アイゼンシュタインの三角関数

金子昌信 （九州大学）

アイゼンシュタインは 1823 年生まれのドイツの数学者で，その短い生涯（29 歳で没）において，整数論，楕円関数論などで顕著な業績をあげた．アイゼンシュタイン級数，アイゼンシュタインの相互法則，アイゼンシュタインの既約性判定条件，などにその名前が残っており，ガウスがその才能を非常に高く評価していたという話が伝わっている．アイゼンシュタインは 1846 年から 47 年にかけて，「楕円関数論への寄与」という題名のもとに一連の論文を発表しており，ここに紹介するのはその 6 番目（最後），連作中最も長い論文 [1] の中に書かれた，彼独自の方法による三角関数の諸公式の導き方である．

楕円関数論は 1820 年代の終わり頃にアーベル，ヤコビによってその基礎が築かれた．現在楕円関数を導入するのに一番標準的なのはワイエルシュトラスによる方法（いわゆるワイエルシュトラスの $\wp$ 関数）であるが，それが最初に公にされたのはアイゼンシュタインの没後 10 年ほどもたった頃のことである．アイゼンシュタインの楕円関数論は，ワイエルシュトラスのそれとは異なり，複素関数論を使わない．周期関数であることが明らかであるような無限級数を出発点にとって，代数的にいろいろな関係式を導いていく． 論文 [1] では 15 ページばかりを割いて，まずその方法で三角関数の基本的な性質を導き楕円関数論への準備としている．後年，ヴェイユがこの方法による楕円関数論を取り上げ，本 [2] を書いた．その本も準備としての三角関数の章から始まっている．この小文でアイゼンシュタインの仕事のすべてを紹介するのは困難なので，興味を持たれた読者は，もちろんアイゼンシュタインの原論文にあたって頂くのもよいが，ドイツ語であるし，より手に取りやすいヴェイユの著書を参考にして頂くとよろしいかと思う．

三角関数や楕円関数は周期関数の一つである．ある群の作用，たとえば整数全体 $\mathbf{Z}$ による平行移動 $x \to x+n \quad (n \in \mathbf{Z})$, で不変な関数を構成したければ，適当な関数 $g(x)$ を取ってきて和

$$f(x) := \sum_{m \in \mathbf{Z}} g(x+m)$$

を作ると，これが仮に絶対収束していれば，任意に固定された整数 n に対して，m が整数全体をわたるとき $n+m$ もやはり整数全体を動くので，$f(x+n) = f(x)$ がすべての $n \in \mathbf{Z}$ について成り立つ．アイゼンシュタインはこの原理を $g(x) = x^{-n}$ に適用し三角関数を構成していく．すなわち彼が基礎に取るのは，n を整数 $\geqq 1$ とするときの級数

$$\varepsilon_n(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (x+m)^{-n}$$

である．アイゼンシュタインはこれを (n, x) と書いているが，ここではヴェイユの記号にならうとする．これは $n=1$ ならば絶対収束しないが（$n \geqq 2$ ならば絶対収束である），その場合は

$$\varepsilon_1(x) = \lim_{M \to +\infty} \sum_{m=-M}^{M} \frac{1}{x+m}$$

と定義する．すなわち

$$ve_1(x) = \frac{1}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-m} + \frac{1}{x+m} \right)$$

である．絶対収束である $n \geqq 2$ の場合は明らかに，また $\varepsilon_1(x)$ に関しても簡単に，$\varepsilon_n(x)$ が周期 1 をもつ周期関数であることが分かる．

　さて，彼は恒等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{p^2q^2} &= \frac{1}{(p+q)^2}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)\\ &+ \frac{2}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\end{aligned} \tag{1}$$

を考える．p と q は独立な変数である．この式は右辺を通分すれば簡単に確かめられるが，後で用いる，より簡単な恒等式

$$\frac{1}{pq} = \frac{1}{p+q}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) \tag{2}$$

を p および q で微分して得られる式である．式 (1) で $p = x+m,\ q = -x-n$ とおいて得られる

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(x+m)^2(x+n)^2}\\ =\ &\frac{1}{(m-n)^2}\left(\frac{1}{(x+m)^2}+\frac{1}{(x+n)^2}\right)\\ +\ &\frac{2}{(m-n)^3}\left(\frac{1}{x+m}-\frac{1}{x+n}\right)\end{aligned}$$

において，m, n を $m \neq n$ となる整数全体を走らせた和をとることを考える．左辺は絶対収束して，$\varepsilon_2(x)^2 - \varepsilon_4(x)$ となることは見やすい．$m = n$ のときに出てくる $\varepsilon_4(x)$ を積

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}\frac{1}{(x+m)^2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\frac{1}{(x+n)^2} = \sum_{m,n\in\mathbf{Z}}\frac{1}{(x+m)^2(x+n)^2}$$

から引いているのである．そこで，左辺が和の順序によらないので，右辺を特定の和の取り方を考えることで計算する．すなわち，$m - n = m'$ とおいて右辺を

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m'^2}\left(\frac{1}{(x+m'+n)^2}+\frac{1}{(x+n)^2}\right)\\ +\ &\frac{2}{m'^3}\left(\frac{1}{x+m'+n}-\frac{1}{x+n}\right)\end{aligned}$$

と書き，$m' \neq 0$ である整数 m', n 全体にわたる和として考える．m' を固定して n 全体の和を考えると，いずれも絶対収束する和

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}\left(\frac{1}{(x+m'+n)^2}+\frac{1}{(x+n)^2}\right)$$

および

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}\left(\frac{1}{x+m'+n}-\frac{1}{x+n}\right)$$

から $\varepsilon_2(x+m')+\varepsilon_2(x)$ および $\varepsilon_1(x+m')-\varepsilon_1(x)$ が出てくるが，$\varepsilon_2(x), \varepsilon_1(x)$ の周期性からこれらはそれぞれ $2\varepsilon_2(x)$ および 0 となる．したがって，そののち $m' \neq 0$ に関する和をとれば，全体は $4\zeta(2)\varepsilon_2(x)$ となり，等式

$$\varepsilon_2(x)^2 - \varepsilon_4(x) = 4\zeta(2)\varepsilon_2(x) \tag{3}$$

を得る． ここに

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

であり，この値が $\pi^2/6$ に等しいことは周知の事実であろう．

次に (1) において $p = x + m, q = n$ として得られる

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(x+m)^2} \cdot \frac{1}{n^2} \\
= & \frac{1}{(x+m')^2} \left(\frac{1}{(x+m'-n)^2} + \frac{1}{n^2} \right) \\
+ & \frac{2}{(x+m')^3} \left(\frac{1}{x+m'-n} + \frac{1}{n} \right)
\end{aligned}$$

において，$n \neq 0$ なる整数 m, n 全体にわたる和をとる．ここで $m + n = m'$ とおいた．左辺は絶対収束して $2\zeta(2)\varepsilon_2(x)$ となる．そこで右辺をまず n に関する和

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N}$$

をとり，次に m' に関する和をとれば，n に関する和が

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(x+m')^2} \left(\varepsilon_2(x+m') - \frac{1}{(x+m')^2} + 2\zeta(2) \right) \\
+ & \frac{2}{(x+m')^3} \left(\varepsilon_1(x+m') - \frac{1}{x+m'} \right)
\end{aligned}$$

となるので，$\varepsilon_n(x)$ の周期性を用い，m' に関する和をとれば

$$\varepsilon_2(x)^2 - 3\varepsilon_4(x) + 2\zeta(2)\varepsilon_2(x) + 2\varepsilon_1(x)\varepsilon_3(x)$$

を得る．従って，$2\zeta(2)\varepsilon_2(x)$ は両辺打ち消しあって

$$3\varepsilon_4(x) = \varepsilon_2(x)^2 + 2\varepsilon_1(x)\varepsilon_3(x) \tag{4}$$

という等式が導かれた．

さて，$\varepsilon_n(x)$ を定義する級数の項別微分は絶対収束しない $\varepsilon_1(x)$ の場合も正当化できて，$n \geqq 1$ に対し微分公式

$$\varepsilon_n'(x) = -n\,\varepsilon_{n+1}(x)$$

が成り立つ．これより

$$\varepsilon_2(x) = -\varepsilon_1'(x),\ \varepsilon_3(x) = \frac{1}{2}\varepsilon_1''(x),\ \varepsilon_4 = -\frac{1}{6}\varepsilon_1'''(x)$$

となるので，等式 (3), (4) を $y = \varepsilon_1(x)$ の微分の間の関係式

$$\begin{aligned}
{y'}^2 + \frac{1}{6}y''' &= -4\zeta(2)y', \qquad (5) \\
-\frac{1}{2}y''' &= {y'}^2 + yy''
\end{aligned}$$

に書き換えることが出来て，この二つから y''' を消去して

$$yy'' = 2y'^2 + 2\pi^2 y' \tag{6}$$

を得る．ここで $\zeta(2) = \pi^2/6$ を用いた．この式をさらに一回微分して，出てくる y''' を式 (5) を使って消去，整理すると

$$(y'' + 2yy')(3y' + 2\pi^2) = 0$$

が得られる．$y' = -\varepsilon_2(x)$ は定数関数ではないので，これから

$$y'' = -2yy', \tag{7}$$

これと (6) から y'' を消去して

$$y' = -y^2 - \pi^2 \tag{8}$$

という微分方程式が得られた．アイゼンシュタインは，$y = \varepsilon_1(x)$ がこの微分方程式の，$x = 1/2$ で 0 になる解であることから（$\varepsilon_1(x)$ は周期 1 を持ち奇関数であることから $\varepsilon_1(1/2) = \varepsilon_1(-1/2) = -\varepsilon_1(1/2)$, よって $\varepsilon_1(1/2) = 0$ となる），

$$\varepsilon_1(x) = \pi \cot \pi x$$

を結論づけている（上の微分方程式は 1 階の求積出来る微分方程式である）．これより微分によって

$$\varepsilon_2(x) = \pi^2(1 + \cot^2 \pi x) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}$$

や

$$\varepsilon_3(x) = \pi^3 \frac{\cos \pi x}{\sin^3 \pi x}$$

などが得られる． ちなみに式 (7) は

$$\varepsilon_3(x) = \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$$

とも書けることに注意しておく．

三角関数で重要なのは加法公式であるが，アイゼンシュタインはそれを (2) をもとにおおよそ次のようにして導く．(2) 式で (p, q) を順に $(x+m, y+n-m), (x+m-n, y-n), (x+m, -x-m+n), (y-n, -y-n+m)$ として得られる式を辺々足し合わせ整理することで導かれる式

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{x+m} + \frac{1}{y-m}\right)\left(\frac{1}{x+m-n} + \frac{1}{y+n-m}\right) \\
=\ & \frac{1}{x+y+n}\left(\frac{1}{x+m} + \frac{1}{y+n-m}\right) \\
+\ & \frac{1}{x+y-n}\left(\frac{1}{x+m-n} + \frac{1}{y-m}\right) \\
+\ & \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x+m-n} - \frac{1}{x+m} + \frac{1}{y-m} - \frac{1}{y+n-m}\right)
\end{aligned}$$

において，まず m について和をとり，つづいて n についての和をとることで

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_1(y))^2 \\
=\ & 2\varepsilon_1(x+y)(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_1(y)) + \varepsilon_2(x) + \varepsilon_2(y)
\end{aligned}$$

を得る．($n=0$ のとき別の項を考えねばならないが，それは省略する．[2] を参照のこと．) $\varepsilon_2(x) = -\varepsilon_1'(x) = \varepsilon_1(x)^2 + \pi^2$ であるからこれは

$$2\varepsilon_1(x)\varepsilon_1(y) = 2\varepsilon_1(x+y)(\varepsilon_1(x)+\varepsilon_1(y)) + 2\pi^2,$$

すなわち

$$\varepsilon_1(x+y) = \frac{\varepsilon_1(x)\varepsilon_1(y) - \pi^2}{\varepsilon_1(x)+\varepsilon_1(y)} \tag{9}$$

となり，cot に直せばその加法公式

$$\cot(x+y) = \frac{\cot(x)\cot(y) - 1}{\cot(x)+\cot(y)}$$

が得られた．

今関数 $\mathbf{e}(x)$ を

$$\mathbf{e}(x) = \frac{\varepsilon_1(x)+\pi i}{\varepsilon_1(x)-\pi i} \tag{10}$$

で定義すると，加法公式 (9) より

$$\mathbf{e}(x+y) = \mathbf{e}(x)\mathbf{e}(y)$$

がわかる． このことと $\mathbf{e}(x)$ の $x=0$ での展開が $1+2\pi ix$ で始まることから，

$$\mathbf{e}(x) = e^{2\pi ix}$$

が結論づけられる．

式 (10) を $\varepsilon_1(x)$ について解くと

$$\varepsilon_1(x) = \pi i \frac{\mathbf{e}(x)+1}{\mathbf{e}(x)-1}$$

であるが，左辺を，その定義において $|x|<1$ に対し $(x+m)^{-1}$ を x の冪級数に展開することで得られる，$0<|x|<1$ で収束する冪級数

$$\varepsilon_1(x) = \frac{1}{x} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\zeta(2n)x^{2n-1}$$

と，ベルヌーイ数 B_n の定義母関数

$$\frac{xe^x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

から

$$\frac{1}{2}\left(\frac{xe^x}{e^x-1} + \frac{-xe^{-x}}{e^{-x}-1}\right) = \frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1}$$

を使い変形して得られる右辺の級数展開

$$\pi i \frac{\mathbf{e}(x)+1}{\mathbf{e}(x)-1} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2\pi)^{2n}B_{2n}\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$$

を比べることで，

$$\zeta(2n) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1}}{2}(2\pi)^{2n}\frac{B_{2n}}{(2n)!}$$

が得られる，というのがヴェイユの本に書いてある注意である．

アイゼンシュタインは，(2) を次々に微分して得られる恒等式から得られるような $\varepsilon_n(x)$ の間の代数関係式や，sin の無限積展開とその変種などについても触れていて，それらについてもヴェイユは彼流に記述の順や証明方法を変えたりしながら論じている．またヴェイユは，微分方程式 (8) を出発点にとって，その特定の解を $\cot x$ の定義として採用することで三角関数論を一から組み立てる方法を短くスケッチしている．そのとき $\sin x$ は

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cot\frac{x+\pi}{2}$$

で導入され，これはまた $\varepsilon_1(x)$ の級数表示によれば

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \lim_{M\to\infty}\sum_{m=-M}^{M}\frac{(-1)^m}{x+m}$$

とも書き表される． 紙数が尽きてしまったので，これらについても興味のある読者は [2] をご覧頂きたい．

参考文献

[1] G. Eisenstein, *Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind, und der mit ihnen zusammenhangenden Doppelreihen*, Crelle Journal, **35** (1847), 153–274. （Mathematische Werke, Band 1, 357–478. ）

[2] A. Weil, Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker, Springer （邦訳：アイゼンシュタインとクロネッカーによる楕円関数論，シュプリンガー数学クラシックス）

[かねこまさのぶ]