書評 Bringmann, Folsom, Ono, and Rolen: Harmonic Maass Forms and Mock Modular Forms: Theory and Applications

金子昌信

モックテータ関数（mock theta function）という対象がある．Ramanujan がその最晩年（1920），亡くなる三ヶ月ほど前に Hardy に宛てた，最後の手紙の中に登場するもので，q-級数というもので与えられている．命名も Ramanujan による．彼はその手紙の冒頭，長の無沙汰を詫びたあと，I discovered very interesting functions recently which I call “Mock” ϑ-functions と書いている．‘mock’ という単語を辞書で引くと，動詞，名詞，形容詞，副詞，それぞれに用いられ，形容詞として「まがいの」,「偽の」,「まねごとの」という訳語が載っている．ちなみに動詞としては「あざ笑う」，名詞としては「あざけりの的」なる意味があるらしい．

Ramanujan がモックテータ関数として挙げている実例のひとつが，

$$
\begin{aligned}
f(q) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1+q)^2(1+q^2)^2\cdots(1+q^n)^2} \qquad (1)\\
&= 1+q-2q^2+3q^3-3q^4+3q^5-5q^6+7q^7-6q^8+6q^9-10q^{10}+\cdots
\end{aligned}
$$

である．テータ関数というのは Jacobi 以来の古典的な対象で，適当な形の変換則を満たすモジュラー形式というものになっている（ここでは楕円変数を 0 とした一変数関数だけを念頭に置く）．例えば一番典型的な Jacobi テータ関数

$$\vartheta(\tau) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = 1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+2q^{25}+\cdots$$

は，‘重さ 1/2’ の変換則を満たすモジュラー形式である．ここで τ は複素上半平面の変数で，$q=e^{2\pi i\tau}$ によってこれを τ の関数と見るのである．変数 q のべきが n の二次式になっているのが，古典的なテータ関数の一つの特徴である．同じく重さ 1/2 のモジュラー形式である，Dedekind エータ関数

$$\eta(\tau) := q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$$

というものがあるが，これも Euler による表示式

$$\eta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{12}{n}\right)q^{n^2/24} = q^{1/24}-q^{25/24}-q^{49/24}+q^{121/24}+q^{169/24}-\cdots$$

によって，テータ関数の一種であると見なせる．ここで記号 $\left(\frac{12}{n}\right)$ は， Kronecker 記号とよばれる，値 $0,\pm1$ を取るある数論的関数である（正確な定義は省略する）．

自然数を自然数の和として書く方法の数を表す分割数 $p(n)$ の母関数が，本質的にこの $\eta(\tau)$ の逆数（それは重さ $-1/2$ のモジュラー形式になる）で与えられる：

$$\frac{q^{1/24}}{\eta(\tau)} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6 + \cdots .$$

このことは，$\eta(\tau)$ を定義する無限積の各因子の逆数を等比級数に展開し掛け合わせれば，自然に了解される．あるいはこの式によって $p(n)$ が定義されていると言ってもよい．

そして，分割の言葉で大変きれいに証明されるのであるが，これが一方で

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)^2(1-q^2)^2\cdots(1-q^n)^2}$$

という表示を持つ（例えば [5] 19.7 節参照）．これは (1) に極めて類似している．ところが $f(q)$ は，仮に $q^{1/24}$ などを掛けたとしても，モジュラー形式のようなよい変換則を満たさない．しかし Ramanujan は，変換則ではなく，q が 1 の冪根に近づくときの漸近的な振る舞いを突き止めることによって，古典的なテータ関数に似てはいるが異なる対象としての，モックテータ関数というものを世に出したのである（今年でちょうど 100 歳！）．ちなみにテータ関数の場合は，その漸近的な振る舞いは変換則から容易に導かれる．冒頭に述べた最後の手紙の中では，何をもってモックテータ関数というか，について，厳密な定義は与えられていないのであるが，本書の第九章で，彼の言わんとするところはこういうことになろう，という定義が与えられている（Definition 9.1）．

上に分割数を持ち出したが，Ramanujan が件の手紙の中で与えた 17 個のモックテータ関数は，以来分割数の様々なバリエーションを主とする，組合せ論的な数学の文脈でしばしば登場した．また q-級数自体としての興味からであろうか，超幾何級数との結びつきを始めとする，様々な形の等式が Ramanujan 以後も多く発見された．それらに証明を与える過程で新たなモックテータ関数が見いだされ，またそれにまつわる式が予想され証明され，というように, モックテータ関数の研究は進展してきた．しかし，その「モジュラー的」な性格については長らく，100 年近く，謎のままであった．そこに登場したのが，Don Zagier の Ph.D. 学生であった Sander Zwegers の学位論文（2002）である [6]．その主結果を，現在の言葉遣いで端的に述べるならば,

モックテータ関数は調和 Maass 形式の正則部分である

ということになる．調和 Maass 形式（harmonic Maass form）というのは，非正則，実解析的なモジュラー形式であり，通常のモジュラー形式と同様の変換則を満たす．Zwegers は，モックテータ関数に，非正則である適当な修正項を加えることで，それが（非正則）モジュラー形式となる，ということを，その修正項の幾通りもの構成法を与えることで示した．もちろん，それらの結果の背後にはヒントになるような先行の研究があり，特に指導教官の Zagier は時代を先取りするような研究を残していた．機が熟し，Zwegers という才能によってついに花が開いた，ということであろう．

本書は，Zwegers の学位論文 [6] と，調和 Maass 形式の理論の基礎をほぼ同時期に確立した Brunier-Funke の論文 [4] 以降，2017 年初め頃までの十数年の間に爆発的に発展してきた，調和 Maass 形式とモックモジュラー形式の理論を概観できる世界で唯一のテキストであり，その出版を

喜びたい．なお，Ramanujan から Zwegers に至るまでのモックテータ関数研究の歴史や様々な等式については [1] が詳しい．

本書のタイトルにあるモックモジュラー形式（mock modular form）というのは，モックテータ関数を一般化した対象であり，Zagier が一つの定義を与え，名前をつけた．ちょうど，テータ関数の一般化としてのモジュラー形式，に平行していると思えばよい．本書の著者の一人 Ken Ono（著者代表と言ってよいであろう）は，早い時期に，当時彼のポスドクであった Kathrin Bringmann（他の三人の著者のうちの一人）と共同で，調和 Maass 形式の理論を駆使して，分割数に関する大きな仕事をなした [2, 3]．他の二人の著者も Ono の元ポスドク，学生で，彼らの一派というかグループは，驚くべきスピードでこの方面の論文を量産している．この本の巻末の文献表には 530 の文献が挙げられているが，2005 年以降のものが約 250，そのうち 100 ほどは著者の誰かが彼らのグループに属しているように見受けられた．

ざっと本の内容を見てみよう．本書は三部に分かれている．第一部が ‘Background’，準備の部であり，三章から成る．第一章は古典的な楕円関数論の復習，特にモックモジュラー形式の一つの原型として Weierstrass ゼータ関数を論じているのが目新しい．第二章で古典的なテータ関数と Jacobi 形式を復習し，第三章では古典的な Maass 形式（Maass form）が概観される．述べ遅れたが，Maass というのは Hans Maass のことで，Erich Hecke の弟子，1950 年頃に Maass wave form（本書で Maass 形式と呼ぶもの）の理論を構築した． これは重さ 0 の変換則を満たし，ラプラシアンの固有関数になっているような関数である．私が若い頃にある先輩が， Maass 形式はモジュラー形式の理論の中のダークマターである，と言われていたのを思い出す．具体的な構成が殆ど知られていなかったことによるのであろうが，近年 Lewis-Zagier による顕著な仕事などが現れたものの，今も状況はさほど変わっていないのではないかと思われる．本書で扱う調和 Maass 形式は，重さが k（通常 0 でない）の変換を満たし，‘重さ k のラプラシアン’ によって消える関数（固有値 0 の固有関数）であり，古典的な Maass 形式とは方向が違う．

第二部が本書の中心であり，書名 ‘Harmonic Maass Froms and Mock Modular Forms’ がそのまま第二部のタイトルにもなっている（あるいは第二部のタイトルが書名になったか）．第四章から第十三章まであり，七章までが基本的な理論の解説，八章と九章が Zwegers の学位論文の解説である．十章からは，一般論と言うよりは，著者らによるその後の研究を，こういう話もある，という感じでオムニバス的に紹介している章となっている．章のタイトルだけを書き出すと，正則射影（十章），有理型 Jacobi 形式（十一章），モックモジュラー Eichler-Shimura 理論（十二章），関連する保型形式（十三章，‘mixed mock modular form’ や ‘polar harmonic Maass form’ の話）となっている． オムニバス的，というのは第三部 ‘Applications’ の各章にも当てはまり，独立して読むことの出来るそれぞれの章には元ネタというべき（ときに複数の）論文があり，それぞれの論文の内容を解説するような恰好になっている．分割数にまつわる話（十四章），Hardy-Ramanujan の ‘circle method’ を使って得られる Fourier 係数の評価（十五章），‘traces of singular moduli’ に関連した話（十六章），L-関数の ‘shifted convolution’ への応用（十七章），Borcherds 積（十八章），楕円曲線の L-関数に関係した話題（十九章），‘ムーンシャイン’ の話，無限次元リー環の表現との関係（二十章），ときて，最後の第二十一章で， Zagier が導入し，結び目や三次元多様体の量子不変量とも関係の深い ‘量子モジュラー形式（quantum modular form）’ の解説をして，本文は終わる．付録

には，Ramanujan が見つけていたものと，その後加わった，合計 46 個のモックテータ関数の様々な表示式がまとめられている．

さて，書評子として本書をどのように評価するべきか． まず，まだまだ若い分野と言えるこの方面の本として最初のもの，今のところ唯一のものであり，そのことだけでも価値がある．ただし教科書として全体を通読するようなタイプの本でないことは確かである．第一部をざっと読んで記号や基本的な背景事項を復習し，第二部の最初の三章で調和 Maass 形式とモックモジュラー形式の基礎を学べば，あとは自分の興味に従って，好きな章を拾い読みしながら原論文にあたる，というのがよいのではなかろうか．何と言っても，これからますます発展して行くであろう分野である．この本の出版後にも続々と論文が発表されている．そこにまだ，ごく少数の例外を除き，日本人があまり寄与していない．もう少し興味を持って研究に取り組む人が出ても良いのではないかと思う．そういう意味でも，一つの取りかかりを与えてくれる本書はやはり歓迎すべき好著であると言え，モックテータ関数生誕 100 年の本年，この書評を通じて興味を持って勉強，研究する人が出てくるならば望外の喜びである．

最後に,「ごく少数の例外」の一人である，九州大学の松坂俊輝君（20 年 4 月から名古屋大学）からは，本書全般に関して多くの教示を受けた．この書評は彼との合作のようなものである．記して感謝したい．また，同僚の樋上和弘氏にもお礼を書いておきたい．氏はモックモジュラー形式や量子モジュラー形式と量子不変量との関係についての第一人者である．氏が中心になって 2016 年に九州大学で開催された ‘School on Mock Modular Forms and Related Topics’ には，本書著者の一人 Larry Rolen が参加しており（本書の前書きでも触れられている），私も大いに勉強になった．その折に彼から本書の原稿を見せてもらったのが，この書評をお引き受けするきっかけになったとも言え，やはり何かご縁というものを感じる．

査読者の方も丁寧に読んで下さり，多くの有益な指摘を下さった．お礼申し上げる．

参考文献

[1] G. E. Andrews and B. C. Berndt, Ramanujan’s Lost Notebook, Part V, Springer, (2018).

[2] K. Bringmann and K. Ono, The $f(q)$ mock theta function conjecture and partition ranks, Invent. Math., **165** (2006), no. 2, 243–266.

[3] K. Bringmann and K. Ono, Dyson’s ranks and Maass forms, Ann. of Math., (2) **171** (2010), no. 1, 419–449.

[4] J. H. Bruinier and J. Funke, On two geometric theta lifts, Duke Math. J., **125** (2004), no. 1, 45–90.

[5] G. H. Hardy and E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers, Fifth edition. Oxford University Press, 1979.

[6] S. Zwegers, Mock theta functions, 2002, Ph.D. Thesis, Universiteit Utrecht.

(かねこまさのぶ・九州大学数理学研究院)