}z_q + z_r(z_p*z_q) \\ &= z_pz_rz_q + z_{p+r}z_q + z_rz_pz_q + z_rz_{p+q} + z_rz_qz_p. \end{aligned}$$

これと、先の多重ゼータ値の積の例 $\zeta(p)\zeta(q)$, $\zeta(p)\zeta(q,r)$ とを見較べていただくと、上の定義の意味がのみこめてくると思います (これも慣れが必要？)。Hoffman はこの演算 $*$ が結合的、かつ可換であることを word の長さに関する induction で示し ([7]) さらに、$\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^1$ がこの積に関して可換多項式環となることを示しています。（生成元 (“Lyndon words”) も記述している。彼は実際にはより広い $\mathbf{Q}\langle x,y\rangle$ で $*$ を定義してこれらのことを証明しています。）その詳細は紹介しませんが、さしあたり我々が用いる事実は次が成り立つことです（成り立つように $*$ が定義されているというべきですが）。

Proposition 2.2.3 任意の words $w_1,w_2\in\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0$に対し、

$$\widetilde{\zeta}(w_1)\widetilde{\zeta}(w_2) = \widetilde{\zeta}(w_1*w_2).$$

証明　$w_1 = z_{k_n} \cdots z_{k_2} z_{k_1}, w_2 = z_{k'_{n'}} \cdots z_{k'_2} z_{k'_1}$ とすると、

$$\begin{aligned}\widetilde{\zeta}(w_1) &= \zeta(k_1, \cdots, k_n) = \sum_{0<m_1<\cdots<m_n} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}} \\ \widetilde{\zeta}(w_2) &= \zeta(k'_1, \cdots, k'_{n'}) = \sum_{0<m'_1<\cdots<m'_{n'}} \frac{1}{{m'_1}^{k'_1} \cdots {m'_{n'}}^{k'_{n'}}}\end{aligned}$$

であり、

$$\widetilde{\zeta}(w_1)\widetilde{\zeta}(w_2) = \sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_n \\ 0<m'_1<\cdots<m'_{n'}}} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n} {m'_1}^{k'_1} \cdots {m'_{n'}}^{k'_{n'}}}.$$

この和を、先の例のように $\displaystyle\sum_{0<l_1\leq l_2\leq\cdots\leq l_{n+n'}}$ のタイプの和（ただし l_i は m_j または $m'_{j'}$ であって、m_j の大小順序及び $m'_{j'}$ の大小順序はもとの通り保たれる）、の disjoint union として書くと、右辺が多重ゼータ値の（自然数係数）一次結合として書き表される。そして、順序を保つ、ということより、最後の $l_{n+n'-1} \leq l_{n+n'}$ の部分は $l_{n+n'-1} < m_n$ ($l_{n+n'-1} = m_{n-1}$ or $m'_{n'}$) となるか、$l_{n+n'-1} < m'_{n'}$ ($l'_{n+n'-1} = m'_{n'-1}$ or m_n) となるか、又は ($l_{n+n'-2} <$) $m_n = m'_{n'}$ ($l_{n+n'-2} = m_{n-1}$ or $m'_{n'-1}$) となるかのいずれか。この区別が丁度規則 H2 の右辺の三つの項に対応している。そして不等式の残りの部分は長さの和 $n+n'$ が 1 つ少ない場合の同様の規則に帰するから、inductive に Prop. が証明されたことになる。($n = n' = 1$ の場合はすでに見た。) ∎

この Prop. によって $\mathcal{Z}$ が積で閉じていることの一つの証明が得られました。

次に、もう一つの積 $\circ$ (shuffle product) を $\mathbf{Q}\langle x, y\rangle^1$（$\mathbf{Q}\langle x, y\rangle$ でもよい）上に次の規則（及び $\mathbf{Q}$-双線型性、分配性）により定義します。

S1. 任意の word w に対し、 $w \circ 1 = 1 \circ w = w.$

S2. $u_i = x$ or y $(i = 1, 2)$ と、任意の words w_1, w_2 に対し、

$$(u_1 w_1) \circ (u_2 w_2) = u_1(w_1 \circ u_2 w_2) + u_2(u_1 w_1 \circ w_2).$$

例:　$xy \circ x = 2x^2y + xyx,\ xy \circ xy = 2xyxy + 4x^2y^2$ など。

次の Prop. が $\mathcal{Z}$ が algebra なることの第二の証明を与えます。

Proposition 2.2.4 任意の words $w_1, w_2 \in \mathbf{Q}\langle x, y\rangle^0$に対し、

$$\widetilde{\zeta}(w_1)\widetilde{\zeta}(w_2) = \widetilde{\zeta}(w_1 \circ w_2).$$

証明　これは一般的な反復積分の積に関する Ree の定理 ([17]) の特別な場合ですが、この場合の証明を与えておきます。 そのために次の関数を導入します。

Definition 2.2.5 自然数 $n \geq 1,\ k_i \geq 1$ に対し、

$$Li_{k_1,\cdots,k_n}(z) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_n} \frac{z^{m_n}}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}}.$$

これは少なくとも、 $|z|<1$ で解析的な関数を定めます。$k_n \geq 2$ ならば $z=1$ でも収束し、$\mathrm{Li}_{k_1,\cdots k_n}(1) = \zeta(k_1,\cdots,k_n)$ となっています。この関数について、次が成り立ちます。

Lemma 2.2.6 (1)

$$\frac{d}{dz}Li_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z}Li_{k_1,k_2,\ldots,k_{n-1},k_n-1}(z), & \textit{for } k_n > 1 \\ \\ \dfrac{1}{1-z}Li_{k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}}(z), & \textit{for } k_n = 1. \end{cases}$$

(2) $Li_{\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n}}(z) = \dfrac{1}{n!}(-\log(1-z))^n.$

証明 (1) で $k_n > 1$ の場合は項別に微分するだけ。$k_n = 1$ の場合は、項別に微分して、和の中の m_n の部分を $\displaystyle\sum_{m_n=m_{n-1}+1}^{\infty} z^{m_n-1} = \frac{z^{m_{n-1}}}{1-z}$ と計算すると出る。 (2) は (1) と $Li_1(z) = -\log(1-z)$ より帰納的にわかる。∎

この Lemma を積分したものを繰り返し使うと直ちに次が得られます。($Li_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(0)=0$ に注意。)

Proposition 2.2.7 n, k_i は Def. 2.2.5 の通りとすると

$$\begin{aligned} Li_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(z) \quad = \quad & \underbrace{\int_0^z \frac{dz}{z}\cdots\int_0^z \frac{dz}{z}}_{k_n-1}\int_0^z \frac{dz}{1-z}\underbrace{\int_0^z \frac{dz}{z}\cdots\int_0^z \frac{dz}{z}}_{k_{n-1}-1}\int_0^z \frac{dz}{1-z}\cdots \\ & \cdots\underbrace{\int_0^z \frac{dz}{z}\cdots\int_0^z \frac{dz}{z}}_{k_2-1}\int_0^z \frac{dz}{1-z}\underbrace{\int_0^z \frac{dz}{z}\cdots\int_0^z \frac{dz}{z}}_{k_1-1}\int_0^z \frac{dz}{1-z}. \end{aligned}$$

$k_n > 1$ の場合にこの式で、最後の積分の上端の $z=1$ とおいて得られるのが、 §2.1 で証明を後回しにしていた多重ゼータ値の反復積分表示 (♡) です。

Prop. 2.2.4 の証明 $\widetilde{\zeta}$ を定義したと同様に、$\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^1$ の word w (こんどは必ずしも x で始まらなくともよい) に対しやはり $x \longleftrightarrow \dfrac{dt}{t},\ y \longleftrightarrow \dfrac{dt}{1-t}$ として、上の Prop. の反復積分を対応させる写像 (を $\mathbf{Q}$-linear に拡張したもの) を $\widetilde{L}$ と書くことにする。すると Prop. 2.2.4 より強く、任意の words $w_1, w_2 \in \mathbf{Q}\langle x,y\rangle^1$ に対し、

$$\widetilde{L}(w_1)\widetilde{L}(w_2) = \widetilde{L}(w_1 \circ w_2)$$

が成り立つことが、次のように word の長さの和に関する帰納法でわかる。

まず、長さの和 $= 2$ のとき $w_1 = w_2 = y$ で、$y \circ y = 2y^2, \widetilde{L}(y) = Li_1(z), \widetilde{L}(y^2) = Li_{1,1}(z)$ なので、$\widetilde{L}(w_1)\widetilde{L}(w_2) = \widetilde{L}(w_1 \circ w_2)$ は先の Lem. 2.2.6 (2) の $n = 2$ の場合に他ならない。長さの和が 2 より大きいとき、$\widetilde{L}(w_1)\widetilde{L}(w_2)$ を z で微分する。Lem. 2.2.6 により $\frac{d}{dz}\widetilde{L}(w_1)$ は、$w_1 = xw_1'$ の形か $w_1 = yw_1'$ の形かに応じて $\frac{1}{z}\widetilde{L}(w_1')$ か $\frac{1}{1-z}\widetilde{L}(w_1')$ になる。$\frac{d}{dz}\widetilde{L}(w_2)$ についても同様なので、これに帰納法の仮定をつかい、$\circ$ の定義 S2 と見比べると $\frac{d}{dz}\left(\widetilde{L}(w_1)\widetilde{L}(w_2)\right) = \frac{d}{dz}\left(\widetilde{L}(w_1 \circ w_2)\right)$ がわかる。これを 0 から z まで積分して、0 での値は 0 ということに注意すれば求める等式が得られる。∎

さて、$\mathcal{Z}$ は $\mathbf{Q}$-algebra であることは分かったわけですが、そこで当然問題になるのは、

問題 (1)　$\mathcal{Z}$ の $\mathbf{Q}$-algebra としての構造を求めること。
(2)　特に $d_k := \dim_{\mathbf{Q}} \mathcal{Z}_k$ を求めること。

これに対する解答が次のように予想されています。(Mixed Tate Motive の理論が根拠になっているようです。Broadhurst, Deligne, Drinfel'd, Goncharov, Hoffman, Kontsevich, Zagier, その他?)

Conjecture 2.2.8 $\mathcal{Z}$ は (無限変数の) 多項式環であって、weight k の (algebra) generator の個数 M_k 及び $\mathcal{Z}_k$ の $\mathbf{Q}$ ベクトル空間としての次元 d_k は次で与えられる:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-t^k)^{M_k}} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k = \frac{1}{1-t^2-t^3}$$

もしこれが正しいとすると、d_k は漸化式

$$d_0 = 1,\ d_1 = 0,\ d_2 = 1,\ d_k = d_{k-2} + d_{k-3}\ (k \geq 3)$$

で与えられ、 M_k は次の式で与えられることがわかります。

$$M_k = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) P_d.$$

ここに P_d は Perrin number と呼ばれ、$P_1 = 0,\ P_2 = 2,\ P_3 = 3,\ P_d = P_{d-2} + P_{d-3}\ (d \geq 4)$ で与えられる数 (d_k と初期値だけが異なる) で、μ は Möbius 関数です。これらはいずれも予想式から容易に導かれます。（ M_k については対数微分をとって、Möbius 反転公式を使う）$d_k,\ M_k$ の予想値を表にしておきます。

weight k の多重ゼータ値は 2^{k-2} 個ありますが、上の次元の予想値 d_k ($\sim \beta\alpha^k,\ \alpha = 1.324717..., \beta = 0.411496...$) はそれよりずっと小さい。つまり同じ weight の多重ゼータ値の間に沢山の線型関係式があるだろう。それを見つけることが問題になります。

表 2.1: d_k, M_kの予想値

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
d_k	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21
M_k	—	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	2	2	3	3

2.3 多重ゼータ値の線型関係式

既に述べた duality (Th. 2.1.1) も一つの線型関係式と見ることができます。ここでは sum formula と呼ばれるものと、その一般化である Ohno (大野泰生氏) の関係式を紹介します。証明は sum formula についてだけ与えます。

Theorem 2.3.1 (Sum formula) $0<n<k$ に対し常に

$$\sum_{\substack{k_1,\dots,k_{n-1}\geq 1,\, k_n\geq 2\\ k_1+\cdots+k_n=k}} \zeta(k_1,\dots,k_n)=\zeta(k)$$

が成り立つ。

証明 (by Zagier, スケッチ)　左辺を $S(k,n)$ と書くと反復積分表示 (p.22 (♡)) から

$$S(k,n)=\sum_{\substack{\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{k-1}\in\{0,1\}\\ \varepsilon_2+\dots+\varepsilon_{k-1}=n-1}} I(1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{k-1},0)$$

が分かる (1 の個数が depth)。これより k を止めて n に関する generating function を作ると

$$\begin{aligned}
\sum_{0<n<k} S(k,n)\,X^{n-1} &= \sum_{\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{k-1}\in\{0,1\}} I(1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{k-1},0)\,X^{\varepsilon_2+\cdots\varepsilon_{k-1}}\\
&= \int\!\cdots\!\int_{0<t_1<t_2<\ldots<t_k<1} \frac{1}{1-t_1}\left(\frac{1}{t_2}+\frac{X}{1-t_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{t_{k-1}}+\frac{X}{1-t_{k-1}}\right)\frac{1}{t_k}\,dt_1\ldots dt_k\\
&= \frac{1}{(k-2)!}\int\!\!\int_{0<t_1<t_k<1}\left(\int_{t_1}^{t_k}\left(\frac{1}{t}+\frac{X}{1-t}\right)dt\right)^{k-2}\frac{dt_1}{1-t_1}\,\frac{dt_k}{t_k}\\
&= \frac{1}{(k-2)!}\int\!\!\int_{0<t_1<t_k<1}\left(\log\frac{t_k}{t_1}+X\log\frac{1-t_1}{1-t_k}\right)^{k-2}\frac{dt_1}{1-t_1}\,\frac{dt_k}{t_k}.
\end{aligned}$$

ここで変数変換

$$x=\log\frac{t_k}{t_1},\quad y=\log\frac{1-t_1}{1-t_k},\quad \frac{dt_1}{1-t_1}\,\frac{dt_k}{t_k}=\frac{dx\,dy}{e^{x+y}-1}$$

を行い X^{n-1} の係数を比べると

$$\begin{aligned}
S(k,n) &= \int_0^\infty\int_0^\infty\sum_{m=1}^\infty \frac{e^{-mx}\,x^{k-n-1}}{(k-n-1)!}\,\frac{e^{-my}\,y^{n-1}}{(n-1)!}\,dx\,dy\\
&= \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^{k-n}}\,\frac{1}{m^n}=\zeta(k)\quad \left(\int_0^\infty e^{-mx}x^{p-1}\,dx=\frac{(p-1)!}{m^p}\right). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Zagier さんによるとこの証明は命題のエレガンスに較べて too complicated だそうです。(十分エレガントな証明に見えますが。) n を止めて k に関する generating function を作る落合啓之さんによる証明もあります。この簡明な公式が成り立つ理由がよくわかるような、全く異なる観点に立った証明があるのかもしれません。

大野さんは [16] において、duality とこの sum formula を統一的に一般化する公式を発見されました。それはまた、後述する Hoffman の関係式をも一般化するもので、すべての線型関係式を得るには至らない (まだまだ足りない) ものの、成り立つべき関係式の中のある重要なクラスであるように思われます。

Theorem 2.3.2 (Ohno) $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ と $(k'_1, k'_2, \ldots, k'_{n'})$ を互いに dual な index sets とし、$\ell \geq 0$ とする。このとき、

$$\sum_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n=\ell} \zeta(k_1+\varepsilon_1, k_2+\varepsilon_2, \ldots, k_n+\varepsilon_n) = \sum_{\varepsilon'_1+\varepsilon'_2+\ldots+\varepsilon'_{n'}=\ell} \zeta(k'_1+\varepsilon'_1, k'_2+\varepsilon'_2, \ldots, k'_{n'}+\varepsilon'_{n'}).$$

証明は基本的に sum formula の Zagier さんによる証明を踏襲するものですが、大分複雑になります。論文を参照してください。$\ell = 0$ の場合が duality, また、index sets を $(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-1}, 2)$ とその dual $(n+1)$ に取り、$\ell = k - n - 1$ とすると先の sum formula が得られます。さらに $\ell = 1$ として得られる関係式 (の一方の辺の dual をとったもの) が Hoffman の関係式 ([6]) として知られるものです。これは duality や sum formula よりも前に証明されていた公式です。

前節で algebra $\mathbf{Q}\langle x, y\rangle^0$ と写像

$$\widetilde{\zeta} : \mathbf{Q}\langle x, y\rangle^0 \longrightarrow \mathcal{Z}$$

を導入しました。($\mathcal{Z}$ は多重ゼータ値で張られる $\mathbf{Q}$ ベクトル空間。) 多重ゼータ値の線型 (もしくは代数) 関係式を $\mathbf{Q}\langle x, y\rangle^0$ で考えてみましょう。関係式をすべて知るということは

問題 $Ker\ \widetilde{\zeta}$ は何か？

という問に答えることです。ここではさしあたり代数関係式は問題にせず、線型空間としての $Ker\ \widetilde{\zeta}$ を考えることにします。

まず、$\tau : \mathbf{Q}\langle x, y\rangle^0 \longrightarrow \mathbf{Q}\langle x, y\rangle^0$ を "dual map" とします。つまり τ は各 word に対し、x と y を入れ換え、(非可換) 積の順序を逆にしたものを対応させます。($\tau(x^2y) = xy^2, \tau(xyxy^2) = x^2yxy$ など。) このとき、duality は

Theorem 2.3.3 (Duality again)

$$(1-\tau)\mathbf{Q}\langle x, y\rangle^0 \subset Ker\ \widetilde{\zeta}.$$

と述べられます。

上に紹介した Ohno の関係式を定式化し直す試みをここで述べましょう。

Definition 2.3.4 任意の $n \geq 1$ に対し、$\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0$ 内の次数が $n+1$ のすべての単項式の和を s_n とし ($s_1 = xy, s_2 = x^2y + xy^2, s_3 = x^3y + x^2y^2 + xyxy + xy^3$など)、$\partial_n$ を$\partial_n(x) = s_n$ および $\partial_n(y) = -s_n$ で定まる $\mathbf{Q}\langle x,y\rangle$ の (非可換積に関する) $\mathbf{Q}$ 上の derivation とする。(つまり $\mathbf{Q}$-線型写像 $\partial : \mathbf{Q}\langle x,y\rangle \longrightarrow \mathbf{Q}\langle x,y\rangle$ で、$\partial(\mathbf{Q}) = 0$, かつ任意の $u,v \in \mathbf{Q}\langle x,y\rangle$ に対し $\partial(uv) = u\partial(v) + \partial(u)v$ をみたすもの。この式から、x,y の行き先で ∂ は決まる。)

Hoffman は [7] において、彼が以前 [6] で証明した線型関係式 (Ohno の関係式 Th. 2.3.2 の $\ell = 1$ の場合) を以下 (と同値な形) のように定式化し直しています。(∂_1 は $\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0$ を保つことに注意。)

Theorem 2.3.5 $\partial_1(\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0) \subset Ker\ \widetilde{\zeta}$.

Hoffman の用いている derivation は ∂_1 とは違っていて、そのままでは一般化してもうまくいかないのですが、このようにとらえると一般化出来る可能性があって、実際次が、 Ohno の関係式を使って証明できます。

Proposition 2.3.6 $\partial_2(\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0) \subset Ker\ \widetilde{\zeta}$.

証明 $\theta(\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0) \subset Ker\ \widetilde{\zeta}$ なるような写像 $\theta : \mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0 \longrightarrow \mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0$ (例えば ∂_1) の全体を $\mathcal{N}$ で表すことにする。今 D_n を $D_n(x) = 0, D_n(y) = x^ny$ で定まる derivation とすると、Ohno の relation の $\ell = 2$ の場合は

$$D_1^2 + D_2 - (D_1^2 + D_2)\tau \in \mathcal{N} \tag{い}$$

と書き表される。$\bar{D}_n := \tau D_n \tau$ とする (これも derivation になる)。duality より、勝手な θ についての$\theta - \tau\theta \in \mathcal{N}$ であるので、(い) で $D_1^2\tau, D_2\tau$ を $\tau D_1^2\tau, \tau D_2\tau$ で置き換えてもよい。$\tau^2 = 1$ に注意すると

$$D_2 - \bar{D}_2 + D_1^2 - \bar{D}_1^2 \in \mathcal{N}. \tag{ろ}$$

一方 Ohno ($\ell = 1$) より $D_1 - D_1\tau \in \mathcal{N}$, 即ち $D_1 - \bar{D}_1 \in \mathcal{N}$. これに右から $D_1, \bar{D}_1$ をかけて (かけても $\mathcal{N}$ に入る) $D_1^2 - \bar{D}_1D_1 \in \mathcal{N},\ \ D_1\bar{D}_1 - \bar{D}_1^2 \in \mathcal{N}$, 和をとって

$$D_1^2 - \bar{D}_1D_1 + D_1\bar{D}_1 - \bar{D}_1^2 \in \mathcal{N}. \tag{は}$$

(ろ)−(は) をつくると

$$D_2 - \bar{D}_2 - [D_1, \bar{D}_1] \in \mathcal{N}.$$

ただし $[D_1, \bar{D}_1] = D_1\bar{D}_1 - \bar{D}_1D_1$. 左辺の $D_2 - \bar{D}_2 - [D_1, \bar{D}_1]$ は derivation であって、x,y への作用をみると∂_2 に外ならないことがわかる。これで Prop. が証明された。∎

そこでさらに、次を予想として提出しておきましょう。

Conjecture 2.3.7 $\forall n \geq 1,\ \partial_n(\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0) \subset Ker\ \widetilde{\zeta}$.

これは計算機を使って weight が 12 まで (ということは、$\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0$ の次数 m の元 w について、$n+m \leq 12$ なるとき $\partial_n(w) \in Ker\ \widetilde{\zeta}$) は確かめました。この範囲ではすべて Ohno の関係式に帰着します。実はこの derivation を使って生み出される関係式は Ohno の関係式と同値ではないかと想像していますが、よしんば新しい関係式を生み出さないにしても、何か示唆的なとらえ方であると思います。

問題　∂_n 以外にも $\partial(\mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0) \subset Ker\ \widetilde{\zeta}$ となるような derivation ∂ (伊原先生の用語 [9] の借用で "special derivation" とよぼう) はあるか？そのようなもの (で homogeneous なもの) 全体のなす Lie 環は何か？

さてここで、"double shuffle relation" について述べましょう。Prop. 2.2.2 の証で見たように、$w_1, w_2 \in \mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0$ に対して $w_1 \circ w_2$ と $w_1 * w_2$ は共に $\widetilde{\zeta}$ によって $\widetilde{\zeta}(w_1)\widetilde{\zeta}(w_2)$ にうつされますから、$\langle w_1, w_2\rangle := w_1 \circ w_2 - w_1 * w_2$ とすると

Double Shuffle Relation　　$\langle w_1, w_2\rangle \in Ker\ \widetilde{\zeta} \quad (w_1, w_2 \in \mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0)$

が成り立ちます。これはさらに、$w_1 = y$ としても ($\widetilde{\zeta}(y) = \zeta(1) = \infty$ にもかかわらず) 成り立ちます。実際、

Proposition 2.3.8 $\langle y, w\rangle = \partial_1(w), \forall w \in \mathbf{Q}\langle x,y\rangle^1$,　特に $w \in \mathbf{Q}\langle x,y\rangle^0$ なら $\langle y, w\rangle \in Ker\ \widetilde{\zeta}$.

これははじめ Hoffman の relation との関係で大野さんに指摘されたものです。

証明　$w \longmapsto \langle y, w\rangle = y \circ w - y * w \quad (w \in \mathbf{Q}\langle x,y\rangle^1)$ が derivation なることを示す。まず、$w_1, w_2 \in \mathbf{Q}\langle x,y\rangle^1$ として、

$$y \circ (w_1 w_2) = (y \circ w_1) w_2 + w_1 (y \circ w_2) - w_1 y w_2 \tag{甲}$$

が成り立つことを見るのはやさしい。次に

$$y * (w_1 w_2) = (y * w_1) w_2 + w_1 (y * w_2) - w_1 y w_2 \tag{乙}$$

を、w_1 を $z_q (= x^{q-1} y)$ の積に書いたときの長さについての induction で示す。まず $w_1 = z_q$ のとき積 $*$ の定義より

$$\text{左辺} = y * (z_q w_2) = y z_q w_2 + z_{1+q} w_2 + z_q (y * w_2).$$

また

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= (y * z_q) w_2 + z_q (y * w_2) - z_q y w_2 \\ &= (y z_q + z_{1+q} + z_q y) w_2 + z_q (y * w_2) - z_q y w_2 \\ &= y z_q w_2 + z_{1+q} w_2 + z_q (y * w_2).\end{aligned}$$

よって左辺=右辺。次に w_1' では正しいとして、$w_1 = z_q w_1'$ のとき、

$$\begin{aligned}
y * (z_q w_1' w_2) &= y z_q w_1' w_2 + z_{1+q} w_1' w_2 + z_q (y * (w_1' w_2)) \\
&= y z_q w_1' w_2 + z_{1+q} w_1' w_2 + z_q ((y * w_1') w_2 + w_1' (y * w_2) - w_1' y w_2) \quad \text{(induction の仮定)} \\
&= (y z_q w_1' + z_{1+q} w_1' + z_q (y * w_1')) w_2 + z_q w_1' (y * w_2) - z_q w_1' y w_2 \\
&= (y * w_1) w_2 + w_1 (y * w_2) - w_1 y w_2.
\end{aligned}$$

これで (乙) が示され、(甲) と併せて $w \mapsto \langle y, w \rangle$ が derivation なることがわかる。あとは $\mathbf{Q}\langle x, y\rangle^1$ の生成元 $z_{p+1} = x^p y$ $(p \geq 0)$ について $\partial_1(x^p y) = \langle y, x^p y \rangle$ を確かめればよいが、∂_1 の定義より

$$\partial_1(x^p y) = xyx^{p-1}y + x^2 yx^{p-2} y + \cdots + x^p y^2 - x^{p+1} y,$$

また、

$$\begin{aligned}
\langle y, x^p y \rangle &= y \circ (x^p y) - y * (x^p y) \\
&= yx^p y + xyx^{p-1} y + \cdots + x^{p-1} yxy + 2x^p y^2 - yx^p y - x^{p+1} y - x^p y^2 \\
&= xyx^{p-1} y + x^2 yx^{p-2} y + \cdots + x^p y^2 - x^{p+1} y.
\end{aligned}$$

これで $\langle y, w \rangle = \partial_1(w)$ が証明された。特に $w \in \mathbf{Q}\langle x, y\rangle^0$ のとき Th. 2.3.5 より $\langle y, w \rangle \in Ker\, \tilde{\zeta}$ がわかる。 ▮

つまり Hoffman の関係式 Th.2.3.5 は double shuffle relation の特別な場合とみなすことが出来るわけです。ところがこれは、すでに Euler が、発散している $\zeta(1)$ をそのまま用いて導いている式を一般の depth に拡張したものになっていて、ここでもまた Euler はすごいなあと感心することになります。

最後に、$Ker\, \tilde{\zeta}$ を生成するのに double shuffle relations と duality で十分か、という問題をあげておきます。

問題 $Ker\, \tilde{\zeta}$ は ($\mathbf{Q}$-ベクトル空間として) $\langle y, \mathbf{Q}\langle x, y\rangle^0 \rangle, \langle \mathbf{Q}\langle x, y\rangle^0, \mathbf{Q}\langle x, y\rangle^0 \rangle, (1-\tau)\mathbf{Q}\langle x, y\rangle^0$ で生成されるだろうか？

これはどれだけ根拠があるかはっきりしないのですが、計算機で weight 10 までは成り立つことを確かめました。これが正しいとしても、double shuffle relation は Ohno's relation のように一般的な式を書き表せそうにないし、どれが独立な関係式かを判定するのも出来るかどうか、なかなか次元 d_k の予想式に迫れそうには (今のところ) ありません。

第3章　ある種のゼータ関数

この章では論文 [1] で行った荒川さんとの共同研究について紹介いたします。証明の詳細はいずれ出ることになっている [1] に譲るという形で簡略に書き進めていきたいと思います。

3.1　定義と諸性質

さて我々は多重ゼータ値の最後の index を変数にして

$$\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1};s) := \sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_{n-1}<m_n} \frac{1}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_{n-1}^{k_{n-1}}m_n^s} \qquad (n\geq 1, k_i\geq 1)$$

と定義します。これについて、標準的な方法で、積分表示、解析接続がなされます。

Theorem 3.1.1 **(1)** $Re(s)>1$ に対し

$$\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1};s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\cdot Li_{k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}}(e^{-t})dt$$

ここに、$Li_{k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}}(z)$ は Def. 2.2.2 で定義された関数。

(2)　また別の表示として $Re(s)>1$ に対し

$$\begin{aligned}\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1};s) &= \frac{1}{\Gamma(k_1)\cdots\Gamma(k_{n-1})\Gamma(s)}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty dx_1\cdots dx_{n-1}dx_n \\ &\quad\times x_1^{k_1-1}\cdots x_{n-1}^{k_{n-1}-1}x_n^{s-1}\frac{1}{e^{x_1+\cdots+x_n}-1}\cdot\frac{1}{e^{x_2+\cdots+x_n}-1}\cdots\frac{1}{e^{x_n}-1}\end{aligned}$$

(3) ゼータ函数 $\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1};s)$ は全 s 平面に有理型に解析接続される。

解析接続がなされる途中の計算から、$\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1};s)$ の極の位置と位数を inductive に決めることが「原理的には」出来るはずですが、一般的には計算していません。(やるべきことです。) ただし記述の方法をよく考えないと様子はどんどん複雑になっていきます。ここでは $s=1$ における様子について、次の命題を述べるに留めます。

Proposition 3.1.2 **(1)** 与えられた index set $(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1})$ が、$(k_1,\ldots,k_i,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m})$ ($m\geq 0$, $i\geq 1$, $k_i>1$) なる形だとする。このとき $\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1};s)$ の $s=1$ における極の位数は $m+1$ で leading coefficient は $\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_i)$、つまり

$$\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1};s) = \frac{\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_i)}{(s-1)^{m+1}} + O((s-1)^{-m}).$$

(2) $(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}) = (1, 1, \ldots, 1)$ の時、

$$\Gamma(s)\zeta(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-1}; s) = \frac{1}{(s-1)^n} + O(s-1). \tag{3.1}$$

この命題の (2) は Riemann zeta の "Kronecker limit formula"

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + O(s-1)$$

（これはよりポピュラーな

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1) \qquad (\gamma = \text{Euler's constant})$$

に同値）の一般化になっています。のみならず、そこから次の、$\Gamma(s)\zeta(s)$ の $s=1$ での Taylor 展開の高次の係数の公式を導くことが出来ます。（また逆にこの公式から (2) を示すことも出来る。）

Corollary 3.1.3 c_n を $\Gamma(s)\zeta(s)$ の $s=1$ での展開係数とする：

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (s-1)^n.$$

このとき

$$c_n = \frac{1}{n!}\int_0^\infty \left\{(\log t)^n - \left(\log \frac{t}{1-e^{-t}}\right)^n\right\}\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right) dt.$$

$\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}; s)$ の極の様子を調べるとこのような副産物がまだまだみつかるのかも知れません。

3.2 負整数点での値と多重ベルヌーイ数

今、$k \geq 1$ に対し関数 $\xi_k(s)$ を

$$\xi_k(s) := \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1} Li_k(1-e^{-t}) dt$$

で定義します。$\xi_1(s) = s\zeta(s+1)$ です。このとき、

Theorem 3.2.1 (1) 関数 $\xi_k(s)$ は全 s 平面に正則に解析接続される。

(2) $\xi_k(s)$ は $\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}; s)$ によって

$$\begin{aligned}\xi_k(s) \quad = \quad & (-1)^{k-1}\{\zeta(\underbrace{2, 1, \ldots, 1}_{k-1}; s) + \zeta(\underbrace{1, 2, 1, \ldots, 1}_{k-1}; s) + \cdots + \zeta(\underbrace{1, \ldots, 1, 2}_{k-1}; s) \\ & + s \cdot \zeta(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k-1}; s+1)\} + \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \zeta(k-j) \cdot \zeta(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{j}; s)\end{aligned}$$

と書き表される。特に $\xi_k(s)$ の正整数点での値は多重ゼータ値で書き表される。(これについてはあとの Cor. 3.3.3 も参照。)

(3) $\xi_k(s)$ の非正整数点での値が

$$\xi_k(-m) = \sum_{\ell=0}^{m}(-1)^\ell \binom{m}{\ell} B_\ell^{(k)} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

で与えられる。

(2) の証明は、積分

$$J(s) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x_k^{s-1} \cdot \frac{x_1 + \cdots + x_k}{e^{x_1+\cdots+x_k} - 1} \cdot \frac{1}{e^{x_2+\cdots+x_k} - 1} \cdots \frac{1}{e^{x_k} - 1} dx_1 \cdots dx_k$$

を二通りの仕方で計算します。(3) は被積分関数の展開から自然に出て来ますが、詳しくは [1] を参照してください。下の Corollary についても同様に [1] を参照してもらうことにしてしまいますが、di-Bernoulli 数についてはすっきりした式が得られています。Th. 1.4.1 (1) といい、di-Bernoulli 数というのは、di-logarithm 関数が特に面白いように、何か特別なのかも知れない、と感じています。

Corollary 3.2.2 多重ベルヌーイ数 $B_n^{(k)}(k \geq 2)$ が $\xi_k(s)$ 非正整数点での値によって

$$B_n^{(k)} = (-1)^n \left(\xi_k(-n) - \xi_{k-1}(-n+1)\right), \forall n \geq 1$$

で与えられる。特に、

$$B_n^{(2)} = \xi_2(-n), \ \forall n \geq 4 \text{ even}.$$

注. (1) 定理の (2) は多重対数の間の関係式

$$Li_k(1-z) = (-1)^{k-1}\left\{Li_{\underbrace{2,1,\ldots,1}_{k-1}}(z) + Li_{\underbrace{1,2,1,\ldots,1}_{k-1}}(z) + \cdots + Li_{\underbrace{1,\ldots,1,2}_{k-1}}(z)\right\}$$
$$+ \sum_{j=0}^{k-2} \frac{\zeta(k-j)}{j!}(\log(1-z))^j - \frac{1}{(k-1)!}\log(z)(\log(1-z))^{k-1} \qquad (0 < z < 1)$$

に同値で、 $k = 2$ のときこれは有名な di-logarithm の関数等式

$$Li_2(z) + Li_2(1-z) = \zeta(2) - \log z \log(1-z).$$

に外なりません。
(2) n が奇数のとき $B_n^{(2)} = -\dfrac{(n-2)}{4}B_{n-1}^{(1)}$ でした (Th. 1.4.1 (1))。

3.3 多重ゼータ値の関係式への応用

$\xi_k(s)$ は Li_k を Def. 2.2.5 で導入した $Li_{k_1,k_2,\ldots,k_r}$ に変えることにより（安直に）

$$\xi(k_1,k_2,\ldots,k_r;s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\cdot Li_{k_1,k_2,\ldots,k_r}(1-e^{-t})\,dt$$

と一般化されます。この index set が特別な時は $\xi_k(s)$ の場合と似た計算が出来てやはりこれを $\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1};s)$ で書き表すことが出来ます。そうしてそれから、多重ゼータ値の代数関係式を導くことができます。

Theorem 3.3.1 $r,k\geq 1$ に対し

$$\begin{aligned}\xi(\underbrace{1,\ldots,1}_{r-1},k;s)&=(-1)^{k-1}\sum_{\substack{a_1+\cdots+a_k=r\\ \forall a_j\geq 0}}\binom{s+a_k-1}{a_k}\zeta(a_1+1,\ldots,a_{k-1}+1;a_k+s)\\ &\quad+\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\zeta(\underbrace{1,\ldots,1}_{r-1},k-j)\zeta(\underbrace{1,\ldots,1}_{j};s).\end{aligned}$$

これから、$\xi(\underbrace{1,\ldots,1}_{r-1},k;s)$ の $s=$ 正整数での値について次の等式が導かれます。

Theorem 3.3.2 **(i)** $m\geq 0,r\geq 1,$ および $k\geq 1$ を整数とするとき

$$\xi(\underbrace{1,\ldots,1}_{r-1},k;m+1)=\sum_{\substack{a_1+\cdots+a_k=m\\ \forall a_j\geq 0}}\binom{a_k+r}{r}\zeta(a_1+1,\ldots,a_{k-1}+1;a_k+r+1)$$

(ii) $m,\ r\geq 1,\ \ k\geq 2$ を整数とすると

$$\xi(\underbrace{1,\ldots,1}_{r-1},k;m+1)+(-1)^k\xi(\underbrace{1,\ldots,1}_{m-1},k;r+1)=\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\zeta(\underbrace{1,\ldots,1}_{r-1},k-j)\zeta(\underbrace{1,\ldots,1}_{m-1},2+j).$$

特に、

Corollary 3.3.3

$$\xi_k(m+1)=\sum_{\substack{a_1+\cdots+a_k=m\\ \forall a_j\geq 0}}(a_k+1)\,\zeta(a_1+1,\ldots,a_{k-1}+1;a_k+2)\quad(k\geq 1,m\geq 0)$$

上の定理の二つの式を組み合わせることにより多重ゼータ値の間の関係式が沢山得られます。

Corollary 3.3.4 整数 $m,r\geq 1$ および $k\geq 2$ に対し

$$\sum_{\substack{a_1+\cdots+a_k=m\\ \forall a_j\geq 0}}\binom{a_k+r}{r}\zeta(a_1+1,\ldots,a_{k-1}+1;a_k+r+1)$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad (-1)^k \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_k=r \\ \forall a_j \geq 0}} \binom{a_k+m}{m} \zeta(a_1+1,\ldots,a_{k-1}+1;a_k+m+1) \\
&= \quad \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \zeta(\underbrace{1,\ \ldots\ ,1}_{r-1},k-j)\zeta(\underbrace{1,\ \ldots\ ,1}_{m-1},2+j)
\end{aligned}
$$

この特別な場合として、

$$
\sum_{i=0}^{m} \binom{r+i}{i} \zeta(m+1-i,r+1+i) + \sum_{j=0}^{r} \binom{m+j}{j} \zeta(r+1-j,m+1+j) = \zeta(m+1)\zeta(r+1),
$$

などというのも出ます。これは最近の Huard, Williams, and Nan-Yue の論文 [8] の公式 (1.8) として証明されているものですが、実は $\zeta(m+1)\zeta(r+1)$ の shuffle product を使った表現に他なりません。

多重 Bernoulli 数の方も Li_k を $Li_{k_1,k_2,\ldots,k_r}$ に変えて一般化が出来ます。(multi-poly-Bernoulli numbers?)

$$
\frac{Li_{k_1,k_2,\ldots,k_r}(1-e^{-x})}{(1-e^{-x})^r} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k_1,k_2,\ldots,k_r)} \frac{x^n}{n!}.
$$

($Li_{k_1,k_2,\ldots,k_r}(z)$ は z^r の項から始まるので $(1-e^{-x})^r$ で割る。) これは全く意味の無い一般化かと言うとそうでもなく、$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 1$ とすると Lem. 2.2.6 (2) より

$$
\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\overbrace{1,1,\ldots,1}^{r})} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{r!} \left(\frac{-x}{e^{-x}-1} \right)^r.
$$

となり、$B_n^{(\overbrace{1,1,\ldots,1}^{r})}$ は Carlitz [2] らが研究した "higher order Bernoulli numbers" に他ならないことがわかります。

参考文献

[1] Arakawa, T. and Kaneko, M. : Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, *to appear in Nagoya J. Math.* (1998?).

[2] Carlitz, L. : Some theorems on Bernoulli numbers of higher order. *Pacific J. Math.* **2** (1952), 127–139.

[3] Euler, L. : Meditationes circa singulare serierum genus (1775), 全集 I-15, 217–267.

[4] Gould, H. W. : Explicit formulas for Bernoulli numbers, *Amer. Math. Monthly* **79** (1972), 44–51.

[5] Graham, R., Knuth, D., and Patashnik, O. : Concrete Mathematics, (邦題「コンピュータの数学」) 共立出版 (1993).

[6] Hoffman, M. : Multiple harmonic series, *Pacific J. Math.* **152** (1992), 275–290.

[7] Hoffman, M. : The algebra of multiple harmonic series, *J. Algebra* **194** (1997), 477–495.

[8] Huard, J. G., Williams, K. S. and Nan-Yue, Z. : On Tornheim's double series, *Acta Arithmetica* **65-2** (1996), 105–117.

[9] Ihara, Y. : The Galois representation arising from $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ and Tate twists of even degrees, in: Galois groups over $\mathbf{Q}$, *Publ. MSRI***16** (1989), 299–313.

[10] Ireland, K. and Rosen, M. : A Classical Introduction to Modern Number Theory, Springer, GTM 84.

[11] Jordan, Ch. : Calculus of Finite Differences, Chelsea Publ. Co., New York (1950).

[12] Knuth, D. : Two notes on notation, *Amer. Math. Monthly* **99** (1992), 403–422.

[13] Kaneko, M. : Poly-Bernoulli numbers, *Jour. Th. Nombre Bordeaux* **9** (1997), 221–228.

[14] Le, T. Q. T. and Murakami, J. : Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions, *Topology and its Applications* **62** (1995), 193–206.

[15] Lewin, L. : Polylogarithms and Associated Functions, Tata Institute, Bombay (1980).

[16] Ohno, Y. : A generalization of the duality and the sum formula on the multiple zeta values, *preprint.*

[17] Ree, R. : Lie elements and an algebra associated with shuffles, *Ann. Math.* **68** (1957), 210–220.

[18] Vandiver, H. S. : On developments in an arithmetic theory of the Bernoulli and allied numbers, *Scripta Math.* **25** (1961), 273–303.

[19] Zagier, D. : Multiple zeta values, *in preparation.*

[20] Zagier, D. : Values of zeta functions and their applications, in ECM volume, *Progress in Math.*, **120**, (1994), 497-512.