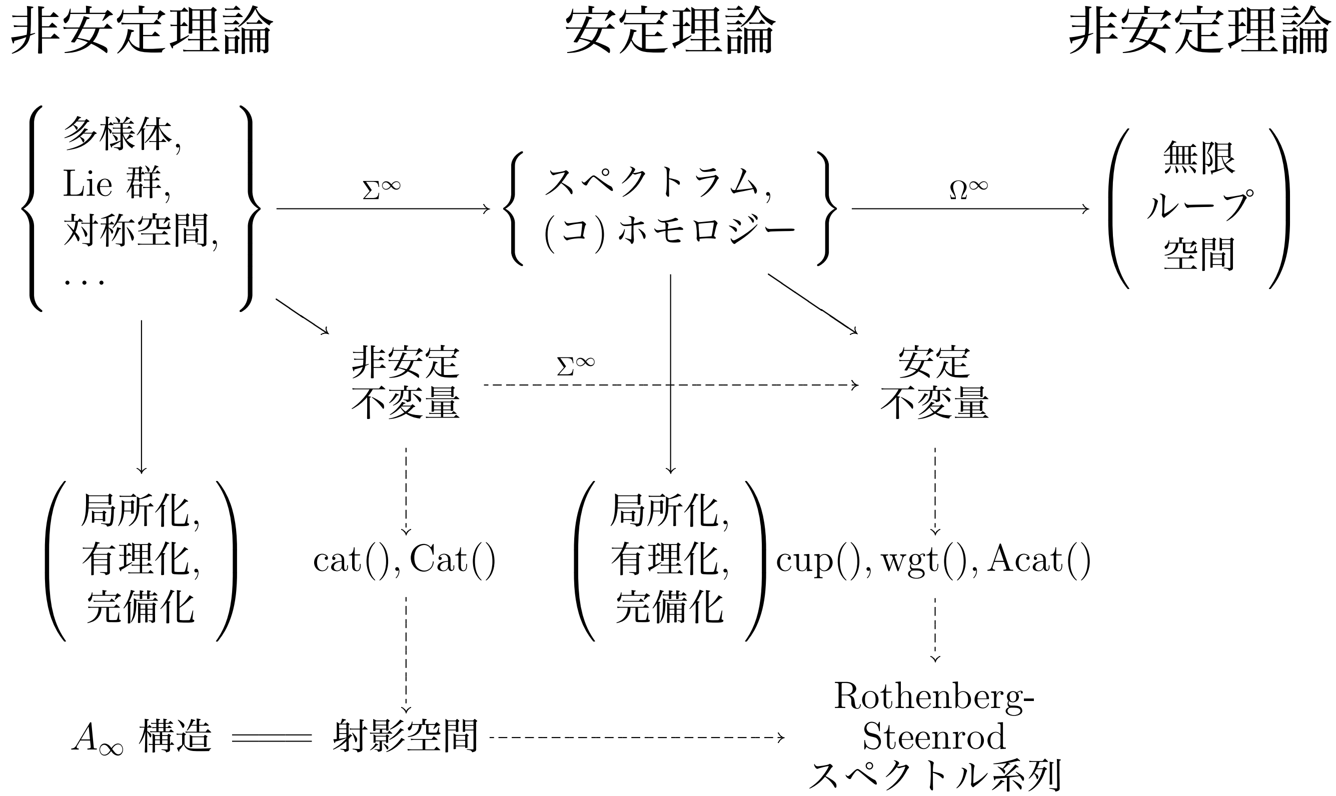
L-S CATEGORY OF CLOSED MANIFOLDS

『一般及び幾何学的トポロジーと関連する諸問題』
京都大学数理解析研究所, 京都
17th〜19th, November, 2003

岩瀬 則夫
(九州大学)



問題 [Ganea, 1971, (全15題) [19]]

1. 多様体の L-S category を計算せよ。 例えば Lie 群、Stiefel 多様体、etc.$\cdots$

2. $\mathrm{cat}(X \times S^n) = \mathrm{cat}(X) + 1$ である。 これは正しいか?

4. 球面上の球面束の LS category を束の特性写像のホモトピー不変量によって記述せよ。

1 Lusternik-Schnirelmann category

定義 1.1

$$\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists\{A_0, ..., A_m\,;\ \text{closed in } X\} \\ X = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{m} A_i,\ \begin{array}{l}\text{each } U_i \text{ is contractible} \\ \underline{\textit{in}}\ X\end{array} \end{array} \right\}$$

定理 1.2 (Lusternik-Schnirelmann [38])

閉多様体 M 上定義されたいかなる C^∞-写像も $\mathrm{cat}(M)+1$ 個以上の *critical points* を持つ。

1.1 「強い」猫たち

以下の位相不変量 $g\mathrm{cat}\,X$ も同様に定義されるが、R. H. Fox によってホモトピー不変でないことが知られている。さらに Ganea によってこれをホモトピー不変となるように変更した不変量 $\mathrm{Cat}(X)$ が与えられた。

$$g\mathrm{cat}\,X = \mathrm{Min}\left\{ m \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists\{A_0, ..., A_m\,;\ \text{closed in } X\} \\ X = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{m} A_i,\ \text{each } A_i \text{ is contractible} \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{Cat}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, \exists_{\{Y(\simeq X)\}}\, g\mathrm{cat}\,Y = m \right\}$$

定理 1.3 (Ganea [17])

$$\mathrm{Cat}(X) - 1 \leq \mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{Cat}(X) \leq g\mathrm{cat}\,X.$$

定義 1.4 (Ganea [17]) 位相空間Xに対して、CW複体の連続写像の集合$\{h_n : A_n \to Y_n \;\; m \geq n \geq 0\}$で、$Y_0 = \{*\}$と$Y_{n+1} = C(h_n) \supset Y_n$ $(m-1 \geq n)$をみたし$Y_m \simeq X$となるものをすべて考える。各々の集合はいったいいくつの写像からなるのであろうか？　その最少数から1を引いた数を$\mathrm{Cone}(X)$で表す。　また空間Xに対するこのような表示を*cone*分解などと呼ぶ。

定理 1.5 (Ganea [17])　$\mathrm{Cone}(X) = \mathrm{Cat}(X)$である。

事実 1.6 *(1)* $\mathrm{cat}(\{*\}) = 0$である。

(2) $\mathrm{cat}(S^n) = 1$である。一般に$\mathrm{cat}(\Sigma V) \leq 1$である。

(3) XがYを支配すれば、$\mathrm{cat}(X) \geq \mathrm{cat}(Y)$である。特に、$X$が$Y$とホモトピー同値なら$\mathrm{cat}(X) = \mathrm{cat}(Y)$である。

*(4) (Varadarajan [57], Hardie [21]) Fibre*束(E, p, B, F)は$\mathrm{cat}(E){+}1 \leq (\mathrm{cat}(F){+}1){\cdot}(\mathrm{cat}(B){+}1)$をみたす。

(5) (Fox [16]) $\mathrm{cat}(X{\times}Y) \leq \mathrm{cat}(X){+}\,\mathrm{cat}(Y)$である。

(6) (Takens [53]) $\mathrm{Cat}(X{\times}Y) \leq \mathrm{Cat}(X){+}\,\mathrm{Cat}(Y)$である。

例 1.7 *(1)* $X = S^n$: $\quad S^{n-1} \to \{*\} \hookrightarrow S^n, \quad \mathrm{Cat}(S^n) = 1.$

(2) $X = \mathbb{F}P^m$: $\quad (\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *or* $\mathbb{H}, d = \dim \mathbb{F})$

$$S^{d-1} \to \{*\} \hookrightarrow S^d = \mathbb{F}P^1, \;\; S^{2d-1} \to \mathbb{F}P^1 \hookrightarrow \mathbb{F}P^2,$$

$$\cdots, \;\; S^{md-1} \to \mathbb{F}P^{m-1} \hookrightarrow \mathbb{F}P^m, \quad \mathrm{Cat}(\mathbb{F}P^m) = m.$$

(3) $X = \mathrm{SU}(3)$: $\quad \mathbb{C}P^2 \to \{*\} \hookrightarrow S^3 \cup_{\eta_3} e^5 = \mathrm{SU}(3)^{(5)},$

$$S^7 \to \mathrm{SU}(3)^{(5)} \hookrightarrow \mathrm{SU}(3), \quad \mathrm{Cat}(\mathrm{SU}(3)) = 2.$$

(4) $X = \mathrm{Sp}(2)$: $\quad S^2 \to \{*\} \hookrightarrow S^3 = \mathrm{Sp}(2)^{(3)},$

$$S^6 \to \mathrm{Sp}(2)^{(3)} \hookrightarrow \mathrm{Sp}(2)^{(3)} \cup e^7 = \mathrm{Sp}(2)^{(7)},$$

$$S^9 \to \mathrm{Sp}(2)^{(7)} \hookrightarrow \mathrm{Sp}(2), \quad \mathrm{Cat}(\mathrm{Sp}(2)) = 3.$$

(5) $X = \mathrm{G}_2$: $\quad \mathbb{C}P^2 \to \{*\} \hookrightarrow S^3 \cup_{\eta_3} e^5 = {\mathrm{G}_2}^{(5)},$

$$(S^5 \vee e^7) \to {\mathrm{G}_2}^{(5)} \hookrightarrow {\mathrm{G}_2}^{(5)} \cup (e^6 \vee e^8) = {\mathrm{G}_2}^{(8)},$$

$$(S^8 \vee e^{10}) \to {\mathrm{G}_2}^{(8)} \hookrightarrow {\mathrm{G}_2}^{(8)} \cup (e^9 \vee e^{11}) = {\mathrm{G}_2}^{(11)},$$

$$(S^{13}) \to {\mathrm{G}_2}^{(11)} \hookrightarrow \mathrm{G}_2, \quad \mathrm{Cat}(\mathrm{G}_2) = 4.$$

問題 多様体 M は常に $\mathrm{cat}(M) = \mathrm{Cat}(M)$ をみたすか？

問題 [Eilenberg-Ganea [14]] 離散群 G についての次の不等式は常に等号であるか？

$$\mathrm{cd}(BG) \leq \mathrm{cat}(BG) \leq \mathrm{Cat}(BG) \leq \mathrm{gd}(BG).$$

1.2 「弱い」猫たち

定義 1.8 (Whitehead [58, 59])

$$w\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m{\geq}0 \,\middle|\, \begin{array}{l} \bar{\Delta}^{m+1} : X \to \bigwedge^{m+1} X \\ \textit{is trivial.} \end{array} \right\}$$

ここで $\prod^{m+1} X/\prod^{m+1}_{m} X = \bigwedge^{m+1} X$（smash 積）に注意すれば位相空間 X に対して次が成立する。

定理 1.9 (Whitehead) *(1)* $w\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{cat}(X)$ である。

(2) h^* を乗法的一般コホモロジー論とする。$\tilde{h}^*(X)$ のどれか m 個の元の積が 0 でないなら $w\mathrm{cat}(X) \geq m$ である。

定義 1.10 *cup-length* は $\mathrm{c}(-)$ と表わされることも多いが、ここでは *Chern class* との重複を避けて $\mathrm{cup}(-)$ と表わす：

(1) h を乗法的コホモロジーとするとき、次で定義する。

$$\mathrm{cup}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{ m{\geq}0 \,\middle|\, \forall_{\{u_0,\cdots,u_m\in\tilde{h}^*(X)\}} u_0{\cdot}\cdots{\cdot}u_m = 0 \right\}$$

(2) $\mathrm{cup}(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{cup}(X;h)\,|\,h$：乗法的コホモロジー$\}$

注 1.11 $h^*{=}H^*(\ ;R)$ のとき $\mathrm{cup}(X;h)$ を $\mathrm{cup}(X;R)$ で表す。

定理 1.12 $h^*(-)$ を乗法的コホモロジー論とする。

(1) $\mathrm{cup}(X;h){\leq}\,\mathrm{cup}(X){\leq}\,w\mathrm{cat}(X){\leq}\,\mathrm{cat}(X){\leq}\,\mathrm{Cat}(X)$.

(2) $\mathrm{cup}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \;\middle|\; \begin{array}{l} \tilde{\Delta}^{m+1} : X \to \bigwedge^{m+1} X \\ \textit{is stably trivial} \end{array} \right\}$

例 1.13 *(1)* $\mathrm{cup}(S^n; R) = 1 = \mathrm{Cat}(S^n)$, h は任意の環。

(2) $\mathrm{cup}(\mathbb{R}\mathrm{P}^m; \mathbb{Z}) = [\frac{m}{2}]$, $\mathrm{cup}(\mathbb{R}\mathrm{P}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = m = \mathrm{Cat}(\mathbb{R}\mathrm{P}^m)$.

(3) $\mathrm{cup}(\mathrm{L}^n(p); R) = n < 2n{+}1 = \mathrm{Cat}(\mathrm{L}^n(p))$, p は奇素数で R は任意の環。

(4) $\mathrm{cup}(\mathrm{SU}(n); \mathbb{Z}) = n{-}1 = \mathrm{Cat}(\mathrm{SU}(n))$.

(5) $\mathrm{cup}(\mathrm{G}_2; \mathbb{Z}) = 3 < 4 = \mathrm{cup}(\mathrm{G}_2; \mathbb{Z}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Cat}(\mathrm{G}_2)$.

(6) $\mathrm{cup}(\mathrm{Sp}(2); R) = 2 < 3 = \mathrm{cup}(\mathrm{Sp}(2); KO) = \mathrm{Cat}(\mathrm{Sp}(2))$, R は任意の環で KO は実 K 理論。

(7) $\mathrm{cup}(\mathrm{Sp}(3); KO) = 4 < 5 = \mathrm{cup}(\mathrm{Sp}(3)) = \mathrm{Cat}(\mathrm{Sp}(3))$.

(8) $G = \mathrm{Spin}(n)$, $(n \leq 8)$, $G = \mathrm{SO}(m)$, $(m \leq 9)$ 又は $G = \mathrm{PU}(n)$, $(n \leq 5)$ のとき $\mathrm{cup}(G; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathrm{Cat}(G)$ である。

(9) $t > r > 1$ とし、E を $S^{t=1}$ 上の S^r 束とすると、$\mathrm{cup}(E) = 2 \leq \mathrm{cat}(E) \leq \mathrm{Cat}(E) \leq 3$ が常に成立し、$\mathrm{cup}(E) = 2 < 3 = \mathrm{cat}(E) = \mathrm{Cat}(E)$ となる E も存在する。

2　A_∞ 構造と L-S category

空間 X に対し、そのループ空間 $\tilde{\Omega}X$ は Stasheff の A_∞ 構造を持つ。 － 準ファイバー空間列 $\{p_m^{\tilde{\Omega}X} : E^{m+1}(\tilde{\Omega}X) \to P^m(\tilde{\Omega}X)\}$ で、次の図を可換にするものが存在する。

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{\Omega}X \arrow[r, hook, "\overset{*}{\wr}"] \arrow[d, "p_1^{\tilde{\Omega}X}"] & E^2(\tilde{\Omega}X) \arrow[r, hook, "\overset{*}{\wr}"] \arrow[d, "p_2^{\tilde{\Omega}X}"] & \cdots \arrow[r, hook, "\overset{*}{\wr}"] & E^m(\tilde{\Omega}X) \arrow[r, hook, "\overset{*}{\wr}"] \arrow[d, "p_m^{\tilde{\Omega}X}"'] & E^{m+1}(\tilde{\Omega}X) \arrow[r, hook, "\overset{*}{\wr}"] \arrow[d, "p_{m+1}^{\tilde{\Omega}X}"'] & \cdots \arrow[r, hook, "\overset{*}{\wr}"] & E^\infty(\tilde{\Omega}X) \arrow[d, "p_\infty^{\tilde{\Omega}X}"'] & \\
\{*\} \arrow[r, hook] & P^1(\tilde{\Omega}X) \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & P^{m-1}(\tilde{\Omega}X) \arrow[r, hook] & P^m(\tilde{\Omega}X) \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & P^\infty(\tilde{\Omega}X) & X \arrow[l, "\overset{h_X}{\simeq}"']
\end{tikzcd}
$$

注 2.1 このような準ファイバー空間列は一意ではない。

定理 2.2 ([17] or [26])　位相空間 X が $\mathrm{cat}(X) \leq m$ を満たすには、$P^\infty(\tilde{\Omega}X) \supset P^m(\tilde{\Omega}X)$ へのホモトピー同値 $h^X : X \overset{\simeq}{\to} P^\infty(\tilde{\Omega}X)$ の圧縮（$\mathrm{cat}(X) \leq m$ の構造写像）$\sigma(X) : X \to P^m(\tilde{\Omega}X)$ の存在が必要十分である。

Stasheff の A_∞-構造の「普遍性」から次が得られる。

定理 2.3 ([26])　位相空間 X, Y が $\mathrm{cat}(X \times Y) \leq m$ を満たすには、$P^\infty(\tilde{\Omega}X) \times P^\infty(\tilde{\Omega}Y) \supset \bigcup_{i+j=m} P^i(\tilde{\Omega}X) \times P^j(\tilde{\Omega}Y)$ への $h^X \times h^Y$ の圧縮 $\sigma(X, Y) : X \times Y \to \bigcup_{i+j=m} P^i(\tilde{\Omega}X) \times P^j(\tilde{\Omega}Y)$ の存在が必要十分である。

2.1　新しい計算可能な不変量

定義 2.4 *Toomer*不変量の改良版を準同形 $(e_m^X)_* : h^*(X) \to h^*(P^m(\Omega X))$ を用いて導入する。*Toomer*不変量は $\mathrm{e}(\ )$ と表示されることが多いが、ここでは *Adams* e不変量との重複を避けて $\mathrm{wgt}(\ )$ と表記する：

(1) h を乗法的コホモロジーとする。

$$\textit{i)}\ \mathrm{wgt}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{ m{\geq}0 \,\middle|\, (e_m^X)_* \textit{ is a mono} \right\}$$

$$\textit{ii)}\ M\mathrm{cat}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{ m{\geq}0 \,\middle|\, \begin{array}{l}(e_m^X)_* \textit{ is a split mono} \\ \textit{of } h^*h\textit{-modules}\end{array} \right\}$$

$$\textit{iii)}\ A\mathrm{cat}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{ m{\geq}0 \,\middle|\, \begin{array}{l}(e_m^X)_* \textit{ is a split mono} \\ \textit{of } h^*h\textit{-algebras}\end{array} \right\}$$

$$\textit{(2)}\ \ \textit{i)}\ \mathrm{wgt}(X) = \mathrm{Max}\left\{ \mathrm{wgt}(X;h) \,\middle|\, h \text{ は乗法的コホモロジー} \right\}$$

$$\textit{ii)}\ M\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Max}\left\{ M\mathrm{cat}(X;h) \,\middle|\, h \text{ は乗法的コホモロジー} \right\}$$

$$\textit{iii)}\ A\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Max}\left\{ A\mathrm{cat}(X;h) \,\middle|\, h \text{ は乗法的コホモロジー} \right\}$$

定理 2.5　次の不等式が成立する：

$$\mathrm{cup}(X;h) \leq \mathrm{wgt}(X;h) \leq M\mathrm{cat}(X;h) \leq A\mathrm{cat}(X;h) \leq \mathrm{cat}(X).$$

さてRudyakとStromはFadell-Husseini [15]の与えた位相不変量category weightをホモトピー不変量となるように再定義し、L-Sの猫を近似計算する仕組みを与えた：

定義 2.6 (Rudyak [44, 45], Strom [52]) $u \in \tilde{h}^*(X)$（hは乗法的コホモロジー）に対して

$$\mathrm{wgt}(u;h) = \mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, (e^X_m)_*(u) \neq 0\right\}$$

定理 2.7 (Rudyak [44, 45], Strom [52]) hを乗法的なコホモロジーとする。

(1) $\underline{uv \neq 0}$ *in* $h^*(X)$ならば$\mathrm{wgt}(u;h) + \mathrm{wgt}(v;h) \leq \mathrm{wgt}(uv;h)$が成立する。

(2) $\mathrm{wgt}(X;h) = \mathrm{Max}\{\mathrm{wgt}(u;h) \,|\, u \in \tilde{h}^*(X)\}$が成立する。

定義 2.8 (Rudyak [45])

$$r\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0 \,|\, \exists_{(stably)\ \sigma : X \to P^m(\Omega X)}\ e^X_m \circ \sigma \sim 1_X\}.$$

定理 2.9 上述の関係式と*Rudyak [45]*から次が成立する。

$$\mathrm{cup}(X) \leq \mathrm{wgt}(X) = M\mathrm{cat}(X) = r\mathrm{cat}(X) \leq A\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{cat}(X).$$

2.2　(高次Hopf不変量)

Berstein-Hilton [6] により高次Hopf不変量は次のように与えられた（s は diagonal map の fat wedge への圧縮)：

$$H_m^s : \pi_q(X;A) \to \pi_{q+1}(\prod^{m+1}(X), \overset{m+1}{\mathrm{T}}(X);A), \quad q \geq 1$$

ただし、$\overset{m+1}{\mathrm{T}}(X)$ は X の $m+1$ 個の fat wedge である。

ここでは前記の $\mathrm{cat}(X) \leq m$ に対する射影空間への構造写像の存在への障害として次の高次ホップ不変量を与える。

定義 2.10 (非安定および安定Hopf不変量)

1） $\mathrm{cat}(X) \leq m$ を満たす空間 X と懸垂空間 ΣV に対し

$$H_m : [\Sigma V, X] \to 2^{[\Sigma V, E^{m+1}(\tilde{\Omega} X)]},$$
$$H_m(f) = \left\{ H_m^{\sigma(X)}(f) \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma(X)\text{ は }\mathrm{cat}(X) = m\text{ に対す} \\ \text{る構造写像} \end{array} \right\}$$
$$\subset [\Sigma V, E^{m+1}(\Omega X)] \quad \mathit{for}\ f \in [\Sigma V, X].$$

2） さらに安定化関手 Σ^∞ により安定化する。

$$\mathcal{H}_m : [\Sigma V, X] \overset{H_m}{\to} 2^{[\Sigma V, E^{m+1}(\tilde{\Omega} X)]} \overset{2^{\Sigma^\infty *}}{\longrightarrow} 2^{\{\Sigma V, E^{m+1}(\tilde{\Omega} X)\}}$$
$$\mathcal{H}_m(f) = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_m^{\sigma(X)}(f) \\ = \Sigma^\infty H_m^{\sigma(X)}(f) \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma(X)\text{ は }\mathrm{cat}(X) = m\text{ に} \\ \text{対する構造写像} \end{array} \right\}$$
$$\subset \{\Sigma V, E^{m+1}(\Omega X)\} \quad \mathit{for}\ f \in [\Sigma V, X]$$

3） また次が非安定 *crude* ホップ不変量である。

$$\bar{H}_m : [\Sigma V, X] \xrightarrow{H_m} 2^{[\Sigma V, E^{m+1}(\tilde{\Omega}X)]} \to 2^{[\Sigma^2 V, \Sigma E^{m+1}(\tilde{\Omega}X)]}$$
$$\to 2^{[\Sigma^2 V, \Sigma\tilde{\Omega}X\wedge\cdots\wedge\Sigma\tilde{\Omega}X]} \to 2^{[\Sigma^2 V, X\wedge\cdots\wedge X]}.$$

4） また次が安定化された *crude* ホップ不変量である。

$$\bar{\mathcal{H}}_m : [\Sigma V, X] \xrightarrow{\bar{H}_m} 2^{[\Sigma^2 V, X\wedge\cdots\wedge X]} \to 2^{\{\Sigma^2 V, X\wedge\cdots\wedge X\}}.$$

定理 2.11 ([28]) ΣV と X は *(*$d-1$*)*-連結（$d\geq 2$）とする。また $\mathrm{cat}(X)=m$、$W=X\cup_f C(\Sigma V)$ *(*$f:\Sigma V\to X$*)* とおく。

(1) $\mathrm{cat}(W)=\mathrm{cat}(X)$ *if* $H_m(f)\ni 0$.

(2) $\dim X\leq d\cdot\mathrm{cat}(X)+d-2$ *(*$d\geq 1$*)* のとき、

$$\mathrm{cat}(W)=\mathrm{cat}(X)+1 \quad \textit{if} \quad H_m(f)\not\ni 0.$$

定理 2.12 ([28]) 上でさらに $\mathrm{cat}(W)=\mathrm{cat}(X)+1$ とする。

(1) $\mathrm{cat}(W\times S^n)=\mathrm{cat}(W)$ *if* $\Sigma^n_* H_m(f)\ni 0$.

(2) $\dim X\leq d\cdot\mathrm{cat}(X)+d-2$ *(*$d\geq 1$*)* のとき、

$$\mathrm{cat}(W\times S^n)=\mathrm{cat}(W)+1 \quad \textit{if} \quad \Sigma^{n+1}_* H_m(f)\not\ni 0.$$

系 2.12.1　$W = X \cup_f C(\Sigma V)$ *(*$f : \Sigma V \to X$*)*かつ$\dim X \leq d \cdot \mathrm{cat}(X) + d - 2$ *(*$n \geq 1$*)*のとき次は同値である。

(1) $\mathrm{cat}(W \times S^n) = \mathrm{cat}(W) + 1$が全ての$n \geq 1$で成立する。

(2)「$H_m(f) \not\ni 0$」$\iff$「$\mathcal{H}_m(f) \not\ni 0$」

例 2.13 ([26])　さてS^{15}が *Hopf*空間でない *(Toda [54])* ので$[\iota_{15}, \iota_{15}] \neq 0$である。そこで$Q = S^8 \cup_{\sigma_8 \circ [\iota_{15}, \iota_{15}]} e^{30}$とおくと$\mathrm{cat}(Q \times S^n) = \mathrm{cat}(Q) = 2$（$\forall n \geq 1$）が成立する。

※この後 Vandembroucq, Stanley らが様々な反例を得た。

3　問題4 (球面上の球面束の LS cat)

EをS^{q+1}上のS^r-束（$r \geq 1$, $q \geq 1$）とする。このときEは$E \simeq S^r \cup_\alpha e^{q+1} \cup_\psi e^{q+r+1}$とCW分割される。

事実 3.1 ($\alpha = 1_{S^r}$**)**　$\mathrm{cat}(Q)=0$ *&* $\mathrm{cat}(E)=1$.

事実 3.2 ($\alpha \neq 1_{S^r}$ **&** $H_1(\alpha)=0$**)**　$\mathrm{cat}(Q)=1$ *&* $\mathrm{cat}(E)=2$.

定理 3.3 ($H_1(\alpha) \neq 0$**の場合 [28, 29])**

$[\Sigma^r H_1(\alpha)=0$のとき$]$　$\mathrm{cat}(Q)=2$ *&* $\mathrm{cat}(E)=2$.

$[\Sigma^r H_1(\alpha) \neq 0$のとき$]$　$\mathrm{cat}(Q) = 2$ *&* $\mathrm{cat}(E) = 3$.

4　問題２に対する多様体としての反例

pを奇素数とする。このとき$\alpha_1(3):S^{2p}\to S^3$はco-H写像だが$\alpha_2(3):S^{4p-2}\to S^3$はそうでない。実際$H_1(\alpha_2(3))=x\alpha_1(2p+1), x\neq 0$が成立する（Toda [55]）。

さて、co-H写像$\beta=\alpha_1(3)\circ\alpha_2(2p)$の懸垂$\Sigma\beta : S^{6p-4}\to S^4$により、$S^4$上の$S^2$-束$\mathbb{C}P^3$の引き戻しを$M_p$とする。従って$M_p$は閉多様体とみなすことができ、次のCW分割を持つ。

$$M_p\simeq S^2\cup_\alpha e^{6p-4}\cup_{\psi(\beta)}e^{6p-2},\quad \alpha=\eta_2\circ\beta.$$

定理 4.1 ([28, 29])　$\mathrm{cat}(N_p)=\mathrm{cat}(N_p\smallsetminus\{*\}), *\in N_p$を満たす閉多様体$N_p$が$p\geq 5$に対して存在する。

この発表の直後に、CW複体の場合のGanea予想に対するIの構成した反例を用い、上記と同様な性質を持つ多様体をLambrecht-Vandembroucq-Stanleyが構成している。

定理*4.1*の略証*:*　M_pは閉多様体であり、$p\geq 5$のときTodaによって次が知られている。

$$H_1(\alpha)=\alpha_1(3)\circ\alpha_2(2p)\neq 0,\quad \Sigma^1(\alpha_1(3)\circ\alpha_2(2p))\neq 0\ \text{ but}$$
$$\Sigma^2(\alpha_1(3)\circ\alpha_2(2p))\in\pi_{6p-3}(S^5)_{(p)}=0.$$

従って定理3.3より $\mathrm{cat}(S^2\cup_\alpha e^{6p-4}) = 2$ および $\mathrm{cat}(M_p) = 2$ がわかる。そこで $N_p = M_p$ とおけばよい。 終り.

定理 4.2 ([28]) 閉多様体 M で $\mathrm{cat}(M\times S^n) = \mathrm{cat}(M)$ が $n \geq 2$ で成立するものが存在する。

従ってGanea予想（問題2）は閉多様体に対しても成立しない。現在までの所、これが知られている唯一の多様体としての反例である。

定理 *4.2* の略証*:* まず $M = M_3$ とおく。$p = 3$ のとき Todaによって、次が知られている。

$$H_1(\alpha) = \alpha_1(3)\circ\alpha_2(6) \neq 0,\quad \Sigma^3(\alpha_1(3)\circ\alpha_2(6)) \neq 0 \ \ \text{but}$$
$$\Sigma^4(\alpha_1(3)\circ\alpha_2(6)) = 0 \ \ \text{in} \ \ \pi_{17}(S^7)_{(3)} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

定理3.3と定理2.12より $\mathrm{cat}(M) = 3$ および $\mathrm{cat}(M\times S^n) = \mathrm{cat}(M) = 3$ が $n \geq 2$ に対して成立する。 終り.

注 4.3 M_3 が $\mathrm{cat}(M_3\times S^2) = \mathrm{cat}(M_3\cup(S^2\cup e^{14})\times S^2) = 3$ より、$N = M_3\times S^2$ も $\mathrm{cat}(N) = \mathrm{cat}(N\smallsetminus *), * \in N$ を満たす。

注 4.4 高次の *Toda bracket* を用いれば、$p \geq 5$ に対応する多様体で *Ganea* 予想の反例が構成できると考えられる。

5　問題１ (Lie群のL-S猫)（Mimura-Nishimoto-I）

$G \hookrightarrow E \xrightarrow{p} \Sigma A$を構造群を$G$とする主fibre束とする。

定理 5.1　*cofibre列*$K_i(G)\xrightarrow{\rho_i}F_{i-1}(G)\hookrightarrow F_i(G)$, *(*$1 \leq i \leq m$*)* と$k$（$1{\leq}k{\leq}m$）が次を満たせば$\mathrm{Cat}(E) \leq m{+}k$となる。

(1) $F_0(G) = \{*\}$, $F_m(G) \simeq G$.

(2) 構造群の積の制限$F_i(G){\times}F_j(G) \ \subseteq \ F_m(G){\times}F_m(G) \ \simeq \ G{\times}G \to G$が$F_{i+j}(G)$（$i{\geq}k$, $j{\geq}0$）に圧縮可能。

(3) 構造写像$\alpha : A \to G$が$F_{k-1}(G)$（$k{\geq}m$）に圧縮可能。

実際これを用いると単連結compact Lie群のL-S猫のかなり良いupper boundが得られる。さらに単連結でないLie群を取り扱う為に次の定理を用意した。

$F \hookrightarrow X \to B$を$G$を構造群とするfibre束とする。ただし$B$は$(d{-}1)$-連結（$d{\geq}1$）で有限次元であるものとする。

定理 5.2　*cofibre列*$K_i(G)\xrightarrow{\rho_i}F_{i-1}(G)\hookrightarrow F_i(G)$, *(*$1 \leq i \leq m$*)* が次を満たせば$\mathrm{Cat}(E) \leq m{+}\frac{\dim B}{d}$となる。

(1) $F_0(G) = \{*\}$, $F_m(G) \simeq G$.

(2) 積の制限 $F_i(G) \times F_j(G) \subseteq F_m(G) \times F_m(G) \simeq G \times G \to G$ が $F_{i+j}(G)$（$i \geq k,\ j \geq 0$）に圧縮可能。

(3) 構造群の作用の制限 $\psi|_{G^{(d\cdot(i+2)-2)} \times F_j} : G^{(d\cdot(i+2)-2)} \times F_j \to F$ が F_{i+j}（$0 \leq i, j \leq i+j \leq m$）に圧縮可能。

定理 *5.1* と定理 *5.2* の略証*:* どちらも実際に全空間の cone-decomposition を構成できる。 終り*.*

これらを用いることで、階数が４以下のほとんどの compact Lie 群の L-S 猫の値が決定された。

階数	1		2		3		4	
A_n	SU(2)	1	SU(3)	2	SU(4)	3	SU(5)	4
	PU(2)	3	PU(3)	6	PU(4)	9	PU(5)	12
B_n	Spin(3)	1	Spin(5)	3	Spin(7)	5	Spin(9)	?
	SO(3)	3	SO(5)	8	SO(7)	11	SO(9)	20
C_n	Sp(1)	1	Sp(2)	3	Sp(3)	5	Sp(4)	?
	PSp(1)	3	PSp(2)	8	PSp(3)	?	PSp(4)	?
D_n					Spin(6)	3	Spin(8)	6
					SO(6)	9	SO(8)	12
					PO(6)	9	PO(8)	18
例外			G_2	4			F_4	?