分割数の漸近公式と円周法

金子昌信 （九州大学）

高瀬幸一氏の稿の最後に触れられている，Hardy-Ramanujan による分割数 $p(n)$ の漸近公式 [3] とは次のものである．

$$p(n)=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\sum_{1\le k<\alpha\sqrt{n}}\sqrt{k}A_k(n)\frac{d}{dn}\left(\frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\pi}{k}\lambda_n\right)-1}{\lambda_n}\right)+O(n^{-1/4}). \tag{1}$$

ここに，α は適当な正の定数，$A_k(n)$ はある指数和（最後に述べる），$\lambda_n=\sqrt{n-1/24}$ であり，和は自然数 $k=1,2,\ldots$ をわたる有限和である．ことさらに微分の形で書かずともよいようなものだが，微分を実行すると形がきたなくなってしまう．はじめの $k=1$ の項が主要項で，$A_1(n)=1$ となっているので，ここから（微分を計算して主要部を取り出すと）高瀬氏の稿で説明された第一近似

$$p(n)\sim\frac{e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\pi\sqrt{n}}}{4\sqrt{3}n}$$

が出てくる．Hardy-Ramanujan の原論文 [3] には (1) を用いた $p(100)$ と $p(200)$ の計算例が載っている．それによると，$p(100)=190569292$ が正確な値であるところ，この漸近公式の第 6 項までをとるだけで，

$$\begin{array}{r}
190568944.7834510\cdots\\
348.8716810\cdots\\
-2.5981438\cdots\\
0.6858607\cdots\\
0.3185204\cdots\\
-0.0644104\cdots\\
\hline
190569291.9969589\cdots
\end{array}$$

という近似値が得られる.（彼らは小数点以下 3 桁までを書いているが，手元のパソコンでもう少し先まで計算してみた.）$p(200)$ については第 8 項までをとって，

$$\begin{array}{r}
3972998993185.8957976\cdots\\
36282.9785417\cdots\\
-87.5840014\cdots\\
5.1466814\cdots\\
1.4245376\cdots\\
0.0710870\cdots\\
0.0\\
0.0438255\cdots\\
\hline
3972999029387.9764696\cdots
\end{array}$$

実際の値は $p(200) = 3972999029388$ である．論文には 8 項までの和の誤差は 0.004 だと書いてあるが，3 項目の計算がどうやら違っているようである（論文に書いてある値は -87.555）．第 9 項まで取ると $3972999029388.0024093\cdots$ となる．ちなみに第 7 項は $A_7(200) = 0$ であるため，0 である．いずれにしても，これはかなりよい近似であると言えよう． 実際 Hardy [2] によると，MacMahon （映画にもちょっと意地悪な役どころで登場する）が $p(200)$ の値を，漸近式ではなく漸「化」式を使って，具体的に求めていたため，近似公式のテストケースとして実際に比べてみたところ，思いがけない良い精度で近似値を与えることがわかり驚いた，というのが真相のようである．MacMahon の数表がなかったら途中でやめていただろう，とも書いている．

分割数は整数であるから，近似計算の誤差がきちんと評価できて，誤差項が絶対値 1/2 未満に抑えられれば，$p(n)$ の正確な値が特定できることになる． 彼らは，n に対して $\sqrt{n}$ 程度の個数の項を持ってきて和を取ればそれが実現できることを示した（ただしすべてを effective に与えているわけではない）．漸近的な公式であると同時に，正確な値を与えうる，稀な公式の一つであると Hardy [2] が言うのももっともである． この漸近公式が収束級数を与えるか，すなわち，n を固定したときの無限級数

$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{k}A_k(n)\frac{d}{dn}\left(\frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\pi}{k}\lambda_n\right)-1}{\lambda_n}\right)$$

が収束するか，またするなら $p(n)$ に収束するのか，については，彼らの論文にはそれは分からないと書いてある．これは後に Lehmer が 1937 年に，漸近公式がしばしばそうであるように，収束はしないということを証明した [4]．ところが同じ 1937 年，Rademacher は，$p(n)$ に収束する次の公式を証明した．

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{k}A_k(n)\frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\pi}{k}\lambda_n\right)}{\lambda_n}\right). \tag{2}$$

微分記号の中身を少し変えるだけで，収束級数が得られたのである． Rademacher は Hardy-Ramanujan の仕事についての講義ノートを準備しているときにこの公式を得たらしい． そしてほぼ同じ頃，Selberg も，Hardy-Ramanujan の論文を自分なりに理解しようとして，同じ公式にたどり着いていた [7]．彼は，この論文を徹底的に調べたのは出版以来 Rademacher と自分しかいないのではないか，と書いている．論考 [7] の中で Selberg は，なぜ Hardy と Ramanujan が Rademacher （と自分）の公式 (2) を見つけることが出来なかったのか，について考察していて面白い．彼の結論は，それは Hardy が悪いのだ，というのである． 少しその論じるところを紹介してみよう．

まず彼（Selberg）は，Ramanujan がかつて Hardy に，古典的な Jacobi のテータ級数の逆数

$$\frac{1}{1-2x+2x^4-2x^9+\cdots} = \frac{1}{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{n^2}}$$

の x^n の係数が漸近的に

$$\frac{1}{4n}\left(\cosh\pi\sqrt{n} - \frac{\sinh\pi\sqrt{n}}{\pi\sqrt{n}}\right)$$

に等しいことを書き送っていることを指摘する（1913 年 1 月と 2 月の 2 通の手紙）．そして，この式は

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh \pi\sqrt{n}}{2\pi\sqrt{n}}\right) \tag{3}$$

とも書けることを注意する．確かにこれは Rademacher の公式に現れる式とそっくりである．高瀬氏の項にあるように，分割数の母関数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \tag{4}$$

は逆数

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots} \tag{5}$$

に等しく，分母の $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots$ に $x^{1/24}$ を掛けたものは $x = q = e^{2\pi i\tau}$ として複素上半平面上 τ の関数と見ると， Dedekind のエータ関数

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n),$$

すなわち重さ 1/2 のモジュラー形式となるのであった．この 1/24 というのが，公式に現れる $\lambda_n = \sqrt{n-1/24}$ の 1/24 に対応する．しかも Euler の 5 角数定理によれば，$\eta(\tau)$ もテータ級数としての表示を持つ．

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} - q^{\frac{25}{24}} - q^{\frac{49}{24}} + q^{\frac{121}{24}} + q^{\frac{169}{24}} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\chi(n)q^{\frac{n^2}{24}}.$$

ここに

$$\chi(n) = \begin{cases} 1, & n \equiv \pm 1 \pmod{12}, \\ -1, & n \equiv \pm 5 \pmod{12}, \\ 0, & (n, 12) > 1 \end{cases}$$

は 12 を法とする指標である． Ramanujan がどういう方法で (3) に導かれたか確たることは言えないものの，おそらくそれはテータの変換項公式であり，同じくテータ級数でもある $p(n)$ の母関数の場合に同じことを考えなかったのは不思議だ，と，Selberg は考えたのである．もう少し Selberg の言うところを見ると，Hardy-Ramanujan の論文で cosh を含む項は，補助関数

$$F_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_a(n)x^n,$$

ここに

$$\psi_a(n) = \frac{d}{dn}\left(\frac{\cosh(a\lambda_n) - 1}{\lambda_n}\right), \quad a > 0,$$

として現れる．この関数が $f(x)$ の特異点である 1 のべき根での振る舞いをよく近似するのである．Selberg には，彼らが何故 $\psi_a(n)$ の代わりに

$$\psi_a^*(n) = \frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh(a\lambda_n)}{\lambda_n}\right), \quad a > 0$$

を取らなかったのかが不思議でならなかった． こうした方が関数 $F_a(x)$ の性質もよいし，近似もよくなるからである．また，Selberg の証明も同等であったろう Rademacher の証明を見る限りでも，sinh の方が自然に出てくる．Hardy-Ramanujan では補助関数 $F_a(x)$ が言わば天下り的に与えられている．なぜそこで $\psi_a(n)$ を採ったか，途中の計算で出てくるある積分値が明示的に求まることがその理由だろうと Selberg は推測しているが，それは本筋からはややそれたものであった． いずれにせよ，何か自然でないところがあって，そこをもっと理解しようとして，Rademacher も Selberg も，同じ公式に自然とたどり着いたのであろう．そして Selberg は，Hardy-Ramanujan がたどり着けなかった原因を，まずもって Hardy は近似式でない，exact な公式の存在を信じていなかったからだろう，と推測する．さらには，Ramanujan がかつて Jacobi テータで似た式にたどり着いていたのに，$p(n)$ の研究でそれを思い出さなかったらしいのは，Hardy にミスリードされたか，病気のせいで本来の力が発揮されていなかったのではないか，と書いている．もしそれを思い出して，Hardy に $\psi_a^*(n)$ の方を使うことを提案すれば，Hardy なら直ちにその重要性を理解し，正しく公式 (2) にたどり着いたろう，というのが Selberg の結論である．

さて円周法である．何かゴシップめいた話で紙幅をずいぶん費やしてしまったが，紙幅に余裕があったとしても，円周法をまともに解説しようとするとどうしても本誌の記事としては技術的になりすぎると思うので，ごく簡単にアイデアだけを説明することでお許し願いたい． Apostol の本 [1] の第 5 章に，Rademacher のアイデアに従った公式 (2) の証明が紹介されている．これはもとの証明を Rademacher がさらに洗練して，Ford circle というもので積分路を構成し，誤差項の評価がずっとやさしくなっている．ご一読をお勧めしたい．

漸近公式 (1)，あるいは公式 (2) の証明の出発点は Cauchy の積分公式

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(x)}{x^{n+1}}\,dx$$

である．ここに $f(x)$ は母関数 (4) であり，積分路 C は原点を中心とする半径が 1 より小さい反時計回りの円周である．さて，$f(x)$ を無限積で書いたとき (5) の各因子の特異点である，1 のべき根に x が近づくと，$f(x)$ は無限大に発散していく．そうすると，積分路 C の半径を 1 に近づけていくことを考えると，1 のべき根近くでの積分の寄与が見るべきものだろうということになる．そこで Hardy-Ramanujan は，N を固定したときの，分母の大きさが N 以下の既約分数を並べ（Farey series），各分数の前後に，Farey series の理論から自然に決まる幅を取って $[0,1]$ 区間を分割する．そして，積分路 C をこの区間分割に対応して分割する．(円周を $re^{2\pi i\theta}$ としたとき, θ の動く区間 $[0,1]$ を分割するのである.） このとき，$e^{2\pi ih/k}$ を含む積分路での積分の様子を見る際に，$\eta(\tau)$ の変換公式を使って，近似関数を導き出すのである．つまり，高瀬氏の稿で紹介されている，重さ 1/2 のモジュラー形式としての $\eta(\tau)$ の変換公式は，各分数 h/k について次のような $f(x)$ の変換式に書き換えることが出来る：

$$f\left(e^{2\pi i\left(\frac{h}{k}+z\right)}\right) = \omega_{h,k}\sqrt{\frac{kz}{i}}\,e^{\frac{\pi i}{12}\left(\frac{1}{k^2 z}+z\right)} f\left(e^{2\pi i\left(\frac{h'}{k}-\frac{1}{k^2 z}\right)}\right).$$

ここで，$k \geq 1$ は整数，h は $0 < h \leq k$, $(h,k)=1$ なる整数，h' は $hh' \equiv -1 \pmod{k}$ となる整数を選ぶ．$\omega_{h,k}$ は高瀬氏の記号で $e^{\pi i s(h,k)}$ に等しい 1 のべき根であり，z は複素上半平面上

の変数である．z を例えば虚軸上で 0 に近づけると，左辺は $f(e^{2\pi ih/k})$ に近づくが，右辺の f の中身は急速に 0 に近づくので，この f の部分を 1 で置き換えたものが左辺のよい近似を与える．そしてそれは初等的な関数であり，積分が実行できて，sinh の式が導き出されるという仕組みである．近似で切り捨てた部分はちゃんと評価が出来て，Rademacher の公式 (2) が証明される．公式の中の $A_k(n)$ は，

$$A_k(n) = \sum_{h \bmod k} \omega_{h,k} e^{-2\pi i \frac{hn}{k}}$$

という形で現れる．Selberg はこれについても，

$$A_k(n) = \sqrt{\frac{k}{3}} \sum_{\substack{l \bmod 2k \\ \frac{3l^2-l}{2} \equiv -n \bmod k}} (-1)^l \cos \frac{6l-1}{6k}\pi$$

なる公式を得ており（計算にはずっと便利だ，と），Ramanujan がこのような表示式に至らなかったのが不思議であり，やはり Ramanujan の力のピークが過ぎていたのか？などとの推測を書いている．Selberg の文章 [7] は付録だけでなく本体も興味深いもので，これも一読をお勧めしたい．

参考文献

[1] T. Apostol: Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer.

[2] G. H. Hardy: Ramanujan, Aemr. Math. Soc., Chelsea, Providence, RI, 1999.

[3] G. H. Hardy and S. Ramanujan: Asymptotic formulae in combinatory analysis, Proc. London Math. Soc. 17 (1918), 75–115. Ramanujan 全集 [6] に所収.

[4] D. H. Lehmer: On the Hardy-Ramanujan series for the partition function, J. London Math. Soc., 12 (1937), 171–176.

[5] H. Rademacher: On the partition function $p(n)$, Proc. London Math. Soc., 43 (1937), 241–254.

[6] S. Ramanujan: Collected Papers, Amer. Math. Soc., Chelsea, Providence, RI, 1999.

[7] A. Selberg: Appendix to “Reflections around the Ramanujan centenary”: Collected Papers, vol. 1, no. 41, Springer, 1989.