楕円モジュラー j 関数をめぐって

金子 昌信 (九州大学数理学研究院)

1996 年，山形であった代数学シンポジウムで「楕円曲線の j 不変量に関する話題」と題して講演し，報告集に楕円モジュラー関数 $j(\tau)$ についても色々と書いた． その頃見つけた，$j(\tau)$ のフーリエ係数のある公式が真新しい話題であった．その後 99 年に原田耕一郎さんのはからいでオハイオにひと月ばかり滞在する機会を得て，前から気になっていた $j(\tau)$ の実二次点での振る舞いについて，Steve Rallis に話を聞いてもらったり，計算実験を試みたりして少し調べたが，計算機の性能がまだ低かったか私のプログラム能力の故か，精度のよい実験も出来ず，理論的にも何が分かるでもなく，そのまま放ってあった．8 年の歳月が流れた 2007 年，また思い立って，数値計算には向かないと思っていた Mathematica を使ってやり直してみると結構精度良く計算できる． 面白がって色々とやっているうちに幾つか意味ありげな現象が見えてきた．実験だけで何も証明できないのが情けないところであるが，ともかくもその観察を記した論文らしきものを書いて原田さんに報告をしたりしていると，今度は草津にお招き下さった． 群論の方にはおそらくピンと来ない話題だろうから躊躇もしたが，断るわけにはいかない．それに何と言っても j-関数にはモンスターがついている．「たわごと」でも許してもらえるだろうと，海のものとも山のものともつかぬ実験についてお話しさせて頂いた．10 月始めに，この話に興味をもった Don Zagier 氏をパリに訪ねて一週間ばかり一緒にいて，彼が得た知見を聞かせてもらった．講演で述べた現象のいくつかは，漸近的には証明出来そうである．しかしまだはっきりした結果は何もないので，この報告には講演時点までの内容を記すとする．もっとも，整数論の方向けに書くのではないから，細部は思い切って省き，基本的なことからゆったりと述べるスタイルで書こうと思う． だらだらして読みにくいかも知れませんが，どうかご容赦を．

1. j 関数とは何か

楕円モジュラー関数 $j(\tau)$ というものが話の主役である． これはまず

複素上半平面 $\mathcal{H} := \{\tau \,|\, \tau \in \mathbf{C},\ \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ を定義域とする正則関数

である．$\mathbf{C}$ ではなく上半平面であるのは理由があって，以下のように $\mathbf{C}$ 内の格子の同型類を考えると自然に $\mathcal{H}$ が出てくる．

複素平面 $\mathbf{C}$ 内の格子 L をとって複素トーラス $\mathbf{C}/L$ を考えると，これが Weierstrass の $\wp$ 関数というものを使って「楕円曲線」上の点と一対一の対応がつくことが示される．ここの事情は円の場合とよく似ている．すなわち，$\mathbf{R}$ の中の一次元格子 $2\pi\mathbf{Z}$ をとって商空間 $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ を考えると，これが三角関数をつかった $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ なる写像により，代数方程式で定義される単位円

$$C:\ \{(X,Y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, X^2 + Y^2 = 1\}$$

と同一視される．これによって特に C 上には加法群の構造が入ることも分かる．$\mathbf{R}$ での加法を C での代数的な加法に書き直すのがすなわち三角関数の加法公式に他ならない．C の方程式は三角関数の公式 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ に対応するが，これを $f(t) = \cos t$ とその微分 $f'(t) = -\sin t$ が満たす代数的な微分方程式 $f(t)^2 + f'(t)^2 = 1$ と見ることにする．

翻って楕円曲線に戻ると，三角関数の対応物は楕円関数，そのなかで特に Weierstrass の $\wp$ 関数というのは，$\mathbf{C}$ 内の格子 L を決めるごとに決まる複素変数関数 $\wp(z) = \wp(z; L)$ であって

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \left\{ \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\}$$

で定義される．これは $\mathbf{C}$ 上の有理型関数で，L の点に二位の極を持つ他は正則である．重要なことはこれが二重周期を持つこと，つまり L の任意の元 $w \in L$ に対し $\wp(z+w) = \wp(z)$ を満たすことである．このことは定義からすぐには分からないが，微分

$$\wp'(z) = -2 \sum_{w \in L} \frac{1}{(z-w)^3}$$

の周期性はすぐに見て取れるから，$\wp(z+w) - \wp(z)$ は定数である．これが 0 だということを $\wp(z)$ が偶関数であることを使って示すのである．

さてこの $\wp$ 関数がやはり代数的な微分方程式

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2(L)\wp(z) - g_3(L)$$

を満たす． ここに $g_2(L)$, $g_3(L)$ は L から決まるある定数で，具体的には

$$g_2(L) := 60 \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{w^4}, \quad g_3(L) := 140 \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{w^6}$$

で与えられる．

今写像 $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$ を考えると，上の微分方程式より，これは $\mathbf{C}$ から曲線

$$Y^2 = 4X^3 - g_2(L)X - g_3(L)$$

への写像となる．ただし L の点では定義されないが，曲線を射影化して考えるとそこでの像は一つの「無限遠点」であるとみなすことが出来る．$\wp(z), \wp'(z)$ の二重周期性から，この写像は $\mathbf{C}/L$ からの写像をひきおこし，実はこれが $\mathbf{C}/L$ から曲線

$$E_L \,:\, \{(X,Y) \in \mathbf{C}^2 \,|\, Y^2 = 4X^3 - g_2(L)X - g_3(L)\} \cup \{\infty\}$$

への一対一写像となる．この曲線を楕円曲線という．こうして複素トーラス $\mathbf{C}/L$ と楕円曲線 E_L が同一視されるが，円のときと同様，$\mathbf{C}$ が持つ加法群の構造が E_L に移植され，それを具体的に記述するのが $\wp$ 関数の加法公式である．

円はスケールを変換するだけの違いを除けば本質的に 1 種類であるが，複素トーラスは L を変えると一般には本質的に違うものとなり，いわゆるモジュライがある．二つの $\mathbf{C}/L_{1,}, \mathbf{C}/L_2$ が複素多様体として，複素リー群として，(楕円曲線と見て）代数曲線として，一次元アーベル多様体として，等いずれの見方をしても，同型であるのは，L_1 と L_2 が定数倍で移り合う，つまり $L_1 = \alpha L_2$ となる $\alpha \in \mathbf{C}^\times$ が存在するときまたそのときに限る．L を αL に変えると $g_2(\alpha L) = \alpha^{-4} g_2(L)$, $g_3(\alpha L) = \alpha^{-6} g_3(L)$ であるので，曲線の方程式は変わる． しかし例えば α のべき乗が打ち消しあうような，例えば $g_2(L)^3/g_3(L)^2$ を考えるとこれは $L \to \alpha L$ で不変となって，つまりこの量は楕円曲線の同型類に対する一つの不変量を与える．ところが L によっては $g_3(L)$ が 0 にもなり得るので，$g_3(L)^2$ を分母にするのは少々具合が悪い．そこで E_L の式の右辺の三次式の判別式（の定数倍）$g_2(L)^3 - 27g_3(L)^2$ を考えると，これは決して 0 にならない（つまり三次式が重根を持たない）ことが示される．このことは丁度楕円曲線 E が「非特異」であることと対応する．この判別式は $L \to \alpha L$ とするとき α^{-12} が掛かるから，

$$j(L) := 1728 \frac{g_2(L)^3}{g_2(L)^3 - 27g_3(L)^2}$$

という量を考えると $L \to \alpha L$ で不変となり，これが良い不変量を与える（楕円曲線の j-不変量．1728 という因子については後で説明する）．すなわち

$$\mathbf{C}/L_1 \simeq \mathbf{C}/L_2 \Longleftrightarrow E_{L_1} \simeq E_{L_2} \Longleftrightarrow j(L_1) = j(L_2)$$

であること，また $\mathbf{C}/L \mapsto j(L)$ によって複素トーラス（あるいは楕円曲線）の同型類が $\mathbf{C}$ と一対一に対応することなどが示される．

同型類だけを問題にするならば L としては生成元の一つを常に 1 にとって $\mathbf{Z}\tau + \mathbf{Z}$ の形のものだけを考えればよく，もう一つの生成元 τ は $\mathcal{H}$ に入るとして一般性を失わない．そこで，同じ文字 j を使って，$\tau \in \mathcal{H}$ に対し

$$j(\tau) := j(\mathbf{Z}\tau + \mathbf{Z})$$

とおく．これが楕円モジュラー j-関数である．判別式が 0 にならないことから，$j(\tau)$ は上半平面 $\mathcal{H}$ 上の正則関数となる．モジュラー群の元 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ に対して

$$\mathbf{Z}\tau + \mathbf{Z} = \mathbf{Z}(a\tau + b) + \mathbf{Z}(c\tau + d)$$

であるから，

$$j(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}) = j(\tau) \quad \left(\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})\right)$$

となる．特に $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と取ると $j(\tau+1) = j(\tau)$ であることが従うから，正則性と合わせて $j(\tau)$ は $q = e^{2\pi i\tau}$ のローラン級数に展開（フーリエ展開）される．その最初の数項は，$g_2(L_\tau)$ および $g_2(L_\tau)^3 - 27g_3(L_\tau)^2$ ($L_\tau = \mathbf{Z}\tau + \mathbf{Z}$) のよく知られた展開

$$\begin{aligned} 12g_2(L_\tau) &= (2\pi)^4\bigl(1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{d|n} d^3)q^n\bigr), \\ g_2(L_\tau)^3 - 27g_3(L_\tau)^2 &= (2\pi)^{12} q \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n)^{24} = (2\pi)^{12}(q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \cdots) \end{aligned}$$

を用いて

$$\begin{aligned} j(\tau) &= \frac{\bigl(1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{d|n} d^3)q^n\bigr)^3}{q\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n)^{24}} \\ &= \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \cdots \ (q = e^{2\pi i\tau}). \end{aligned}$$

と計算される．$j(L)$ の定義で 1728 を掛けたことによって展開が $1/q$ から始まり，係数はすべて自然数となる．

ついでに $j(\tau)$ の別の公式として，古典的な Jacobi テータ級数というものを使ったきれいな式を一つ：

$$j(\tau) = 2^7\left(\theta_0^8 + \theta_1^8 + \theta_2^8\right)\left(\frac{1}{\theta_0^8} + \frac{1}{\theta_1^8} + \frac{1}{\theta_2^8}\right),$$

ここに

$$\theta_0 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} q^{n^2/2},\ \theta_1 = \sum_{n\in\mathbf{Z}}(-1)^n q^{n^2/2},\ \theta_2 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} q^{(n+1/2)^2/2}.$$

まとめると，楕円モジュラー関数 $j(\tau)$ は次の性質を持ち，またこれらで加法定数を除き一意的に決まる：

- 複素上半平面 $\mathcal{H} := \{\tau \mid \tau \in \mathbf{C},\ \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ 上正則,
- $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-不変, すなわち, $j\big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\big) = j(\tau), \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$,
- フーリエ展開が $1/q + O(1)$ という形をしている（無限遠点で一位の極，留数 1）.

2. 虚二次点での値（虚数乗法）

j-関数について知られている大きな理論，あるいは性質というべきか，が二つある．そのうちの一つが虚二次点での値に関するものである．

$j(\tau)$ を楕円曲線の不変量とみるとき，ある意味構造の豊かな楕円曲線の不変量は，その構造を反映して特別な値をとる．それが虚数乗法を持つ楕円曲線，すなわち通常よりも自己準同型を沢山持つ楕円曲線である． $\alpha \in \mathbf{C}$ で格子 L を保つ（$\alpha L \subset L$）ものは準同型 $\mathbf{C}/L \ni z \mapsto \alpha z \in \mathbf{C}/L$ を引きおこす．一般の L に対してはこのような α は $\mathbf{Z}$ の元しかないが，L の生成元の比 τ が（虚の）二次無理数のときはその二次体のある整環の元も L を保ち，$\mathbf{Z}$-加群として階数 2 の準同型環を持つ．このとき $\mathbf{C}/L$ は虚数乗法を持つという．例えば $L = \mathbf{Z}\sqrt{-1} + \mathbf{Z}$ のときガウス整数環 $\mathbf{Z}[\sqrt{-1}]$ の元は L を保つ．そして，Kronecker らによれば，τ が虚の二次無理数のとき，$j(\tau)$ は代数的整数であって，有理数体に τ を付け加えて得られる虚二次体 $\mathbf{Q}(\tau)$ 上のあるアーベル拡大，すなわち「類体」を生成する．そうしてそのガロア群がイデアル類群と同型になり，ガロア群の $j(\tau)$ への作用も虚二次体 $\mathbf{Q}(\tau)$ 内部の言葉すなわちイデアルの言葉で記述される．これらのことに楕円関数の周期を等分する点での値の性質を加えた理論が「虚数乗法論」として知られるものである．有理数体に対して指数関数 $e^{2\pi iz}$ の有理数（格子 $\mathbf{Z}$ の等分点）での値である，1 のべき根が果たすと同等な役割を，虚二次体に対して $j(\tau)$ や楕円関数が果たすのではないか，というのがいわゆる「Kronecker の青春の夢」で，彼を中心に虚数乗法論は発展した．いくつかの虚二次点での値を記すと

$$j(\sqrt{-1}) = 1728,\ j(\sqrt{-2}) = 8000,\ j(\sqrt{-3}) = 54000,\ j(\sqrt{-5}) = 632000 + 282880\sqrt{5},$$
$$j\Big(\frac{-1+\sqrt{-23}}{2}\Big) = \alpha = -3493225.699\ldots,\ \alpha^3 + 3491750\alpha^2 - 5151296875\alpha + (5^3 \cdot 11 \cdot 17)^3 = 0$$

などである．値の $\mathbf{Q}$ 上の次数は類数という量になる．$\mathbf{Q}(\sqrt{-163})$ の類数が 1（これが判別式の絶対値最大の類数 1 の虚二次体）ということから，

$$j\Big(\frac{-1+\sqrt{-163}}{2}\Big) = -262537412640768000 = (-320160)^3$$

が整数となり，このことから

$$e^{\sqrt{163}\pi} = 262537412640768743.99999999999925\cdots$$

が非常に整数に近いという，一寸面白い現象が現れる．

3. フーリエ係数 — Monstrous Moonshine

$j(\tau)$ に関するもう一つの大きな話題として，John McKay の観察 $196884 = 196883 + 1$ に端を発する “Monstrous Moonshine”（Conway-Norton, 1979) がある．これは，$j(\tau)$ のような古典的対象にも真に新しい発見がなされうるという意味でも非常に興味深い．自分も一生に一度でよいからこのような大発見をしてみたいものと思う．話を $j(\tau)$ に限ってごく大雑把にいうと，

$$j(\tau) \text{ のフーリエ係数とモンスター単純群 } \mathbb{M} \text{ の既約指標の次数に関係がある}$$

ということになる．例として $j(\tau)$ のフーリエ展開の q, q^2, q^3 の係数は

$$\begin{aligned} 196884 &= 1 + 196883, \\ 21493760 &= 1 + 196883 + 21296876, \\ 864299970 &= 2 \times 1 + 2 \times 196883 + 21296876 + 842609326 \end{aligned}$$

というように，$\mathbb{M}$ の既約指標の次数の小さい方の幾つかの単純な和として表される．

その後 Monster vertex operator algebra $V^\natural$ という，物理の string theory を背景に持つ対象が発見され，無限次元の Kac-Moody リー環などを使いながら，Borcherds （1992）によって moonshine conjecture は証明された．モンスター VOA $V^\natural$ は $V^\natural = \bigoplus_{n=-1}^{\infty} V_n$ なる直和に分解する次数付きの無限次元ベクトル空間で，各 V_n は monster $\mathbb{M}$ の表現空間，そしてその次元が $j(\tau) - 744$ の q^n の係数 c_n に等しい．この表現指標の単位元以外での値を q^n の係数とする無限級数をとると，これがまた別の群のモジュラー関数となっているというのが Conway-Norton の発見であり，Borcherds の解決したことであって，話は $j(\tau)$ に留まるものではないが，$j(\tau)$ だけでも十分な意外性と魅力を持っている．

また整数論的に面白いかも知れないことは，

$$p \,|\, \sharp\mathbb{M} \iff \text{標数 } p \text{ のすべての超特異 } j \text{ 不変量} \in \mathbf{F}_p$$

という事実，すなわち $\mathbb{M}$ の位数

$$\begin{aligned} \sharp\mathbb{M} &= 808017424794512875886459904961710757005754368000000000 \\ &= 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \end{aligned}$$

の素因子として現れる素数のリストが，ある数論的な性質を満たす素数のリストと一致するという事実である． Ogg が最初に発見したことで，説明をつけた人にはジャックダニエルのボトル一本，と論文に書いた．その後 Borcherds が moonshine を解決したときに Ogg から話があったらしいが，Borcherds いわく，「僕はウイスキーを飲まないので断った」．もっとも Borcherds の証明がこの事実に説明をつけているとは思われない．

虚数乗法と moonshine，この二つは今のところ全く関係がないように見える． しかし，モンスターの位数を割る素数に関連して上に書いた，素体 $\mathbf{F}_p$ に入る超特異 j 不変量の個数は虚二次体の類数で書き表される．きっと何らかのつながりはあるのではないかと想像する．つながりのもう一つの傍証として，$j(\tau)$ の フーリエ係数を虚二次無理数での値で表す公式（Kaneko, 1996）がある．それは，

$$j(\tau) \text{ の } q^n \text{ の係数 } = \frac{1}{n}\left\{\sum_{r\in\mathbf{Z}} \mathbf{t}(n-r^2) + \sum_{r\geq 1,\mathrm{odd}} \Big((-1)^n \mathbf{t}(4n-r^2) - \mathbf{t}(16n-r^2)\Big)\right\}$$

というものである（$n \geq 1$）．無限和に見えるが実質有限和である．ここで $\mathbf{t}(d)$ は判別式が $-d$ の虚二次点 τ_d での値 $j(\tau_d) - 744$ の「トレース」で，整数となる．$j(\tau_d)$ は類数次数の代数的整数で，定数項 744 を減じてからトレースをとる．d の値により「トレース」というのが正確でない場合もあるが，詳細は省く．実は $\mathbf{t}(d)$ はそういった虚数乗法の知識が無くとも，漸化式

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(4n-1) &= -240\sigma_3(n) - \sum_{2\leq r\leq\sqrt{4n+1}} r^2 \mathbf{t}(4n-r^2), \\ \mathbf{t}(4n) &= -2 \sum_{1\leq r\leq\sqrt{4n+1}} \mathbf{t}(4n-r^2) \qquad (n \geq 0) \end{aligned}$$

によって完全に決まる．$\sigma_3(n)=\sum_{d|n}d^3$ $(n>0)$ は約数の3乗和で，$\sigma_3(0)=1/240$ $(=\frac{1}{2}\zeta(-3))$ と約束する．空な和は0とし，d が $d<-1$ または $d\equiv 1,2 \bmod 4$ のときは $\mathbf{t}(d)=0$ とする．$\mathbf{t}(-1)=-1$, $\mathbf{t}(0)=2$, $\mathbf{t}(3)=-248$, $\mathbf{t}(4)=492,\ldots$ など．

ところで $\mathbf{t}(d)$ がこの一組の漸化式を満たすことは，$\mathbf{t}(d)$ の母関数があるモジュラー形式になるという Zagier の定理と同値であり，上の公式もこの定理を使って導かれた．

公式を用いた計算例をいくつか挙げる．

$$\begin{aligned}
c_1 &= 2\mathbf{t}(0)-\mathbf{t}(3)-\mathbf{t}(15)-\mathbf{t}(7)=2\times 2-(-248)-(-192513)-(-4119)=196884,\\
c_2 &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{t}(7)+\mathbf{t}(-1)-\mathbf{t}(31)-\mathbf{t}(23)-\mathbf{t}(7)\right)=\left(\mathbf{t}(-1)-\mathbf{t}(31)-\mathbf{t}(23)\right)/2\\
&= \left(-1-(-39493539)-(-3493982)\right)/2=21493760,\\
c_3 &= \frac{1}{3}\left(\mathbf{t}(3)+2\mathbf{t}(-1)-\mathbf{t}(11)-\mathbf{t}(3)-\mathbf{t}(47)-\mathbf{t}(39)-\mathbf{t}(23)-\mathbf{t}(-1)\right)\\
&= \left(\mathbf{t}(-1)-\mathbf{t}(11)-\mathbf{t}(47)-\mathbf{t}(39)-\mathbf{t}(23)\right)/3\\
&= \left(-1-(-33512)-(-2257837845)-(-331534572)-(-3493982)\right)/3=864299970.
\end{aligned}$$

4. やりたいこと — $j(\tau)$ の実二次点での「値」？

虚数乗法論の成功を承けて，Hilbert は有名なパリ講演で，一般の代数体に対しても適当な解析関数を見つけて，その特殊値によってアーベル拡大を生成する，ということを問題として提唱している．いわゆる Hilbert の第12問題である．虚二次体の次に身近にあるのは実二次体であるから，この場合に類体を構成する「何か」を見つけようとする試みが多くの人によってなされてきた．しかしいまだ決定打とよべるものはない．

私は学部生時代から j-関数が大のお気に入りなので，昔からぼんやりと，j-関数が実二次体の数論に対しても何か役割を果たすなら素晴らしいだろうと思ってきた．上半平面の境界である実軸は $j(\tau)$ の自然境界であることが知られているから，もちろん実二次点での値を考える訳にはいかない．しかし Hecke 以来，実二次点とその共役が定める $\mathcal{H}$ 内の測地線にそってモジュラー形式を積分して数論的な量を取り出す，という仕事はなされてきた． 私が考えたこともその線に沿っている． 具体的に説明しよう．

w を実二次無理数とし，$D=\mathrm{disc}(w)>0$ をその判別式，すなわち

$$aw^2+bw+c=0,\ a,b,c\in\mathbf{Z},\ GCD(a,b,c)=1$$

を w が満たす二次方程式とするとき $D=b^2-4ac$ とする．いまモジュラー群 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ の元 $\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ が w を固定するとする：

$$\gamma w=\frac{aw+b}{cw+d}=w.$$

このとき簡単な計算で

$$\frac{\gamma\tau-w}{\gamma\tau-w'}=\varepsilon^2\ \frac{\tau-w}{\tau-w'}\qquad (w'=w\ \text{の共役}),$$

なる式が，ある「単数」ε にたいし成り立つことが分かる．w を固定する γ は無数にあって，それに応じて対応する単数 ε も無数にあるが，それらはすべてある「基本単数」ε_0 によって $\varepsilon=\pm\varepsilon_0^m$ $(m\in\mathbf{Z})$ なる形で書き表されることが知られている．そこで

$$z:=\frac{\tau-w}{\tau-w'}\qquad (\Longleftrightarrow\ \tau=\frac{w-w'z}{1-z})$$

なる変数変換を行うと，

$$j(\tau) = j\left(\frac{w - w'z}{1-z}\right) \text{ は } z \mapsto \varepsilon_0^2 z \text{ で不変}$$

ということが出てくる．よって更に $z = e^u$ とおくと

$$j\left(\frac{w - w'e^u}{1-e^u}\right) \text{ は } u \mapsto u + 2\log\varepsilon_0 \text{ で不変}$$

ということが分かる．そこでこれをフーリエ展開する：

$$j\left(\frac{w - w'e^u}{1-e^u}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{2\pi i n \frac{u}{2\log\varepsilon_0}}.$$

この展開の定数項を取り出して，$j(\tau)$ の w での（「正規化された」）値と思うことにしよう，というのである．実際はある積分の値である．

Definition. $j(\tau)$ の w における「値」

$$\begin{aligned} \mathrm{val}(w) &= a_0 \\ &= \frac{1}{2\log\varepsilon_0}\int_{\sigma_0}^{\sigma_0+2\log\varepsilon_0} j\left(\frac{w-w'e^u}{1-e^u}\right) du. \end{aligned}$$

$(\sigma_0 \in \mathbf{C},\quad 0 < \mathrm{sgn}(w-w')\mathrm{Im}(\sigma_0) < \pi)$　2 番目の等式はコーシーの定理による．

val という記号は Dedekind の 1877 年の論文で $j(\tau)$ の代わりに用いられていた記号を借用している．val は ‘Valenz’（ドイツ語で，辞書には原子価,（染色体の）数価,（言語学での）結合価，とある）．定義からすぐに従う性質として，

Proposition. (基本性質)

1) w_1 と w_2 が $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-同値であれば $\mathrm{val}(w_1) = \mathrm{val}(w_2)$.

2) $\mathrm{val}(w) = \mathrm{val}(w')$.

3) $\overline{\mathrm{val}(w)} = \mathrm{val}(-w')$.

などが分かる．1) より val は実二次点の $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-同値類の一つの不変量を与えているから，この値の数論的性格を問うことは基本的な問題であると思う．

5．観察

序に述べたように，Mathematica で数値積分を実行して $\mathrm{val}(w)$ を計算してみると，いくつかの現象が見えてきた．証明はまだ全くついていない．従って以下の観察として述べられている文章はすべて「と思われる」を補って読んで頂きたい．

観察その 1.　黄金比での値

$$\mathrm{val}((1+\sqrt{5})/2) = 706.324813540\ldots$$

が val(w) のすべての実数値（または実部，絶対値）のうちの最小値になっている． また，val(w) のすべての実数値（実部，絶対値）は区間

$$[706.3248\ldots, 744]$$

に入る．

黄金比 $(1+\sqrt{5})/2$ は判別式 5 で，これが最小である．744 は $j(\tau)$ 無限遠点におけるフーリエ展開の定数項であった．無限遠点は任意の有理数と $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-同値であることを注意しておく．

観察その 2. 一種の「ディオファンタス連続性」．

これは不正確だが，w が（ディオファンタス近似の意味で）有理数に近いと，val(w) は大きくなる，といった現象が観察される．例えば，連分数展開で

$$w=[n]=n+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{\ddots}}}$$

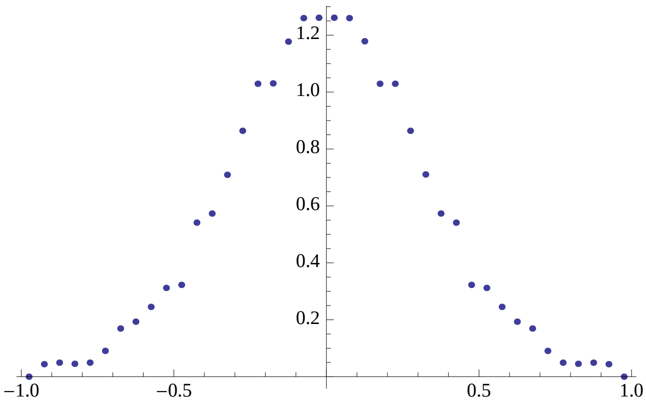
と表される数での値を計算してみると次の表のようになる．$n=1$ の場合が黄金比で，これがある意味で有理数で最も近似されにくい無理数である．

w	D	val(w)	$\log\varepsilon$
[1]	5	706.3248135408125820559603...	0.9624236501192...
[2]	8	709.8928909199123368059253...	1.7627471740390...
[3]	13	713.2227192129106375260272...	2.3895264345742...
[4]	20	715.8658310509644567882877...	2.8872709503576...
[5]	29	717.9165510885627097946754...	3.2944622927421...
[6]	40	719.5292195149241565812037...	3.6368929184641...
[7]	53	720.8247553829016929089184...	3.9314409432993...
[8]	68	721.8878326202869588905005...	4.1894250945222...
[9]	85	722.7768914565219262830724...	4.4186954172306...
[10]	104	723.5327700907464960378584...	4.6248766825455...
[20]	404	727.6296000047325464824629...	5.9964459005959...
[30]	904	729.4314438625732480951697...	6.8046132909611...
[50]	2504	731.2426027524741005593885...	7.8248455312825...
[100]	10004	733.1113065597372736130899...	9.2105403419828...

この表で n が増える，つまり連分数を途中で打ち切った有理近似がよくなるとともに，値は大きくなっていく． この他色々なパターンで実験しても，必ずしも判別式などは単調ではないが val の値は観察 1 で述べた区間内で単調に増加したり減少したりする，という現象が観察される．

観察その 3. val(w) の虚部は常に区間 $(-1,1)$ に入る．

その分布をグラフにすると（判別式約 20000 まで，データ数約 15000）：



区間 $(-1,1)$ に入るということは，何かの固有値としての解釈をもつということであろうか．今のところ皆目見当がつかないが，興味と空想を誘う現象ではある．

$\mathrm{val}(w)$ の最初のいくつかの非実数値を表にする：

w	D	$\mathrm{val}(w)$
$(12+\sqrt{34})/11$	136	$710.60045194400248945\ldots + 0.51979382819610620\ldots i$
$(10+\sqrt{34})/11$	136	$710.60045194400248945\ldots - 0.51979382819610620\ldots i$
$(33+\sqrt{205})/34$	205	$714.16034018225715592\ldots + 0.75363913959038068\ldots i$
$(25+\sqrt{205})/30$	205	$714.16034018225715592\ldots - 0.75363913959038068\ldots i$
$(21+\sqrt{221})/22$	221	$708.90991972070874730\ldots + 0.26703973546028996\ldots i$
$(23+\sqrt{221})/22$	221	$708.90991972070874730\ldots - 0.26703973546028996\ldots i$
$(47+\sqrt{305})/56$	305	$716.13898693848579303\ldots + 0.82184193359696810\ldots i$
$(35+\sqrt{305})/46$	305	$716.13898693848579303\ldots - 0.82184193359696810\ldots i$
$(23+\sqrt{79})/25$	316	$712.65948582687702503\ldots + 0.32545553768732463\ldots i$
$(13+\sqrt{79})/15$	316	$712.65948582687702503\ldots - 0.32545553768732463\ldots i$
$(17+\sqrt{79})/15$	316	$712.65948582687702503\ldots + 0.32545553768732463\ldots i$
$(17+\sqrt{79})/21$	316	$712.65948582687702503\ldots - 0.32545553768732463\ldots i$

次に，マルコフ数（Markoff，確率論のマルコフ過程の Markov と同じ人）に関する実験について記す．マルコフ数の理論は実数の有理数による近似と密接に関係し，上記のような現象から考えて何か面白いことがあるのでは，と思ったのである．まずマルコフの理論を簡単に復習しよう．出発点は次の Hurwitz の定理である．

Theorem. (Hurwitz, 1891) 任意の実無理数 α にたいし，次の不等式を満たすような有理数 p/q が無限に存在する：

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

この定理の定数 $1/\sqrt{5}$ は最良である．しかし，α として $(1+\sqrt{5})/2$ と $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$-同値（一次分数変換で移りあうこと）なものを除外すると，$1/\sqrt{5}$ は $1/\sqrt{8}$ に置き換えることができる．さらに， α が $\sqrt{2}$ と同値でないならば，$1/\sqrt{8}$ は $5/\sqrt{221}$ に置き換えることができる．さらに... と，このプロセスが無限に続くことを示すのがマルコフの定理である．すなわち，「マルコフ数」と呼ばれる数列

$$\{m_i\}_{i=1}^{\infty} = \{1, 2, 5, 13, 29, 34, 89, 169, 194, 233, 433, \ldots\},$$

および付随した二次無理数 θ_i ($\theta_1 = (1+\sqrt{5})/2,\ \theta_2 = \sqrt{2}, \ldots$) と単調増加数列 L_i （3 に収束）があり以下が成り立つ：

Theorem. (Markoff, 1880) 各 i について，実無理数 α が $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{i-1}$ のいずれとも（$\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ の作用で）同値でないならば，

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{L_i q^2}$$

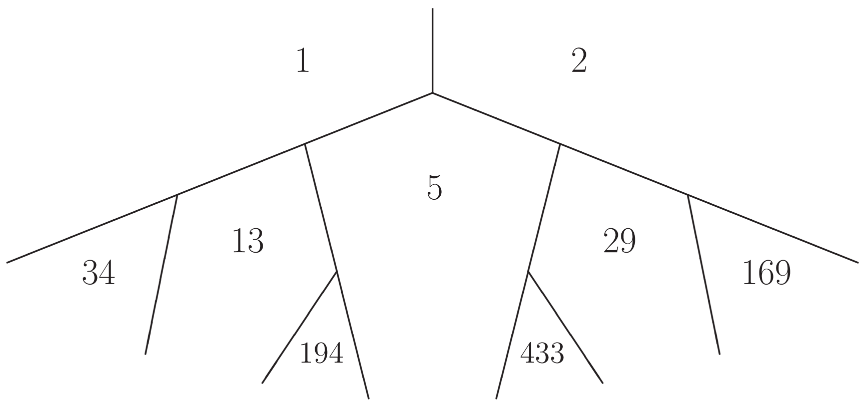
を満たすような有理数 p/q が無限に存在する．

Hurwitz の定理は Markoff の定理に含まれるが，Markoff はディオファンタス近似の言葉ではなく，二次形式の言葉で定理を述べ，Hurwitz は直接に上の形の定理を証明した．

マルコフ数 m_i はディオファンタス方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

の解として現れる数である．この方程式は一つの変数に関しては二次方程式なので，自明な解 $(1,1,1)$ から出発して，二つを固定して二次方程式を解くと新しい解が見つかる．具体的には (p,q,r) が解なら $(p,q,3pq-r)$ と $(p,r,3pr-q)$ が解となっていて，これより解の全体が見つかることが証明出来，マルコフ数全体に tree の構造が入ることが分かる．



一つのマルコフ数はこの tree のただ 1 カ所にのみ現れるか，というのはまだ未解決の問題である．

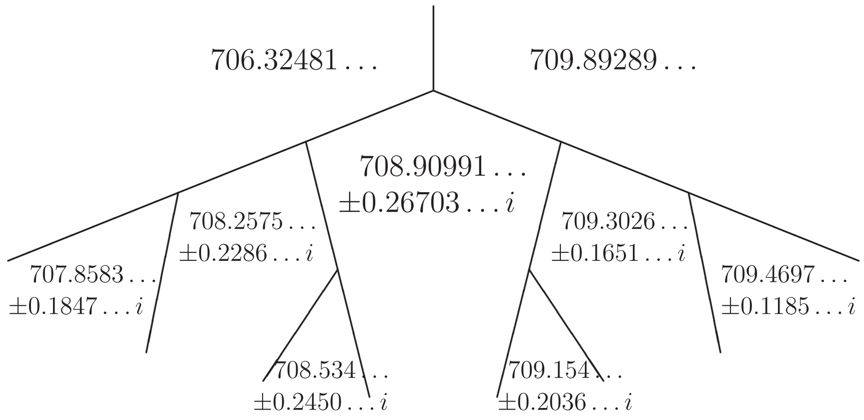
さてマルコフ二次無理数 θ_i（定義は省略したが，解の三つ組みから定まる）についてそこでの val の値を計算し，以下を観察した．

観察その 4. 値が実であるのは

$$\mathrm{val}(\theta_1) = \mathrm{val}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) = 706.32481354\ldots \quad \text{および} \quad \mathrm{val}(\theta_2) = \mathrm{val}(\sqrt{2}) = 709.89289091\ldots$$

に限り，その他の $\mathrm{val}(\theta_i)$ $(i \geq 3)$ は実ではない．

観察その 5. 三つのマルコフ数 m, m', m'' がこの順で，上の tree でいうと $1,2,5$ や $5,2,29$ のような位置関係にあるとし， $\theta, \theta', \theta''$ を付随する二次無理数とする．このとき，θ'' の実，虚部は θ と θ' のそれらの間にある．(虚部の正負の記述に関する予想は略す.)



観察その 6. マルコフ数 m を一つ取ると，マルコフ tree の中で一つの領域 D が定まる．D の辺を下にたどると，隣接した領域のマルコフ数に対応した二次無理数の列 $\{\theta_k^L\}$ および $\{\theta_k^R\}$ が定まる．$\theta^{(m)}$ を m に付随した二次無理数とするとき

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{val}(\theta_k^L) = \mathrm{val}(\theta^{(m)}) \quad \text{かつ} \quad \lim_{k\to\infty} \mathrm{val}(\theta_k^R) = \overline{\mathrm{val}(\theta^{(m)})}.$$

以上，いくつかの観察を記してきたが，その整数論的な意味はまだ全く分かっていない．意味があるのかも分からない有様である．ただ，虚二次点の場合に出てきた $\mathbf{t}(d)$ のような，$\mathrm{val}(w)$ のある種の平均を考えると，それを母関数とするような非正則なモジュラー関数が存在することを最近 W. Duke, Ö. Imamoḡl, Á. Tóth の三人がプレプリント "Cycle integrals of the j-function and weakly harmonic modular forms" (2008) の中で示している．何かが奥に存在することを予感させる仕事である．今後の成り行きに乞うご期待，と言いたいところだが，さて如何相成りましょうや．

（終わり）