修士論文

$K^*(XP^n)$ の環構造について

岩瀬則夫

専攻分野　位相数学

指導教官　加藤十吉教授

提出年月日　昭和58年2月10日

序

H空間（Hopf空間）は、位相群のように積を持つ位相空間である。ただし、その空間は、単位元をホモトピーの意味で持つとしか規定されておらず、結合律は要請されない。このH空間の研究は、まずH. Hopf [6]によって始められ、A. Borel [2]，W. Browder [3]等によって研究され、ホモトピー論的にLie群と類似した性質を持つことが知られた。

ところで、結合的な積を持つH空間には、任意の次数の『射影空間』と、それらの帰納的極限として得られる分類空間とを構成することができる。また単なるH空間でも、その『射影平面』を構成することができる。さらに、そのような「結合的なH空間」と「単なるH空間」という概念の『間』には、また無限に多くの異なる段階が存在していることが、「A_n構造を持つH空間」という概念を用いて明示された（Stasheff [15,16]，A. Zabrodsky [20]）が、それは、n次までの『射影空間』を持っているものである。ただし、前記[16]によれば、A_n空間の間のA_n構造を保つ写像の特徴づけは、「extremaly complicated」とされ、値域が結合的なH空間の場合しか論じられていないようである。小論においても、応用において考察されている写像は、それで十分ではあるが、必要となる場合を考慮し、その一般的な特徴づけを与えた。

さて、このような『射影空間』の研究は、まずW. Browder and E. Thomas [4]による『射影平面』の$\mathbb{Z}/2$係数コホモロジー環の決定があり、J. R. Hubbuck [7],[8]などがある。ここでは、J. P. Lin [12] らの

結果を用いて、A_n 構造を持つ空間の射影空間の K コホモロジーを、ある条件の下で決定する。この条件は「A_n構造を保つ写像」という概念を用いて記述される。

またこの定理の応用として、丸山・岡[13] による $Sp(2)$ 上の自己H写像 (i.e. A_2構造を保つ写像) についての結果を、ホモトピー結合性を保つ写像 (i.e. A_3構造を保つ写像)についての結果に拡張する。ここで得た定理は次の通りである。

定理 6.3.6　A_n 空間 X の K コホモロジー環が A_n primitive な元で生成されているならば、X の n 次の射影空間 XP^n は、次のような K-コホモロジー環を持つ。($n \geqq 3$) ただし、X は有限かつ連結・単連結とする。

$$K^*(XP^n) \cong \mathbb{Z}^{[n+1]}[u_1, \cdots, u_\ell] \oplus S_n$$

さらに、この定理の応用として、次の結果を得ることができる。

定理 8.2.2.　$Sp(2)$ 上の自己 A_3 写像の degree は次の集合に含まれる。

$$\left\{ (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists k \in \mathbb{Z} \quad s.t. \quad m \equiv k^2 \mod 360 \\ \exists \ell \in \mathbb{Z} \quad (n = m + 12\ell) \quad 3 | k \Rightarrow 3 | \ell \end{array} \right\}$$

小論の構成は、§1 において空間と写像との A_n form を導入し、§§2〜4 においてそれらと A_n 構造との関係をみる。またそこで導入した分割を用いて、§5 においてファイバー空間の全空間と底空間とを、$\mu_{i,j}$, p_i を triad 写像とするように分割する。§6 において主定理を述べ、その証明は節を改めた。また、§8

は、その応用である。

最後に、全編に亙って御指導を賜わった鎌田・加藤両先生に、深く感謝いたします。

記　号

$\mathbb{Z}$: 整数環。

$\mathbb{Q}$: 有理数体。

$\mathbb{Z}/m$: modulo m 整数環。

$\mathrm{Tor}\, G$: 加群 G の torsion 部分群。$\mathrm{Tor}\, G = 0$ のとき、G は torsion をもたないという。

$Sp(2)$: 2 次の symplectic 群

S^n : n 次元球面

$X_{(0)}$: 単連結な CW 複体の ϕ - 局所化

I : 区間 $[0, 1]$

I^n : n 次元立方体

$S(\ )$: reduced suspension

$C(\ )$: reduced cone

$H^*(\ : R)$: R 係数常コホモロジー

$X \vee Y$: X と Y の Wedge 和

$X \wedge Y$: X と Y の Smash 積

$\mathcal{K}_*$: 基点を近傍レトラクトとするコンパクト生成空間と、その間の基点を保つ連続写像のなす圏。また基点を明記するときは、$(X, *)$ でその対象を表わした。

目　次

§1 A_n form

空間と写像という、二種類の対象に対して、「A_n form」を定義する。

1.1 A_n 空間

A_n 空間は、高次のホモトピー結合性を持つH空間である。まずH空間の定義から始めよう。

$\boxed{\text{定義}}$ 1.1.1 位相空間 X が、次の条件をみたす写像 m の存在をゆるすとき、m を積とするH空間と呼ばれ、(X, m) で示される。

i) $m : X \times X \longrightarrow X$ は基点を保つ連続写像。

ii) 次の図式は、基点を保つホモトピーを除いて可換。

$$
\begin{tikzcd}
X \vee X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\nabla"'] & X \times X \arrow[d, "m"] \\
& X
\end{tikzcd}
$$

ただし、j は包含写像であり、∇ は folding 写像といわれ、$\nabla(x, *_X) = x = \nabla(*_X, x)$ で定義される。また、$*_X \in X$ は X の基点。

注　H空間 (X, m) が $m \circ j = \nabla$ をみたすとき、X を、単位元を持つH空間という。

H空間については、次のよく知られた定理がある。

$\boxed{\text{定理}}$ 1.1.2　$\mathcal{K}_*$ の対象 X がH空間のとき、その積

は、基点を保つホモトピーで変形され、Xを単位元をもつH空間とすることができる。

以下で考えるH空間は $\mathcal{K}_*$ の対象に限定するので、以後H空間は、単位元を持つものしか考えない。そこで、H空間の定義をいい換えると、次のような写像 M_2 の存在する空間であるといえる。

i) $M_2 : \{*\} \times X \times X \longrightarrow X$ は $\mathcal{K}_*$ の射。

ii) $M_2(*, x, *_X) = M_2(*, *_X, x) = x$.

これを、また (X, M_2) でも示す。

また、H空間 (X, M_2) がホモトピー結合的とは、Xがさらに次の条件をみたす写像 M_3 の存在をゆるすことである。

i) $M_3 : I \times X \times X \times X \longrightarrow X$ は $\mathcal{K}_*$ の射。

ii) $M_3(0, x_1, x_2, x_3) = M_2(*, M_2(*, x_1, x_2), x_3)$

iii) $M_3(1, x_1, x_2, x_3) = M_2(*, x_1, M_2(*, x_2, x_3))$

iv) $M_3(t, *_X, *_X, *_X) = *_X$

Stasheff [15] の A_n *form* の導入は、上で示したホモトピーの *parameter* を与える区間Iの役割を果たす複体 K_i の定義から始められている。複体 K_i は、$i-2$ 次元立方体に同相な複体であって、$\{i\cdot(i-1)/2 - 1\}$ 個の辺（*face*）を持つ凸集合である。さらに、$\{K_i\}$ は、次の三つの作用素を備えている。

i) 辺作用素：K_i の各辺は次の $\{i\cdot(i-1)/2 - 1\}$ 個の辺作用素と呼ばれる同相写像の像である。

$$\partial_k(r, s) : K_r \times K_s \longrightarrow K_{r+s-1}$$
$$, 2 \leq r,\ 2 \leq s,\ 1 \leq k \leq r$$

ii) 退化作用素：

$$s_j : K_i \longrightarrow K_{i-1} \quad , \quad 1 \leqq j \leqq i$$

iii) 同相写像： $\eta_i : I \times K_i \longrightarrow K_{i+1}$

これらは次の様な関係式をみたすものとして与えられる。

(1) $\partial_k(r+s-1, t) \cdot (\partial_j(r,s) \times 1)$

$$= \partial_{j+t-1}(r+t-1, s) \cdot (\partial_k(r,t) \times 1) \cdot (1 \times T)$$

$$, \ k < j \ , \quad T(\sigma, \tau) = (\tau, \sigma)$$

(2) $\partial_k(r, s+t-1) \cdot (1 \times \partial_j(s,t))$

$$= \partial_{k+j-1}(r+s-1, t) \cdot (\partial_k(r,s) \times 1)$$

(3) $s_j \cdot s_k = s_{k-1} \cdot s_j \quad , \quad j < k$

(4) $s_j \cdot \partial_k(r,s)(\rho, \sigma)$

$$= \begin{cases} \partial_{k-1}(r-1, s)(s_j(\rho), \sigma) & , \ j < k, \ r \geqq 3 \\ \partial_k(r, s-1)(\rho, s_{j-k+1}(\sigma)) & , \ k \leqq j < k+s, \ s \geqq 3 \\ \partial_k(r-1, s)(s_{j-s+1}(\rho), \sigma) & , \ k+s \leqq j \ , \ r \geqq 3 \\ \rho & , \ r = i-1, \ s = 2, \ k \leqq j \leqq k+1 \\ \sigma & , \ r = 2 \ , \ s = i-1, \ k = 1, \ j = i \\ \sigma & , \ r = 2 \ , \ s = i-1, \ k = 2, \ j = 1 \end{cases}$$

$$, \ r+s = i+1$$

(5) $\eta_i(t, \partial_k(r,s)(\rho, \sigma)) = \partial_{k+1}(r+1, s)(\eta_r(t, \rho), \sigma)$

(6) $2 \leqq j \leqq i-1$ のとき、

$$\eta_{i-1}(t, s_j(\tau)) = s_{j+1}\eta_i(t, \tau)$$

$\boxed{定義}$ 1.1.3 $\mathcal{K}_*$ の対象 $(X, *_X)$ が、次の条件 i), ii), iii) をみたす連続写像を備えているとき、X を、A_n form $\{M_i\}_{2 \leqq i \leqq n}$ を持つ空間といい、組 $(X, \{M_i\}_{2 \leqq i \leqq n})$ で示す。

i) $M_i : K_i \times \underbrace{X \times \cdots \times X}_{i\text{個}} \longrightarrow X \quad , \ 2 \leqq i \leqq n$

ii) $M_i(\partial_k(r,s)(\rho,\sigma),\ x_1, \cdots, x_i)$

$= M_r(\rho,\ x_1, \cdots, x_{k-1}, M_s(\sigma, x_k, \cdots, x_{k+s-1}), x_{k+s}, \cdots, x_i)$

iii) $M_i(\tau,\ x_1, \cdots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \cdots, x_i)$

$= M_{i-1}(s_j(\tau), x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_i)$

ここで Stasheff の導いた定理を述べよう。

$\boxed{\text{定理}}$ 1.1.4（J. D. Stasheff [15] Theorem 5）

$\mathcal{K}_*$ の対象 $(X, *_X)$ が A_n form を持つための必要十分条件は、次の通りである。

(*) 次の図式を可換とする写像の列が存在して、条件 i), ii) をみたす。

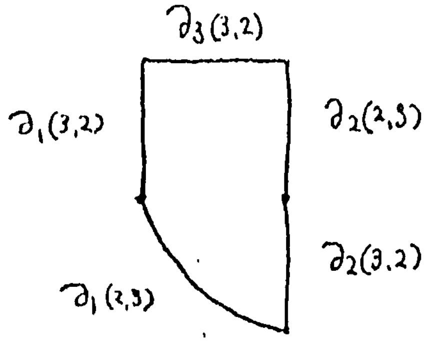
$$\begin{array}{ccccccccccc}
X = E^1 & \subset & E^2 & \subset & E^3 & \subset & E^4 & \subset & \cdots & \subset & E^n \\
\downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle p_2} & & \downarrow{\scriptstyle p_3} & & \downarrow{\scriptstyle p_4} & & & & \downarrow{\scriptstyle p_n} \\
(*) = P^0 & \subset & P^1 & \subset & P^2 & \subset & P^3 & \subset & \cdots & \subset & P^{n-1}
\end{array}$$

i) $(p_i)_* : \pi_*(E^i, X) \cong \pi_*(P^{i-1})$

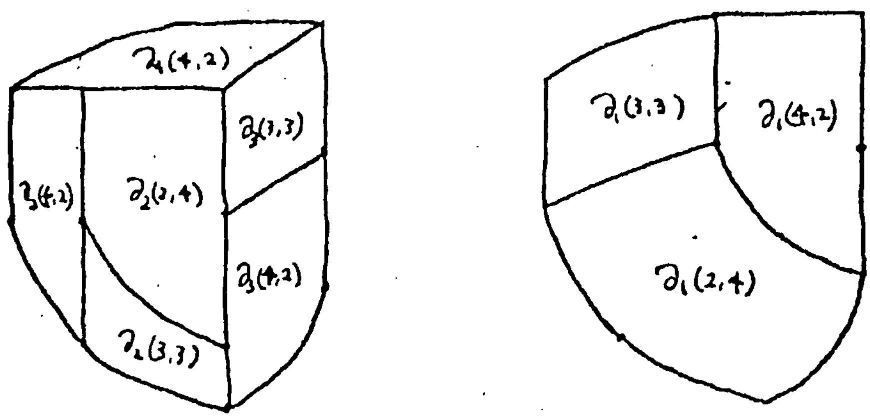
ii) 包含写像 $E^i \subset E^{i+1}$ は null-homotopic である。

ただし、P^{i-1} は、原論文では B^i と書かれている。このように改めたのは、この P^{i-1} がちょうど XP^{i-1}、すなわち、$(i-1)$ 番目の X の射影空間となるからである。また、この条件 (*) が成立する空間を、Stasheff は A_n 構造を持つ空間と呼んだ。そこでこれ以後この性質を持つ空間を A_n 空間と呼ぶ。

ここで若干 Stasheff [15] における複体 K_i の構成にふれておこう。$K_3 = I$ であって、K_4 は次の図で表わされる。



また K_5 は、



のように表わされる。このように、Stasheff [15] における K_i の構成は、そのバウンダリーの一部を曲面にすることにより行なわれ、また、小論で重要な役割を果たすことになる τ_i, $[\Delta_i]$ なども、具体的に定義されているとはいえない。そこでここでは精密な議論を進めるために K_i の構成を改める。しかし、Stasheff [15] に展開されている議論は、上記した関係式から導びかれている為、構成法にはよらず成立する。しかも、結果的にはこの構成から、自然に新しい複体 P_i を定義することができた。この複体 P_i を用いることにより、A_n 構造を保つ写像を特徴づけることができる。

1.2 A_n form を持つ写像

$\mathcal{K}_*$ の対象 $(X, *_X)$, $(Y, *_Y)$ をそれぞれA_n空間とし、各A_n構造が、連続写像の列 $\{p_i^X : E^i(X) \longrightarrow P^{i-1}(X)\}$, $\{p_i^Y : E^i(Y) \longrightarrow P^{i-1}(Y)\}$ で与えられているものとする。そのとき、$\mathcal{K}_*$ の射 $f: X \longrightarrow Y$ がA_n構造を保つとは、次の条件をみたす$\mathcal{K}_*$の射の列 $\{f_i^E : E^i(X) \to E^i(Y)\}$ と $\{f_i^P : P^i(X) \longrightarrow P^i(Y)\}$ が存在することである。

i) $f_1^E = f$

ii) $p_i^Y \circ f_i^E = f_{i-1}^P \circ p_i^X$

iii) $f_i^E = f_n^E | E^i(X)$

iv) $f_i^P = f_n^P | P^i(X)$

<u>注</u> A_n構造を保つ写像という概念は、合成に関して閉じていて、また恒等写像は、その自明な例である。

この概念を踏まえた上で、次に写像のA_n formを定義する。

さて、二つのH空間 (X, m) と (Y, n) との間のH写像とは、次の条件をみたす組 $(f = F_1, F_2)$ である。

i) $f = F_1 : X \longrightarrow Y$ は、$\mathcal{K}_*$ の射である。

ii) $F_2 : I \times X \times X \longrightarrow Y$ は、$\mathcal{K}_*$の二つの射

$$n \circ (f \times f) : X \times X \longrightarrow Y$$

$$f \circ m \quad : X \times X \longrightarrow Y$$

の間の基点を保つホモトピー

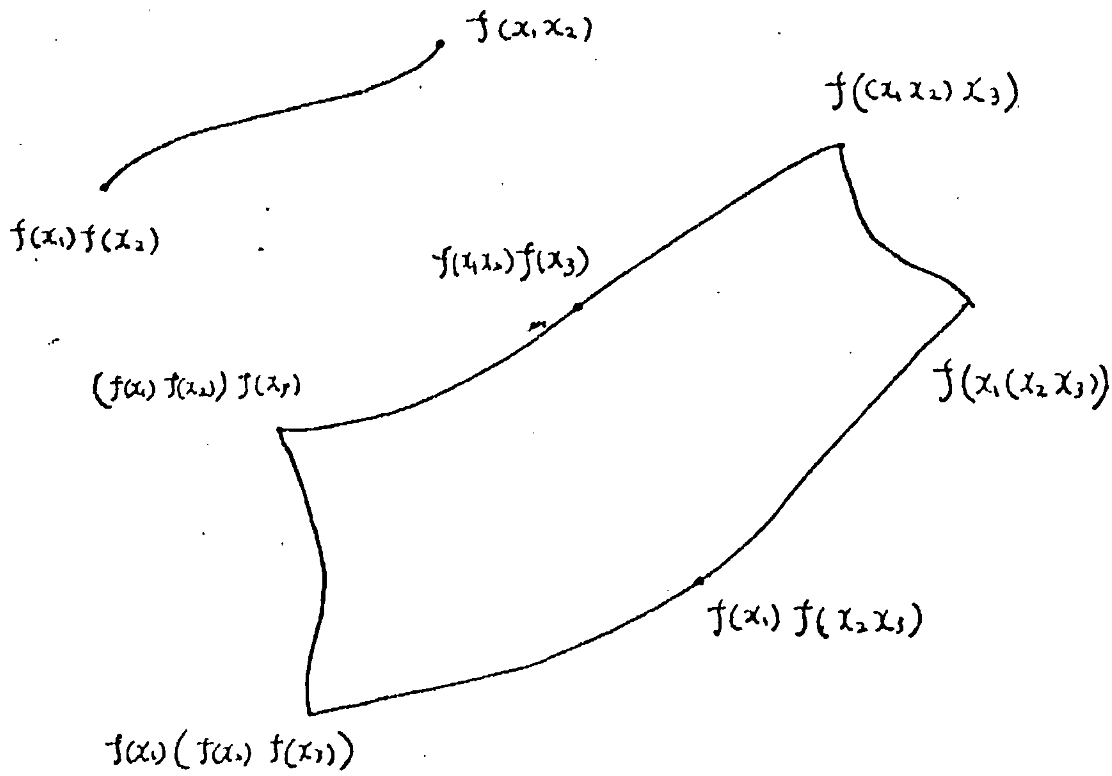
また、二つのA_3空間 $(X, \{M_2, M_3\})$, $(Y, \{N_2, N_3\})$ の間のA_3写像とは、次の条件をみたす組 $(f = F_1, F_2, F_3)$ である。

i) $(f = F_1, F_2)$ は、(X, M_2) から (Y, N_2) へのH写像である。

ii) $F_3 : I\times I\times X\times X\times X \longrightarrow Y$ は、$I\times I$ をパラメータ空間とみると、パラメータの各値に対して $\mathcal{K}_*$ の射を定め、パラメータの値にかかわらず、基点を基点にうつす。

iii) F_3は、パラメータ空間 $I\times I$ のバウンダリーで次の値をとる。

- $F_3(0, t, x_1, x_2, x_3) = f\circ M_3(t, x_1, x_2, x_3)$
- $F_3(1, t, x_1, x_2, x_3) = N_3(t, f(x_1), f(x_2), f(x_3))$
- $F_3(\frac{s}{2}, 0, x_1, x_2, x_3) = F_2(s, M_2(*, x_1, x_2), x_3)$
- $F_3(\frac{s}{2}, 1, x_1, x_2, x_3) = F_2(s, x_1, M_2(*, x_2, x_3))$
- $F_3(\frac{s+1}{2}, 0, x_1, x_2, x_3) = N_2(*, F_2(s, x_1, x_2), f(x_3))$
- $F_3(\frac{s+1}{2}, 1, x_1, x_2, x_3) = N_2(*, f(x_1), F_2(s, x_2, x_3))$



ここでこれらの概念の拡張として、写像の A_n form を定義する。このために、まず複体 Γ_i を用意する。Γ_i は、$\{i\cdot(i-1)/2+2^{i-1}-1\}$ 個の辺 (face) からなっているが、そのうちの $(2^{i-1}-1)$ 個の辺は、一方の平面に集中していて、この平面をのぞけば、Γ_i は K_{i+1} と非常によく似ている。さらに、この複体 Γ_i は、次の作用素を備えている。

i) <u>辺作用素</u>：

$$\delta(t, r_1, \cdots, r_t) : K_t \times \Gamma_{r_1} \times \cdots \times \Gamma_{r_t} \longrightarrow \Gamma_i$$

$$, \ t \geqq 2, \ r_1 \geqq 1, \cdots, r_t \geqq 1, \ i = r_1 + \cdots + r_t$$

$$\delta_k(r, s) : \Gamma_r \times K_s \longrightarrow \Gamma_i$$

$$, \ r \geqq 1, \ s \geqq 2, \ 1 \leqq k \leqq r, \ r+s = i+1$$

これらは中への同相写像であって、各々の像が、Γ_i の一つ一つの辺を定める。

ii) <u>退化作用素</u>：

$$d_j : \Gamma_i \longrightarrow \Gamma_{i-1} \quad , \ 1 \leqq j \leqq i$$

iii) 同相写像： $\quad \varepsilon_i : I \times K_i \longrightarrow \Gamma_i \quad , \ i \geqq 2$

iv) 射影： $\quad \pi_i : \Gamma_i \longrightarrow K_i$

これらの作用素は次の条件をみたすものとして与えられる。

(1) $$\delta_k(r+s-1, t)\circ(\delta_j(r, s)\times 1)$$
$$= \delta_{j+t-1}(r+t-1, s)\circ(\delta_k(r, t)\times 1)\circ(1\times T)$$
$$, \ k < j, \quad T(\sigma, \tau) = (\tau, \sigma)$$

(2) $$\delta_k(r, s+t-1)\circ(1\times \partial_j(s, t))$$
$$= \delta_{k+j-1}(r+s-1, t)\circ(\delta_k(r, s)\times 1)$$

(3) $$\delta(r+s-1, t_1, \cdots, t_{r+s-1})\circ(\partial_k(r, s)(\rho, \sigma), \tau_1, \cdots, \tau_{r+s-1})$$
$$= \delta(r, t_1, \cdots, t_{k-1}, t_k + \cdots + t_{k+s-1}, t_{k+s}, \cdots, t_{r+s-1})(\rho, \tau_1,$$

$$\cdots\ \tau_{k-1},\ \delta(s, t_k, \cdots, t_{k+s-1})(\sigma, \tau_k, \cdots, \tau_{k+s-1}), \cdots, \tau_{r+s-1})$$

(4) $\delta_k(r, s)\,(\,\delta(t, r_1, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_t),\ \sigma)$

$$= \delta(t, r_1, \cdots, r_{j-1}, r_j + s - 1, r_{j+1}, \cdots, r_t)\,(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_{j-1},$$
$$\delta_{k-(r_1+\cdots+r_{j-1})}(r_j, s)(\rho_j, \sigma), \rho_{j+1}, \cdots, \rho_t)$$
$$,\ r_1 + \cdots + r_{j-1} + 1 \leqq k \leqq r_1 + \cdots + r_j$$

(5) $d_j\, d_k = d_{k-1}\, d_j \quad , \quad j < k$

(6) $d_j \cdot \delta_k(r, s)(\rho, \sigma)$

$$= \begin{cases} \delta_{k-1}\ (r-1, s)\,(d_j(\rho), \sigma) & , j < k, (\therefore r \geqq 2) \\ \delta_k\ (r, s-1)\,(\rho, \Delta_{j-k+1}(\sigma)) & , k \leqq j < k+s,\ s \geqq 3 \\ \delta_k\ (r-1, s)\ (d_{j-s+1}(\rho), \sigma) & , k+s \leqq j\ (\therefore r \geqq 2) \\ \rho & , 2 \leqq j \leqq i-1,\ s = 2,\ k = j \text{ or } j-1 \\ \rho & , j = k = 1,\ s = 2 \\ \rho & , j = i,\ k = i-1,\ s = 2 \end{cases}$$

(7) $d_k \cdot \delta\,(t, r_1, \cdots, r_t)\,(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_t)$

$$= \begin{cases} \cdot\ \delta(t, r_1, \cdots, r_{j-1}, r_j - 1, r_{j+1}, \cdots, r_t)\,(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_{j-1}, \\ \quad d_{k-(r_1+\cdots+r_{j-1})}(\rho_j), \rho_{j+1}, \cdots, \rho_t)\ ,\ r_1 + \cdots + r_{j-1} < k, \\ \qquad k \leqq r_1 + \cdots + r_j,\quad r_j \geqq 2 \\ \cdot\ \delta\,(t-1, r_1, \cdots, r_{j-1}, r_{j+1}, \cdots, r_t)(\Delta_j(\tau), \rho_1, \cdots, \rho_{j-1}, \\ \quad \rho_{j+1}, \cdots, \rho_t)\ ,\ r_1 + \cdots + r_{j-1} + 1 = k,\ r_j = 1,\ t \geqq 3 \\ \cdot\ \rho_1 \quad , \quad t = 2,\ r_2 = 1,\ r_1 = i-1,\ k = i \\ \cdot\ \rho_2 \quad , \quad t = 2,\ r_1 = 1,\ r_2 = i-1,\ k = 1 \end{cases}$$

(8) $\varepsilon_i\,(t, \partial_k(r, s)(\rho, \sigma)) = \delta_k(r, s)(\varepsilon_r(t, \rho), \sigma)$

(9) $2 \leqq j \leqq i-1$ のとき、

$$\varepsilon_{i-1}\,(t, \Delta_j(\tau)) = d_j\ \varepsilon_i\,(t, \tau)$$

(10) $\Delta_j \cdot \pi_i = \pi_{i-1} \circ d_j$

(11) $\pi_i \circ \delta_k(r, s) = \partial_k(r, s) \circ (\pi_r \times 1)$

(12) $\pi_i \circ \delta(i, 1, \cdots, 1)(\tau, *, \cdots, *) = \tau$

$\boxed{\text{定義}}$ 1.2.1　$(X, \{M_i\}_{i\leq n})$, $(Y, \{N_i\}_{i\leq n})$ を A_n 空間とするとき、$\mathcal{H}_*$ の射 $f: X \longrightarrow Y$ が A_n form を持つとは、次の条件をみたす写像の列 $\{F_i : \Gamma_i \times X^i \longrightarrow Y\}_{1\leq i\leq n}$ が存在することである。

(1) $F_1(*, x) = f(x)$

(2) $F_i(\delta_k(r,s)(\rho,\sigma), x_1, \cdots, x_i)$
$= F_r(\rho, x_1, \cdots, x_{k-1}, M_s(x_k, \cdots, x_{k+s-1}), \cdots, x_i)$

(3) $F_i(\delta(t, r_1, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_t), x_1, \cdots, x_i)$
$= N_t(\tau, F_{r_1}(\rho_1, x_1, \cdots, x_{r_1}), \cdots\cdots, F_{r_t}(\rho_t, x_{r_1+\cdots+r_{t-1}+1}, \cdots, x_i))$

(4) $F_i(\gamma, x_1, \cdots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \cdots, x_i)$
$= F_{i-1}(d_j(\gamma), x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_i)$

注　しかしながら、この定義は、$n = 2, 3$ のときでさえ、H 写像、A_3 写像の定義より、形式上より強い条件となる。すなわち、H 写像、A_3 写像の定義には、我々の退化条件(4)に相等する条件が見当たらない。しかし、このことは、本節の冒頭で述べた、H 空間の積の単位元の有無と同様に、本質的な差ではない。しかも次の定理 1.2.2 と補題 1.2.3 が成立する。

$\boxed{\text{定理}}$ 1.2.2　A_n 空間の間の $\mathcal{H}_*$ の射について、次の二条件は同値な条件である。

i) この射は、A_n 構造を保つ。

ii) この射は、A_n form を持つ。

$\boxed{\text{補題}}$ 1.2.3　$\mathcal{H}_*$ の射 $f: X \to Y$ を、A_{n-1}-form を持つ、A_n 空間 X, Y の間の写像とする。ある連続写像 $F_n' : \Gamma_n \times X^n \longrightarrow Y$ が存在して定義 1.2.1 の条件 (2),(3) をみたすならば、条件 (1),(3),(4) を同時にみたす連続写像 $F_n : \Gamma_n \times X^n \longrightarrow Y$ が存在する。

1.3 補題 1.2.3 の証明

定理 1.2.2，補題 1.2.3 とも、空間に対してはこれらの類似が、J.D. Stasheff [15] により証明されている。我々は、定理 1.2.2 を4節において、また補題 1.2.3 を次に証明する。

さて、写像 $g_0, g_1 : \partial P_n \times X^n \longrightarrow Y$ を、それぞれ

$$g_0 = F_n' \mid \partial P_n \times X^n$$

$$g_1(\gamma, x_1, \cdots, x_n) = f(x_1)(f(x_2)(\cdots(f(x_{n-1})f(x_n))\cdots))$$

とおくと、$P_n \cong C(\partial P_n)$ とみなして、g_0 と g_1 はホモトピックであることがわかる。そこで、

$$f_0 = ad(g_0) : X^n \longrightarrow Y^{\partial P_n}$$

$$f_1 = ad(g_1) : X^n \longrightarrow Y^{\partial P_n}$$

とおくと、f_0 と f_1 もまたホモトピックである。ただし $ad(g)$ は、g の adjoint 写像である。

また、$X^{[n]} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in X^n \mid * \in \{x_1, \cdots, x_n\}\}$ に対しては、退化作用素 $\{d_j\}$ を用いて、$\{F_i\}_{i \leqq n}$ を $\bar{F}_n : P_n \times X^{[n]} \longrightarrow Y$ に延長することができる。ここで、定義 1.2.1 条件 (2), (3) から、$F_n' \mid \partial P_n \times X^{[n]} = \bar{F}_n \mid \partial P_n \times X^{[n]}$ であるから、$\bar{F}_n$ によるホモトピー：

$$f_0 \mid X^{[n]} \simeq f_1 \mid X^{[n]}$$

が与えられる。$\bar{F}_n$ の定義から、このホモトピーの拡張として、f_0 から f_1 へのホモトピーを与えることができれば、そのホモトピーに対応する写像が、条件 (2), (3), (4) を同時にみたす。次にその証明のための準備を行う。

$\boxed{\text{補題}}$ 1.3.1 (A. Zabrodsky [21]) A が B の部分空間で、Y' を任意の位相空間とするとき、$S(A)$ が $S(B)$ のレトラクトならば、$S(B \cup (A \times Y'))$ は $S(B \times Y')$ のレトラク

トである。

証明：　この証明は、自然なホモトピー同値

$$u_\lambda : S(B\cup(A\times Y')) \longrightarrow S(B)\vee S(A)\wedge Y'\vee S(Y')$$

と次の可換図から得られる。

$$\begin{array}{ccc}
S(B\cup(A\times Y')) & \xrightarrow[\simeq]{u_{B,A}} & S(B)\vee S(A)\wedge Y'\vee S(Y') \\
\Big\downarrow S(i') & & \Big\downarrow 1\vee S(i)\wedge 1\vee 1 \\
S(B\times Y') & \xrightarrow[\simeq]{u_{B,B}} & S(B)\vee S(B)\wedge Y'\vee S(Y')
\end{array}$$

ただし、i, i'は自然な包含写像である。また、$u_{B,A}$は、$v_1: B\cup(A\times Y')\longrightarrow B$, $v_2: B\cup(A\times Y')\longrightarrow A\wedge Y'$, $v_3: B\cup(A\times Y')\longrightarrow Y'$ を各々、第一成分への射影，スマッシュ積への自然な射影，第二成分への射影とするときに、

$$u_{B,A}(t,x) = \begin{cases} (3t)\wedge v_1(x)\vee * \vee * & , 0\leqq t\leqq \frac{1}{3} \\ * \vee ((3t-1)\wedge v_2(x))\vee * & , \frac{1}{3}\leqq t\leqq \frac{2}{3} \\ * \vee * \vee ((3t-2)\wedge v_3(x)) & , \frac{2}{3}\leqq t\leqq 1 \end{cases}$$

で定められる。 □

$\boxed{\text{補題}}$ 1.3.2 (I. M. James[7]) $\sigma: X'\longrightarrow \Omega_0(S(X'))$を恒等写像の adjoint とするとき、$X'$がH空間になるための必要十分条件は、$\sigma$が、左ホモトピー逆写像を持つことである。ただし、$\Omega_0$は、J. C. Moore の loop 空間であり、任意の空間Y'に対し、$\Omega_0(Y')$は結合的な積を持つH空間となる。

$\boxed{\text{系}}$ 1.3.3 (A. Zabrodski[21]) 写像$f: A\longrightarrow B$に対し、次の二つの命題は同値である。

i) $f^*: [B, X'] \longrightarrow [A, X']$ は、いかなるH空間X'に対しても全射である。

ii) $S(f) : S(A) \longrightarrow S(B)$ はホモトピー左逆写像を持つ，

証明：「i) ⇒ ii)」の証明は、写像の adjoint をとれば明らか。そこで「ii) ⇒ i)」を示そう。$S(f)$がホモトピー逆写像を持ったとすると、任意に与えられたH空間X'と写像 $g : A \longrightarrow X'$ に対して、$S(f)$のホモトピー左逆写像 $h : S(B) \longrightarrow S(A)$ を用いて、

$$g' = S(g) \circ h : S(B) \longrightarrow S(X')$$

とおけば、$g' \circ S(f) = S(g) \circ h \circ S(f) \simeq S(g)$ である。よってこの adjoint をとれば、

$$ad(g') \circ f \simeq \sigma \circ g : \begin{tikzcd} A \arrow[r] & \Omega_0(S(X')) \arrow[d, shift right, "r"'] \\ & X' \arrow[u, shift right, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

ただし $r : \Omega_0(S(X')) \longrightarrow X'$ は、σのホモトピー左逆写像である。故に、

$$(r \circ ad(g')) \circ f \simeq g : A \longrightarrow X'$$
$$r \circ ad(g') : B \longrightarrow X'$$

□

補題 1.3.4 (I.M. James [22]) 任意の空間X'に対し、$S(X'^{[n]})$は、$S(X'^{n})$のレトラクトである。

略証： 帰納法を用いて、次の等式から、補題1.3.1に帰着される。

$$X'^{[n+1]} = X'^{n} \times \{*\} \cup X'^{[n]} \times X'$$

□

補題 1.3.5 (I.M. James [22]) $A \subset B$ かつ $S(A)$が$S(B)$のレトラクトとすると、任意のH空間Xへの写像

$f_0, f_1 : B \longrightarrow X'$ が、ホモトピックであって、Aで一致しているなら、次の性質を持つホモトピーが存在する。

i) Fは、f_0からf_1へのホモトピー。

ii) $a \in A$ なら、$F(a,t) = f_0(a) = f_1(a)$

証明： Gを、与えられた、f_0からf_1へのホモトピーとし、$G_1 = G|_{A\times I}$ とおく。これは、

$$G_1(a,0) = G_1(a,1) = f_0(a) = f_1(a)$$

をみたすので、$G_2 : B \cup (A\times S^1) \longrightarrow X'$ として、

$$G_2|_{A\times S^1}(a,[t]) = G_1(a,t)$$

$$G_2|_B(b) = f_1(b)$$

$(A = A\times\{[0]\} = A\times\{[1]\}$ とみなす。)をとる。このG_2は、補題1.3.1および系1.3.3により、拡張

$$G_3 : B\times I \longrightarrow X'$$

をもつ。そこで、$F_1 : B\times I \longrightarrow X'$ を、

$$F_1(b,t) = \begin{cases} G(b,2t) & , t \le \frac{1}{2} \\ G(b,2-2t) & , t \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

により定めれば、

$F_1(b,0) = f_0(b)$, $F_1(b,1) = f_1(b)$

$F_1|_{A\times I}$ は $A\times\partial I$ をとめるホモトピーで、第一成分への射影にホモトピックである。

となるから、ホモトピーの一般論から、F_1にホモトピックで、$A\times I$に制限すると第一成分への射影となるような、f_0からf_1へのホモトピー

$F : B\times I \longrightarrow X'$, $F(b,0) = f_0(b)$, $F(b,1) = f_1(b)$

が存在する。 □

$\boxed{系}$ 1.3.6　A, B, X'については、補題1.3.7と同じ仮定をする。このとき、$f_0, f_1 : B \longrightarrow X'$ がホモトピッ

クであって、それとは別に $f_0|A$ と $f_1|A$ のホモトピーが与えられているとすると、与えられているホモトピー

$$F_0 : I \times A \longrightarrow X'$$

の拡張であるような、f_0 から f_1 へのホモトピーが存在する。

証明： まず、(B, A)のホモトピー拡張性質から、F_0 の拡張であるホモトピー $F' : I \times B \longrightarrow X'$ で、次の性質をもつものがある。

$$\begin{cases} F'(b,0) = f_0(b) \\ F'|_{A \times I} = F_0 \end{cases}$$

そこで、$f_0' : B \longrightarrow X'$ を、

$$f_0'(b) = F'(b,1)$$

により定めれば、$f_0' \simeq f_0 \simeq f_1$，$f_0'|A = f_1|A$ をみたすので、補題1.3.5より、$F'' : B \times I \longrightarrow X'$ で次の性質をもつものがある。

$$\begin{cases} F''(b,0) = f_0'(b) \quad , \quad F''(b,1) = f_1(b) \\ a \in A \text{ なら、} F''(a,t) = f_1(a) \end{cases}$$

そこで、$F''' : B \times I \longrightarrow X'$ を、

$$F'''(b,t) = \begin{cases} F'(b, 2t) & \cdots\ t \leqq \frac{1}{2} \\ F''(b, 2t-1) & \cdots\ t \geqq \frac{1}{2} \end{cases}$$

で定めると、F''' は次の性質をもつ。

$$F'''(b,0) = f_0(b)$$

$$F'''(b,1) = f_1(b)$$

$F'''|A \times I$ は、$A \times \partial I$ をとめておくホモトピーで F_0 にホモトピックである。

故に、ホモトピー論の一般論により F_0 を拡張したホモトピーで f_0 と f_1 が結ばれた。 □

この系1.3.6から、目標としていた補題1.2.3は、$A = X^{(n-1)}$, $B = X^n$, $X' = Y^{\partial P_n}$ とおいて得られる。

□

1.4 A_n 空間が作用する空間

A_n 空間の他の空間への作用を定義しておく。

<u>定義 1.4.1</u> A_n 空間 $(X, \{M_i\}_{2\leqq i\leqq n})$ が空間 W に、$\mathcal{K}_*$ の射 $g: X \longrightarrow W$ に関して A_n 作用で作用するとは、$m \leqq n+1$ であって、写像 $G_i: K_i \times W \times X^{i-1} \longrightarrow W$ $(2 \leqq i \leqq m)$ が存在して次の条件をみたすことである。

(1) $G_i(\partial_k(r,s)(\rho,\sigma), w, x_2, \cdots, x_i)$

$$= \begin{cases} G_r(\rho, w, x_2, \cdots, x_{k-1}, M_s(\sigma, x_k, \cdots, x_{k+s-1}), \cdots, x_i) & , k \geqq 2 \\ G_r(\rho, G_s(\sigma, w, x_2, \cdots, x_s), x_{s+1}, \cdots, x_i) & , k = 1 \end{cases}$$

(2) $G_i(\tau, w, x_2, \cdots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \cdots, x_i)$

$$= G_{i-1}(\Delta_j(\tau), w, x_2, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_i)$$

(3) $G_i(\tau, *, x_2, \cdots\cdots, x_i)$

$$= g \circ M_{i-1}(\Delta_1(\tau), x_2, \cdots\cdots, x_i)$$

この定義から、次の定理は明らか。

<u>定理 1.4.2.</u> X が A_n 空間のとき、次の二条件は同値。

i) X は A_{n+1} 空間

ii) X の積は、id_X に関して A_{n+1} 作用

□

§2 複体 K_i, Γ_i の構成

前節で述べた A_n form を記述する凸多面体 K_i, Γ_i とそれらの作用素とを具体的に構成する。

2.1 複体 K_i

まず、K_2は一点からなる空間とする。そのバウンダリー集合 ∂K_2 は空集合である。次に、

$$K_i \equiv \{ (t_1, \cdots, t_{i-2}) \in \mathbb{R}^{i-2} \mid 1 \leq t_1 \leq 2,\ \forall j,\ 1 \leq t_j \leq 2t_{j-1} \}$$

とおく。この時そのバウンダリー集合は

$$\partial K_i \equiv \left\{ (t_1, \cdots, t_{i-2}) \in \mathbb{R}^{i-2} \;\middle|\; \begin{array}{l} t_1 = 1 \text{ or } t_1 = 2 \text{ or } \exists j \geq 2\ \ t_j = 1 \text{ or} \\ t_j = 2t_{j-1} \end{array} \right\}$$

となる。次のような、バウンダリーの部分凸集合を考える。

i) $r \geq 2,\ s \geq 2,\ r+s = i+1,\ 2 \leq k \leq r$ に対して、

$$K_k(r,s) \ni (t_1, \cdots, t_{i-2})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t_1, \cdots, t_{i-2}) \in K_i \\ t_{k-1} = 2t_{k-2} \quad (\text{ただし } t_0 = 1 \text{ とする}) \\ (t_1, \cdots, t_{k-2}, t_{k+s-2}, \cdots, t_{i-2}) \in K_r \\ (t_k/t_{k-1}, \cdots\cdots, t_k/t_{k-1}) \in K_s \end{cases}$$

ii) $r \geq 2,\ s \geq 2,\ r+s = i+1,\ (k=1)$ に対して、

$$K_1(r,s) \ni (t_1, \cdots, t_{i-2})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t_1, \cdots, t_{i-2}) \in K_i \\ t_{s-1} = 1 \\ (t_1, \cdots, t_{s-2}) \in K_s \\ (t_s, \cdots, t_{i-2}) \in K_r \end{cases}$$

この $\{K_k(r,s)\}$ は、$\{i \cdot (i-1)/2\}$個の K_i の辺(face)

を定める。さらに、

i) $\bar{\partial}_{k}(r,s)\left((u_1,\cdots,u_{r-2}),(v_1,\cdots,v_{s-2})\right)$

$= (u_1,\cdots,u_{k-2},\ 2u_{k-2},\ 2u_{k-2}v_1,\ \cdots,\ 2u_{k-2}v_{s-2},\ u_{k-1},\ \cdots,\ u_{r-2})$

ii) $\bar{\partial}_1(r,s)\left((u_1,\cdots,u_{r-2}),(v_1,\cdots,v_{s-2})\right)$

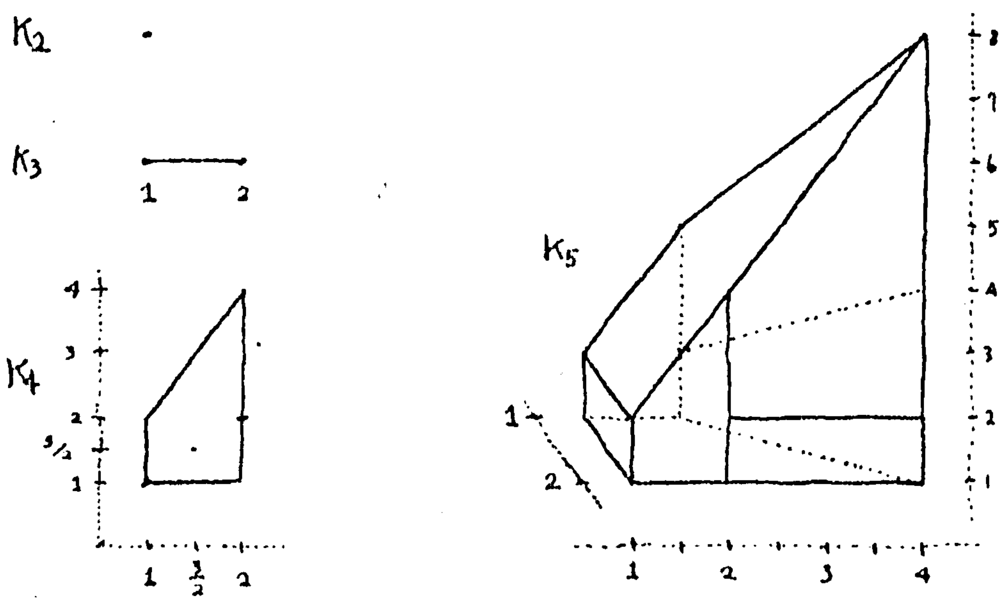
$= (v_1,\cdots,v_{s-2},\ 1,\ u_1,\ \cdots,\ u_{r-2})$

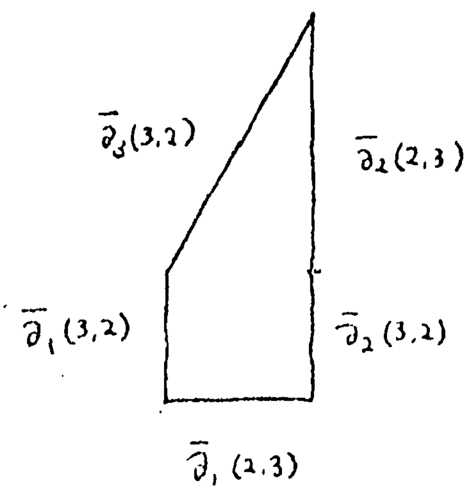
K_i の辺作用素を定める。ここで、以下の議論に必要となる K_i の三点を定義しておく。

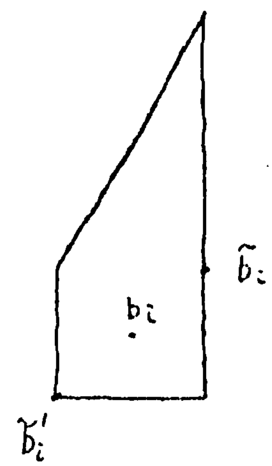
$b_i = (\frac{3}{2},\ \cdots\cdots,\ \frac{3}{2}) \in \mathrm{Int}\, K_i$

$\tilde{b}_i' = (1,\ \cdots\cdots,\ 1) \in \partial K_i$

$\tilde{b}_i = (2,\ \cdots\cdots,\ 2) \in \partial K_i$







次の条件☆をみたす同相写像 $\varphi_i : K_i \longrightarrow K_i$ を定義する。

☆ $\varphi_i \circ \bar{\partial}_k(r,s)(\rho,\sigma)$

$$= \begin{cases} \bar{\partial}_{k-1}(r,s)(\varphi_r(\rho),\sigma) & , k \geqq 2 \\ \bar{\partial}_s(s,r)(\varphi_s(\sigma),\varphi_r(\rho)) & , k = 1 \end{cases}$$

上記の条件をみたす写像 φ_i は、次の式をみたしている。

$$\varphi_i(\tilde{b}_i) = \varphi_i \circ \bar{\partial}_2(2,i-1)(*,\tilde{b}'_{i-1})$$
$$= \bar{\partial}_1(2,i-1)(*,\tilde{b}'_{i-1}) = \tilde{b}'_i$$

さて、この条件を利用して φ_i を帰納的に定義するために、次の等化写像を用意する。

∘ $\gamma_i : I \times \partial K_i \longrightarrow K_i$

∘ $\gamma_i(t,\tau) = (1-t)b_i + t\cdot\tau$

このとき、φ_i は、次の式で定義される。

i) $\varphi_3((t)) = (3-t)$, $\varphi_2(*) = *$

ii) $\varphi_i(\gamma_i(t,\tau))$

$$= \begin{cases} \gamma_i(t,\bar{\partial}_{k-1}(r,s)(\varphi_r(\rho),\sigma)), & \tau = \partial_k(r,s)(\rho,\sigma), k \geqq 2 \\ \gamma_i(t,\bar{\partial}_1(s,r)(\varphi_s(\sigma),\varphi_r(\rho))), & \tau = \partial_1(r,s)(\rho,\sigma) \end{cases}$$

§1の辺作用素間の関係式から、$\{\varphi_i\}$ はうまく定義されている。(well-deffined)

これらを用いて、次に中への同相写像

$\partial_k(r,s) : K_r \times K_s \longrightarrow K_i$

を定義し、その像として得られる凸複体 $L_k(r,s)$ の和集合をバウンダリーとして持つ複体として、K_i をとらえることができる。

$\boxed{定義}$ 2.1.1

i) $\partial_k(r,s) = \varphi_i^{-1}\circ\bar{\partial}_k(r,s)\circ(\varphi_r\times\varphi_s)$

$$= \begin{cases} \bar{\partial}_{k+1}(r,s)\cdot(1\times\varphi_s) & , k<r \\ \bar{\partial}_1(s,r)\circ T & , k=r \end{cases}$$

ii) $L_k(r,s) = \begin{cases} \bar{L}_{k+1}(r,s) & , k<r \\ \bar{L}_1(s,r) & , k=r \end{cases}$

iii) $\{\Delta_j : K_i \longrightarrow K_{i-1}\}$ は、次式で帰納的に定義される。

1) $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0_* : K_3 \longrightarrow K_2 = \{*\}$

2) $\Delta_j(\gamma_i(t, \partial_k(r,s)(\rho,\sigma)))$

$$= \begin{cases} \gamma_{i-1}(t, \partial_{k-1}(r-1,s)(\Delta_j(\rho),\sigma)), & j<k,\ r\geqq 3 \\ \gamma_{i-1}(t, \partial_k(r,s-1)(\rho, \Delta_{j-k+1}(\sigma))), & k\leqq j<k+s,\ s\geqq 3 \\ \gamma_{i-1}(t, \partial_k(r-1,s)(\Delta_{j-s+1}(\rho),\sigma)), & k+s\leqq j,\ r\geqq 3 \\ (1-t)b_{i-1} + t\cdot\sigma & , k=2, r=2, s=i-1, j=1 \\ (1-t)b_{i-1} + t\rho & , k=j, r=i-1, s=2, 1\leqq j\leqq i-1 \\ (1-t)b_{i-1} + t\rho & , k=j-1, r=i-1, s=2, 2\leqq j\leqq i \\ (1-t)b_{i-1} + t\sigma & , k=1, r=2, s=i-1, j=i \end{cases}$$

また、ここで同相写像$\{\eta_i : I\times K_i \to K_{i+1}\}$を与えるために、次の点を用意する。

$$b_i(t) = (1+t, \tfrac{3}{2}, ---, \tfrac{3}{2})$$

このとき、η_iは、次の式で帰納的に定義される。

i) $\eta_2(*,*) = b_3(t)$

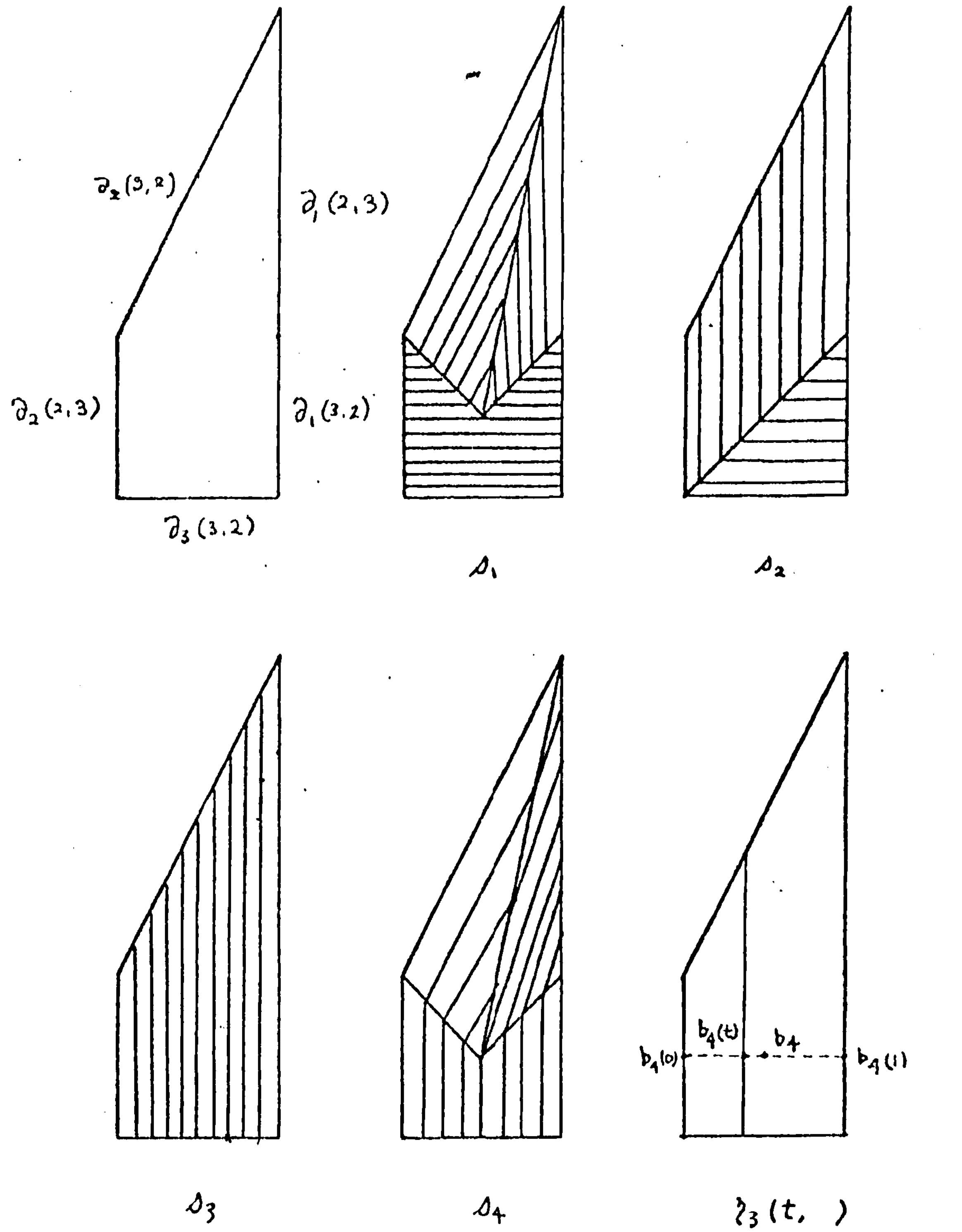
ii) $\eta_i(t, \gamma_i(u, \partial_k(r,s)(\rho,\sigma)))$

$$= (1-u)b_i(t) + u\cdot\partial_{k+1}(r+1,s)(\eta_r(t,\rho),\sigma)$$

このように定めれば、$\{\Delta_j\}$が$3\leqq j\leqq i-1$のとき、η_{i-1}と交換する。

$$\Delta_j\,\eta_{i-1}(t,\tau) = \eta_{i-2}(t, \Delta_{j-1}(\tau))$$

例えば、$i=4$のときは、次図に示されるようになる。



$\{s_j\}$, ∂_i に関しての、残りの関係も機械的に計算できるので、Stasheff[15] の K_i については、これらの性質をみた上で、次に、複体 Γ_i の構成に入る。

2.2 複体 Γ_i

複体 Γ_i は、K_i をその強変位レトラクトとし、自身は K_{i+1} の部分集合とみなされるような複体として構成される。

$\boxed{\text{定義}}$ 2.2.1　$I=[0,1]$ とし、複体 Γ_i とそのバウンダリー $\partial\Gamma_i$ とを、

$$(\Gamma_i,\partial\Gamma_i)\equiv(I\times K_i,\ \partial I\times K_i\cup I\times\partial K_i)$$

により定め、

$$\varepsilon_i=id: I\times K_i\longrightarrow\Gamma_i$$

とおき、辺作用素の一群を、次式で定める。

$$\delta_k(r,s)(\rho,\sigma)$$
$$=\begin{cases}\varepsilon_i(0,\sigma) & ,(k=r=1,\ s=i)\\ \varepsilon_i\circ(1\times\partial_k(r,s))\circ(\varepsilon_r^{-1}\times 1)(\rho,\sigma) & ,(\text{その他})\end{cases}$$

次に、辺作用素の他の一群 $\{\delta(t,r_1,\cdots,r_t):K_t\times\Gamma_{r_1}\times\cdots\times\Gamma_{r_t}\longrightarrow\Gamma_i\}$ を構成するために、$1\geqq b\geqq 0$ なる実数 b に対して、次の様な写像を定める。

$$\bar\delta_b(t,r_1,\cdots,r_t): K_t\times\Gamma_{r_1}\times\cdots\times\Gamma_{r_t}\longrightarrow K_i$$

これは、$(i-t)$ についての帰納的定義により行なう。まず、$t=i$ のときは、

$$\bar\delta_b(i,1,\cdots,1)((1-t)b_i+t\cdot\tau,*,\cdots,*)$$
$$=(1-bt)b_i+bt\cdot\tau$$

とおき、$t<t'$ なる t' については $\{\bar\delta_b(t',\cdots)\}$ が well-defined に定義されたとして、$\{\bar\delta_b(t,\cdots)\}$ を定義する。1から t のうちの、ある k をとったときに、

$$r_k\geqq 2,\qquad \rho_k=\varepsilon_{r_k}(u,\sigma_k)$$

であったとする。このような k は、$t<i$，$r_1+\cdots+r_t=i$ より必ずとれる。そこで、

$$\varepsilon_{r_k}(1, \sigma_k) = \delta(t', r'_1, \cdots, r'_{t'})(\tau', \rho'_1, \cdots, \rho'_{t'})$$
$$\varepsilon_{r_k}(0, \sigma_k) = \delta_1(1, r_k)(*, \sigma_k)$$

とするとき、

$$\overline{\delta}_b(t, r_1, \cdots, r_k, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_k, \cdots, \rho_t)$$
$$= u \cdot \overline{\delta}_b(t+t'-1, r_1, \cdots, r_{k-1}, r'_1, \cdots, r'_{t'}, r_{k+1}, \cdots, r_t)$$
$$(\partial_k(t, t')(\tau, \tau'), \rho_1, \cdots, \rho_{k-1}, \rho'_1, \cdots, \rho'_{t'}, \rho_{k+1}, \cdots, \rho_t)$$
$$+ (1-u)\, \partial_{r_1+\cdots+r_{k-1}+1}(r_1+\cdots+r_{k-1}+1+r_{k+1}+\cdots+r_t, r_k)$$
$$(\overline{\delta}_b(t, r_1, \cdots, r_{k-1}, 1, r_{k+1}, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_{k-1}, *, \rho_{k+1}, \cdots, \rho_t), \sigma_k)$$

これが $r_k \geqq 2$ なる k のとり方に依存しないことは、$\overline{\delta}_b(t, r_1, \cdots, r_t)$ の定義式の変形と、K_i の作用素の関係式から示される。つまり、

$$\overline{\delta}_b(t, r_1, \cdots, r_k, \cdots, r_j, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_k, \cdots, \rho_j, \cdots, \rho_t)$$
$$= u\, \overline{\delta}_b(t+t'-1, r_1, \cdots, r_{k-1}, r'_1, \cdots, r'_{t'}, r_{k+1}, \cdots, r_{j-1}, r_j, \cdots, r_t)$$
$$(\partial_k(t, t')(\tau, \tau'), \rho_1, \cdots, \rho_{k-1}, \rho'_1, \cdots, \rho'_{t'}, \rho_{k+1}, \cdots, \rho_t)$$
$$+ (1-u)\, \partial_{r_1+\cdots+r_{k-1}+1}(r_1+\cdots+r_{k-1}+1+r_{k+1}+\cdots+r_t, r_k)$$
$$(\overline{\delta}_b(t, r_1, \cdots, r_{k-1}, 1, r_{k+1}, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_{k-1}, *, \rho_{k+1}, \cdots, \rho_t), \sigma_k)$$
$$= uv\, \overline{\delta}_b(t+t'+t''-2, r_1, \cdots, r_{k-1}, r'_1, \cdots, r'_{t'}, r_{k+1}, \cdots, r_{j-1}, r''_1, \cdots, r''_{t''}, r_{j+1}, \cdots, r_t)$$
$$(\partial_{j+t'-1}(t+t'-1, t'')(\partial_k(t, t')(\tau, \tau'), \tau''), \rho_1, \cdots, \rho_{k-1}, \rho'_1, \cdots, \rho'_{t'}, \rho_{k+1}, \cdots \rho_{j-1},$$
$$\rho''_1, \cdots, \rho''_{t''}, \rho_{j+1}, \cdots, \rho_t)$$
$$+ u(1-v)\, \partial_{r_1+\cdots+r_{j-1}+1}(r_1+\cdots+r_{j-1}+1+r_{j+1}+\cdots+r_t, r_j)$$
$$(\overline{\delta}_b(t+t'-1, r_1, \cdots, r_{k-1}, r'_1, \cdots, r'_{t'}, r_{k+1}, \cdots, r_{j-1}, 1, r_{j+1}, \cdots, r_t)($$
$$\partial_k(t, t')(\tau, \tau'), \rho_1, \cdots, \rho_{k-1}, \rho'_1, \cdots, \rho'_{t'}, \rho_{k+1}, \cdots, \rho_{j-1}, *, \rho_{j+1}, \cdots, \rho_t), \sigma_j)$$
$$+ (1-u)v\, \partial_{r_1+\cdots+r_{k-1}+1}(r_1+\cdots+r_{k-1}+1+r_{k+1}+\cdots+r_t, r_k)$$
$$(\overline{\delta}_b(t+t''-1, r_1, \cdots, r_{k-1}, 1, r_{k+1}, \cdots, r_{j-1}, r''_1, \cdots, r''_{t''}, r_{j+1}, \cdots, r_t)(\partial_j(t, t'')$$
$$(\tau, \tau''), \rho_1, \cdots, \rho_{k-1}, *, \rho_{k+1}, \cdots, \rho_{j-1}, \rho''_1, \cdots, \rho''_{t''}, \rho_{j+1}, \cdots, \rho_t), \sigma_k)$$
$$+ (1-u)(1-v)\, \partial_{r_1+\cdots+r_{k-1}+1}(r_1+\cdots+r_{k-1}+1+r_{k+1}+\cdots+r_t, r_k)$$
$$(\partial_{r_1+\cdots+r_{k-1}+1+r_{k+1}+\cdots+r_{j-1}+1}(r_1+\cdots+r_{k-1}+1+r_{k+1}+\cdots+r_{j-1}+1+r_{j+1}+\cdots+r_t, r_j)$$
$$(\overline{\delta}_b(t, r_1, \cdots, r_{k-1}, 1, r_{k+1}, \cdots, r_{j-1}, 1, r_{j+1}, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_{k-1}, *, \rho_{k+1}, \cdots$$

$\rho_{j-1}, *, \rho_{j+1}, \cdots, \rho_t), \sigma_j), \sigma_k)$

$$= uv\,\bar{\delta}_b(t+t'+t''-2, r_1, \cdots, r_{k-1}, r'_1, \cdots, r'_{t'}, r_{k+1}, \cdots, r_{j-1}, r''_1, \cdots, r''_{t''}, r_{j+1}, \cdots, r_t)$$
$$(\partial_k(t+t''-1, t')(\partial_j(t, t'')(\tau, \tau''), \tau'), \rho_1, \cdots, \rho_{k-1}, \rho'_1, \cdots, \rho'_{t'}, \rho_{k+1}, \cdots, \rho_{j-1}, \rho''_1, \cdots, \rho''_{t''}, \rho_{j+1}, \cdots, \rho_t)$$
$$+u(1-v)\,\partial_{r_1+\cdots+r_{j-1}+1}(r_1+\cdots+r_{j-1}+1+r_{j+1}+\cdots+r_t, r_j)(\bar{\delta}_b(t+t'-1, r_1, \cdots, r_{k-1}, r'_1, \cdots, r'_{t'}, r_{k+1}, \cdots, r_{j-1}, 1, r_{j+1}, \cdots, r_t)(\partial_k(t, t')(\tau, \tau'), \rho_1, \cdots, \rho_{k-1}, \rho'_1, \cdots, \rho'_{t'}, \rho_{k+1}, \cdots, \rho_{j-1}, *, \rho_{j+1}, \cdots, \rho_t), \sigma_j)$$
$$+(1-u)v\,\partial_{r_1+\cdots+r_{k-1}+1}(r_1+\cdots+r_{k-1}+1+r_{k+1}+\cdots+r_t, r_k)(\bar{\delta}_b(t+t''-1, r_1, \cdots, r_{k-1}, 1, r_{k+1}, \cdots, r_{j-1}, r''_1, \cdots, r''_{t''}, r_{j+1}, \cdots, r_t)(\partial_j(t, t'')(\tau, \tau''), \rho_1, \cdots, \rho_{k-1}, *, \rho_{k+1}, \cdots, \rho_{j-1}, \rho''_1, \cdots, \rho''_{t''}, \rho_{j+1}, \cdots, \rho_t), \sigma_k)$$
$$+(1-u)(1-v)\,\partial_{r_1+\cdots+r_{j-1}+1}(r_1+\cdots+r_{j-1}+1+r_{j+1}+\cdots+r_t, r_j)$$
$$(\partial_{r_1+\cdots+r_{k-1}+1}(r_1+\cdots+r_{k-1}+1+r_{k+1}+\cdots+r_{j-1}+1+r_{j+1}+\cdots+r_t, r_k)(\bar{\delta}_b(t, r_1, \cdots, r_{k-1}, 1, r_{k+1}, \cdots, r_{j-1}, 1, r_{j+1}, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_{k-1}, *, \rho_{k+1}, \cdots, \rho_{j-1}, *, \rho_{j+1}, \cdots, \rho_t), \sigma_k), \sigma_j)$$
$$= v\,\bar{\delta}_b(t+t''-1, r_1, \cdots, r_k, \cdots, r_{j-1}, r''_1, \cdots, r''_{t''}, r_{j+1}, \cdots, r_t)$$
$$(\partial_j(t, t'')(\tau, \tau''), \rho_1, \cdots, \rho_k, \cdots, \rho_{j-1}, \rho''_1, \cdots, \rho''_{t''}, \rho_{j+1}, \cdots, \rho_t)$$
$$+(1-v)\,\partial_{r_1+\cdots+r_{j-1}+1}(r_1+\cdots+r_k+\cdots+r_{j-1}+1+r_{j+1}+\cdots+r_t, r_j)$$
$$(\bar{\delta}_b(t, r_1, \cdots, r_k, \cdots, r_{j-1}, 1, r_{j+1}, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_k, \cdots, \rho_{j-1}, *, \rho_{j+1}, \cdots, \rho_t), \sigma_j)$$

のように行なう。そこで、

定義 2.2.2 $\delta(t, r_1, \cdots, r_t): K_t \times \Gamma_{r_1} \times \cdots \times \Gamma_{r_t} \longrightarrow \Gamma_i$ を、
$$\delta(t, r_1, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_t) \equiv \varepsilon_i(1, \bar{\delta}_{\frac{1}{3}}(t, r_1, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_t))$$
とする。

上の定義から、$\{\delta(t, r_1, \cdots, r_t), \delta_k(r, s)\}$ が辺作用素となることは、直接計算により示される。例えば、
$$\delta(t, r_1, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_{j-1}, \delta_1(1, r_j)(*, \sigma_j), \rho_{j+1}, \cdots, \rho_t)$$

$$= \varepsilon_i(1,\ 0+1\cdot\partial_{r_1+\cdots+r_{j-1}+1}(r_1+\cdots+r_{j-1}+1+r_{j+1}+\cdots+r_t,\ r_j)$$
$$(\bar{\delta}_{\frac{1}{j}}(t, r_1,\cdots,r_{j-1},1,r_{j+1},\cdots,r_t)(\tau,\rho_1,\cdots,\rho_{j-1},*,\rho_{j+1},\cdots,\rho_t);\sigma_j)$$
$$= \delta_{r_1+\cdots+r_{j-1}+1}(r_1+\cdots+r_{j-1}+1+r_{j+1}+\cdots+r_t,\ r_j)$$
$$(\delta(t, r_1,\cdots,r_{j-1},1,r_{j+1},\cdots,r_t)(\tau,\rho_1,\cdots,\rho_{j-1},*,\rho_{j+1},\cdots,\rho_t),\ \sigma_j)$$

のように示される。

注　$\bar{\delta}_b(t, r_1,\cdots,r_t)$ の定義から、各 b について、

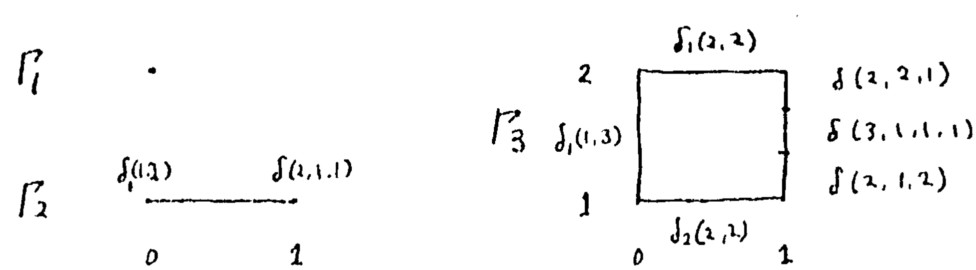
$$K_i = \bigcup_{r_1+\cdots+r_t=i} \mathrm{Im}\,\bar{\delta}_b(t, r_1,\cdots,r_t)$$

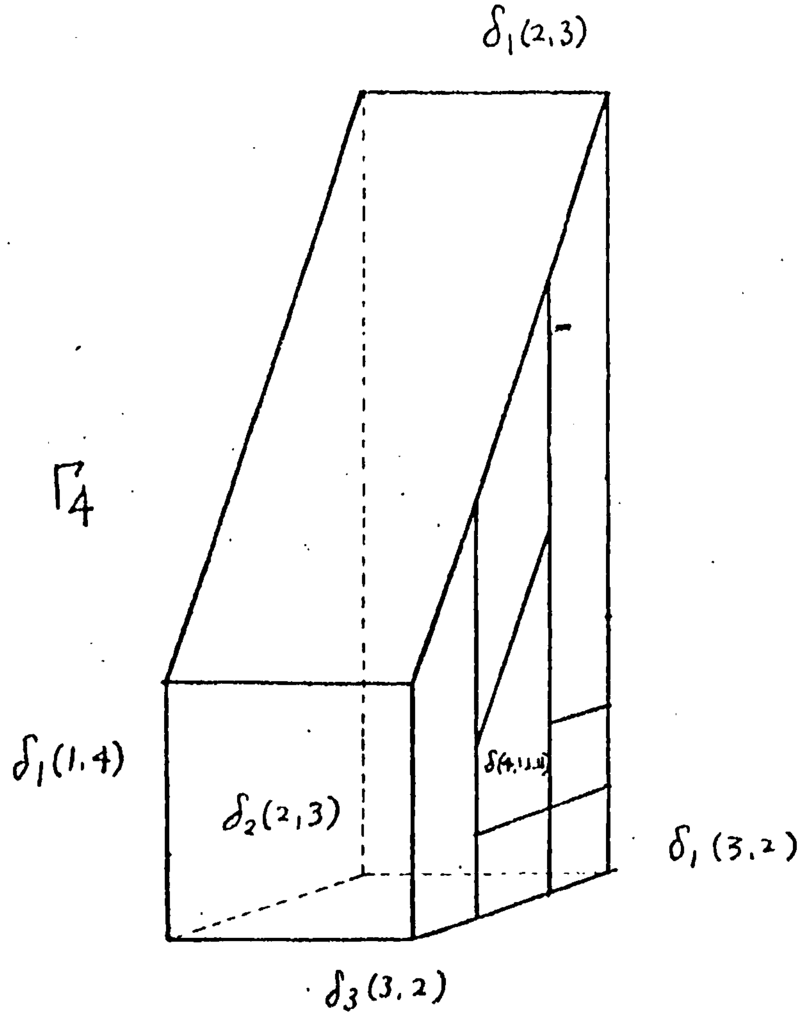
また Γ_i の辺化作用素 $\{d_j : \Gamma_i \longrightarrow \Gamma_{i-1}\}$ は、

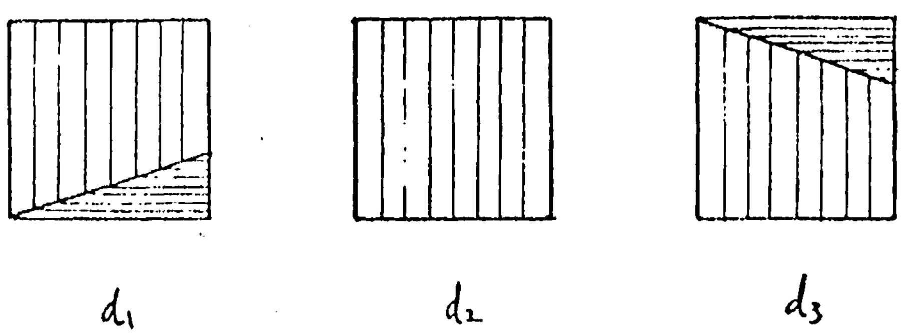
$$d_j(\varepsilon_i(u;\bar{\delta}_{1-\frac{j}{i}u}(t, r_1,\cdots,r_t)(\tau,\rho_1,\cdots,\rho_t)))$$

$$= \begin{cases} \varepsilon_{i-1}(u,\bar{\delta}_{1-\frac{j}{i}u}(t, r_1,\cdots,r_{s-1},r_s-1,r_{s+1},\cdots,r_t) \\ \qquad (\tau,\rho_1,\cdots,\rho_{s-1},d_{j-(r_1+\cdots+r_{s-1})}(\rho_s),\rho_{s+1},\cdots,\rho_t)) \\ \qquad ,\ r_1+\cdots+r_{s-1} < j \leqq r_1+\cdots+r_s,\quad r_s \geqq 2 \\ \varepsilon_{i-1}(u,\bar{\delta}_{1-\frac{j}{i}u}(t-1, r_1,\cdots,r_{s-1},r_{s+1},\cdots,r_t) \\ \qquad (\Delta_s(\tau),\rho_1,\cdots,\rho_{s-1},\rho_{s+1},\cdots,\rho_t) \\ \qquad ,\ r_1+\cdots+r_{s-1}+1 = j,\quad r_s = 1,\ t \geqq 3 \\ \varepsilon_{i-1}(uv,\sigma_2) \qquad ,\ t=2,\ r_1=1,\ r_2=i-1,\ j=1 \\ \varepsilon_{i-1}(uv,\sigma_1) \qquad ,\ t=2,\ r_1=i-1,\ r_2=1,\ j=i \end{cases}$$

により定義する。これで Γ_i がすべての i に対して定義された。本節の前半で述べたように、Γ_i は、K_i をその強変位レトラクトとするが、その証明は、次の§で行なう。




$\delta_1(2,3)$
Γ_4
$\delta_1(1,4)$
$\delta_2(2,3)$
$\delta_1(3,2)$
$\delta_3(3,2)$


d_1
d_2
d_3

§3 複体 K_i, P_i とその作用素の具体的性質

3.1 K_i の部分集合

複体 K_i の部分集合として、次の集合をとりあげる。

$$\partial K_i^{(1)} = \eta_{i-1}(\{1\} \times K_{i-1}) \subseteq \partial K_i$$

ここで、写像 $\bar{\eta}_i : K_i \longrightarrow \partial K_{i+1}^{(1)}$ を

$$\bar{\eta}_i(\tau) = \eta_i(1, \tau)$$

により定める。

$\boxed{\text{命題}}$3.1.1 $\bar{\eta}_i|_{\eta_{i-1}([0,\frac{1}{2}] \times K_{i-1})}$ は、$\mathrm{Im}\,\partial_1(i,2)$ の上への同相写像である。

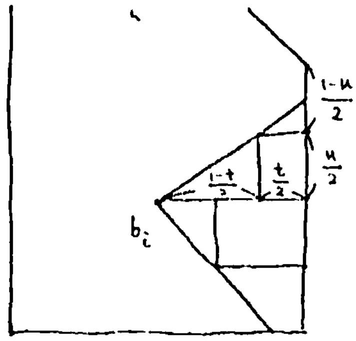
証明：次の変形に帰着される。

$$\eta_{i-1}\left(\frac{t}{2}, (1-u)b_{i-1} + u\tau'\right)$$
$$= \begin{cases} (1-u)b_i + u\,\eta_{i-1}\left(\frac{u+t-1}{2u}, \tau'\right), & t+u \geq 1,\ u>0 \\ (1-u)b_i + u\,\eta_{i-1}\left(\frac{1}{2}, \tau'\right), & t=1 \\ t\,b_i + (1-t)\,\partial_2(2, i-1)\left(*, \frac{u}{1-t}\tau' + \frac{1-t-u}{1-t}b_{i-1}\right) & \\ \quad , & 1>t,\ 1 \geq t+u \end{cases}$$

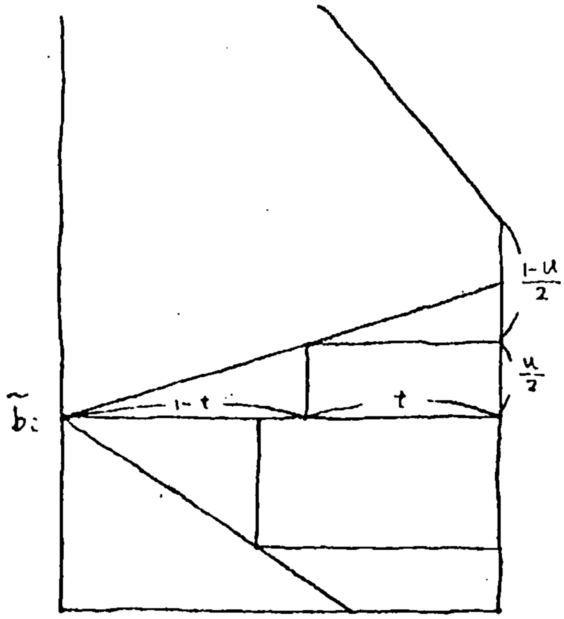
$$\eta_i\left(t, (1-u)b_{i-1} + u\tau'\right)$$
$$= \begin{cases} (1-u)\tilde{b}_i + u\,\eta_{i-1}\left(\frac{u+t-1}{u}, \tau'\right), & t+u \geq 1,\ u>0 \\ (1-u)\tilde{b}_i + u\,\eta_{i-1}(1, \tau'), & t=1 \\ t\,\tilde{b}_i + (1-t)\,\eta_{i-1}\left(0, \frac{u}{1-t}\tau' + \frac{1-t-u}{1-t}b_{i-1}\right) & \\ \quad , & 1>t,\ 1 \geq t+u \end{cases}$$

$\square$

K_i



K_i



ここで次のような分割を定義する。

$\boxed{\text{定義}}$ 3.1.2　$0 < a \leqq \frac{1}{2}$ なる定数 a に対して、次のように定義する。

$$K_i^{(a)} \equiv b_i(a) * \mathrm{Im}\,\partial_2(2, i-1)$$

$$K_i'^{(a)} \equiv K_i \setminus \mathrm{Int}\, K_i^{(a)}$$

$$K_i^H \equiv K_i^{(\frac{1}{2})}, \quad K_i'^H \equiv K_i'^{(\frac{1}{2})}$$

$$K_i^Q \equiv K_i^{(\frac{1}{4})}, \quad K_i'^Q \equiv K_i'^{(\frac{1}{4})}$$

$$L_{i+1}^H \equiv \partial_1(i,2)(K_i^H \times \{*\})$$

$$L_{i+1}'^H \equiv \partial_1(i,2)(K_i'^H \times \{*\}) \cup \bigcup_{\substack{r+s=i+2 \\ 2\leq r,\ 3\leq s}} \mathrm{Im}\,\partial_1(r,s)$$

$\boxed{\text{系}}$ 3.1.3　$\bar{\gamma}_i(K_i^Q) = L_{i+1}^H$, $\bar{\gamma}_i(K_i'^Q) = L_{i+1}'^H$ であり、$(K_i'^H, \partial K_i)$, $(K_i'^Q, \partial K_i)$ は D.R.-pair である。(c.f. [17])

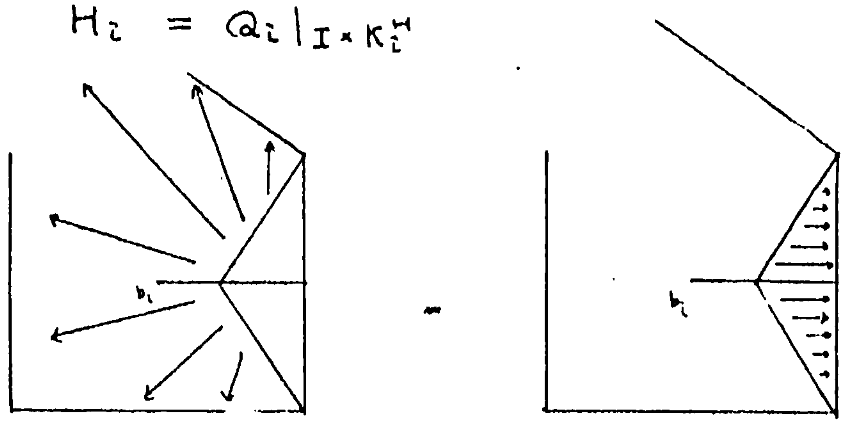
また、$K_i^H \cap \partial K_i = K_i^Q \cap \partial K_i = \mathrm{Im}\,\partial_2(2, i-1)$ であり、

次のような、deformation を与えるホモトピーが存在する。

i) $H_i : I \times (K_i^H, K_i^H \cap \partial K_i) \longrightarrow (K_i^H, K_i^H \cap \partial K_i)$

ii) $Q_i : I \times (K_i^Q, K_i^Q \cap \partial K_i) \longrightarrow (K_i^Q, K_i^Q \cap \partial K_i)$

ただし、
$$Q_i(t, \eta_{i-1}(u, \tau)) = \eta_{i-1}((1-t)u, \tau)$$
$$H_i = Q_i|_{I \times K_i^H}$$



3.2 A_n 準同型

次に、K_i が Γ_i の強変位レトラクトになることをいう。包含写像 $K_i \subset \Gamma_i$ は、$\delta_1(1, i)$ により定め、また射影 $\Gamma_i \longrightarrow K_i$ は、π_i により与える。ただし π_i は、

$$\pi_i(\varepsilon_i(u, \bar{\delta}_{1-\frac{2u}{3}}(t, r_1, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_t)))$$
$$= \bar{\delta}_1(t, r_1, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_t)$$

により定める。

$\boxed{\text{命題}}$ 3.2.1　$r_{i_1} \geq 2, \cdots, r_{i_s} \geq 2$ のとき、$(s \geq 0)$

$$\bar{\delta}_1(t, r_1, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_t)$$
$$= \begin{cases} \tau, & t = i,\ s = 0 \\ \partial_{k_s}(i - r_{i_s} + 1, r_{i_s}) \circ (\partial_{k_{s-1}}(i - (r_{i_s} + r_{i_{s-1}}) + 2, r_{i_{s-1}}) & \\ \quad \times 1) \circ \cdots \circ (\partial_{k_1}(i - (r_{i_s} + \cdots + r_{i_1}) + s, r_{i_1}) \times 1 \times \cdots \times 1) & \end{cases}$$

$$\left\{ \quad (\tau, \pi_{r_{i_1}}(\rho_{i_1}), \cdots, \pi_{r_{i_s}}(\rho_{i_s})) \quad , \quad s \geq 1 \right.$$

証明：帰納法を用いる。$t=i$ では $\bar{\delta}_1$ の定義からわかる。そこで $(i-t)$ についての帰納法でこれを示そう。$t'>t$ に対し証明されたとする。そこで t を固定し、$(r_1, \cdots, r_t)$ の中の2以上の数の個数 s についての帰納法を用いる。まず、

$$(r_1, \cdots, r_t) = (1, \cdots, 1, r_{i_1}, 1, \cdots, 1, r_{i_2}, 1, \cdots, 1, r_{i_s}, 1, \cdots, 1)$$

$$\rho_{i_s} = \varepsilon_{r_{i_s}}(u, \sigma_s)$$

$$\varepsilon_{r_{i_s}}(1, \sigma_s) = \delta(t', r_1', \cdots, r_{t'}')(\tau', \rho_1', \cdots, \rho_{t'}')$$

とおくと、$r_1' + \cdots + r_{t'}' = r_{i_s}$ であり、定義から、

$$\bar{\delta}_1(t, r_1, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_t)$$

$$= u\,\bar{\delta}_1(t+t'-1, r_1, \cdots, r_{i_s-1}, r_1', \cdots, r_{t'}', r_{i_s+1}, \cdots, r_t)$$

$$(\partial_k(t, t')(\tau, \tau'), \rho_1, \cdots, \rho_{i_s-1}, \rho_1', \cdots, \rho_{t'}', \rho_{i_s+1}, \cdots, \quad)$$

$$+ (1-u)\,\partial_{r_1+\cdots+r_{i_s-1}+1}(r_1+\cdots+r_{i_s-1}+1+r_{i_s+1}+\cdots+r_t, r_{i_s})$$

$$(\bar{\delta}_1(t, r_1, \cdots, r_{i_s-1}, 1, r_{i_s+1}, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_{i_s-1},$$

$$*, \rho_{i_s+1}, \cdots, \rho_t), \sigma_s)$$

である。よって、$s=1$ なら、$(t+t'-1)>t$ かつ、$(r_1, \cdots, r_{i_s-1}, 1, r_{i_s+1}, \cdots, r_t) = (1, \cdots, 1)$ より、帰納法の仮定に帰着する。また $s \geq 2$ なら、$(t+t'-1)>t$ かつ、$(r_1, \cdots, r_{i_s-1}, 1, r_{i_s+1}, \cdots, r_t)$ 内に2以上の数が $(s-1)$ 個しかないことから、やはり、帰納法の仮定に帰着する。

□

さて、次の条件をみたす deformation Λ_i を、

$$\Lambda_i : I \times \Gamma_i \longrightarrow \Gamma_i$$

$$\Lambda_i(v, \varepsilon_i(u, \bar{\delta}_{1-\frac{2u}{3}}(t, r_1, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_t)))$$

$$\equiv \varepsilon_i(vu, \bar{\delta}_{1-\frac{2vu}{3}}(t, r_1, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_t))$$

で定義する。

i) $\Lambda_i(0, \gamma) = \gamma$

ii) $\Lambda_i(1, \gamma) = \delta_1(1, i)(*, \pi_i(\gamma))$

iii) $\Lambda_{i-1} \cdot (1 \times d_j) = d_j \cdot \Lambda_i$

iv) $\Lambda_i \cdot (1 \times \delta_k(r, s)) = \delta_k(r, s) \cdot (\Lambda_r \times 1)$

この証明は、定義から直接導くことができる。

$\boxed{系}$ 3.2.2　Λ_i と π_i との関係式から、π_i は、次の諸性質をみたす。

i) $\pi_{i-1} \cdot d_j = s_j \cdot \pi_i$

ii) $\pi_i \cdot \delta_k(r, s) = \partial_k(r, s) \cdot (\pi_r \times 1)$

iii) $\pi_i \circ \delta(t, r_1, \cdots, r_t) = \bar{\delta}_1(t, r_1, \cdots, r_t)$

証明：i) は、$d_j \cdot \delta_1(1, i) = \delta_1(1, i-1) \cdot (1 \times s_j)$ より得られ、ii) は、$\delta_k(r, s) \cdot (\delta_1(1, \gamma) \times 1) = \delta_1(1, i)(1 \times \partial_k(r, s))$ より得られる。iii) は明らか。 □

ここで、A_n 空間 $(X, \{M_i\}_{i \le n})$, $(Y, \{N_i\}_{i \le n})$ の間の写像 $f : X \to Y$ が、

$$f \circ M_i = N_i \cdot (1 \times \overbrace{f \times \cdots \times f}^{i\text{個}})$$

をみたすとき、f を A_n 空間の間の A_n 準同型と呼ぶことにする。このとき、次の性質を導くことができる。

$\boxed{系}$ 3.2.3　f を A_n 空間 $(X, \{M_i\}_{i \le n})$, $(Y, \{N_i\}_{i \le n})$ の間の A_n 準同型写像とすると、A_n form を f に対して与えることができる。特に、恒等写像は A_n form を持つ写像である。

証明：　f に対して、写像 $F_i : \Gamma_i \times \overbrace{X \times \cdots \times X}^{i} \longrightarrow Y$ を、

$$F_i(\gamma, x_1, \cdots, x_i) = f \circ M_i(\pi_i(\gamma), x_1, \cdots, x_i)$$

によって定義すれば、上で示された命題により、この写像列 $\{F_i\}$ によって、f は A_n form をもつ写像となる。 □

3.3. 写像 ω_i について

次に、$\partial\Gamma_i$ の部分空間として、

$$\partial\Gamma_i^{(1)} = \varepsilon_i(\{1\}\times K_i) \qquad (\varepsilon_i : I\times K_i \longrightarrow \Gamma_i)$$

をとる。さら、同相写像 $\omega_i : \partial\Gamma_i^{(1)} \longrightarrow K_i$ を

$$\omega_i = pr_2 \circ (\varepsilon_i|_{\{1\}\times K_i})^{-1}$$

とおくと、

$$\omega_i \circ \delta(t, r_1, \cdots, r_t) = \bar{\delta}_{\frac{1}{3}}(t, r_1, \cdots, r_t)$$

となる。この同相写像 ω_i については、次の性質を得る。

$\boxed{\text{命題}}$ 3.3.1

i) $\quad s_j\,\omega_i(\gamma) = \omega_{i-1}(d_j(\gamma))$

ii) $\quad \partial_k(r,s)\circ(\omega_r\times 1) = \omega_i\circ\delta_k(r,s)$

証明： ii) は、辺作用素の間の関係式に 着する。そこで、i) のみ証明しよう。

$$d_j\,\delta(i,1,\cdots,1)(\tau,*,\cdots,*)$$
$$= \delta(i-1,1,\cdots,1)(s_j(\tau),*,\cdots,*)$$

であるので、$\gamma\in \mathrm{Im}\,\delta(i,1,\cdots,1)$ のときは、明らかである。またよって $\gamma\in\bigcup_{u\in[0,1]}\varepsilon_i(\{u\}\times \mathrm{Im}\,\bar{\delta}_{1-\frac{u}{3}}(i,1,\cdots,1))$ のときは、d_j の定義から成立する。同様な理由で、$\gamma\in\bigcup_{u\in[0,1]}\varepsilon_i(\{u\}\times \mathrm{Im}\,\bar{\delta}_{1-\frac{u}{3}}(t,r_1,\cdots,r_t))$ のときは、$\gamma\in \mathrm{Im}\,\delta(t,r_1,\cdots,r_t)$ のとき証明すれば十分である。ここで、

Γ_i については、すでに、証明されていることに注意して、i より小なる i については、すでに証明されているとする。さらに、$t=i$ についても、すでに証明されているので、$(i-t)$ についての帰納法を用いる。
そこで、$(\rho_1,\cdots,\rho_t)\in\Gamma_{r_1}\times\cdots\times\Gamma_{r_t}$ とし、

$$\rho_j \in \bigcup_{u\in[0,1]} \mathcal{E}_{\bar{j}}(\{u\}\times \operatorname{Im}\bar\delta(t',r_1',\cdots,r_{t'}'))$$

$$\rho_j = (1-u)\,\delta(r_j,1,\cdots,1)(\bar\rho_j,*,\cdots,*)+u\,\delta_k(r,s)(\rho,\sigma)$$

とすると、$(r_j\geq 2)$

$$\gamma' = \bar\delta_{\frac{1}{3}}(t,r_1,\cdots,r_j,\cdots,r_t)(\tau,\rho_1,\cdots,\rho_t)$$

に対しては、

$$\begin{aligned}\gamma' = (1-u)\,&\bar\delta_{\frac13}(t+r_j-1, r_1,\cdots,r_{j-1},\overbrace{1,\cdots,1}^{r_j},r_{j+1},\cdots,r_t)\\ &(\partial_j(t,r_j)(\tau,\bar\rho_j),\rho_1,\cdots,\rho_{j-1},*,\cdots,*,\rho_{j+1},\cdots,\rho_t)\\ &+u\cdot\partial_{k+r_1+\cdots+r_{j-1}}(i+1-s,s)(\bar\delta_{\frac13}(t,r_1,\cdots,r_{j-1},r,r_{j+1},\cdots,r_t)\\ &\times 1)(\tau,\rho_1,\cdots,\rho_{j-1},\rho,\rho_{j+1},\cdots,\rho_t,\sigma)\end{aligned}$$

とかくことができて、しかも、

$$\bar\delta_{\frac13}(t+r_j-1,r_1,\cdots,r_{j-1},1,\cdots,1,r_{j+1},\cdots,r_t)$$
$$(\partial_j(t,r_j)(\tau,\bar\rho_j)\,\rho_1,\cdots,\rho_{j-1},*,\cdots,*,\rho_{j+1},\cdots,\rho_t)$$

と

$$\partial_{k+r_1+\cdots+r_{j-1}}(i+1-s,s)(\bar\delta_{\frac13}(t,r_1,\cdots,r_{j-1},r,r_{j+1},\cdots,r_t)\times 1)$$
$$(\tau,\rho_1,\cdots,\rho_{j-1},\rho,\rho_{j+1},\cdots,\rho_t,\sigma)$$

とは K_i の中心からみて同じ辺の方向にあり、よって $2\leq l\leq i-1$ のとき、

$$\begin{aligned}s_l(\gamma') = (1-u)\,&s_l\bar\delta_{\frac13}(t+r_j-1,r_1,\cdots,\overset{j}{1},\cdots,\overset{j+r_j-1}{1},\cdots,r_t)\\ &(\partial_j(t,r_j)(\tau,\bar\rho_j),\rho_1,\cdots,\rho_{j-1},*,\cdots,*,\rho_{j+1},\cdots,\rho_t)\\ &+u\cdot s_l\,\partial_{k+r_1+\cdots+r_{j-1}}(i+1-s,s)(\bar\delta_{\frac13}(t,r_1,\cdots,r_{j-1},r,r_{j+1},\cdots\\ &\cdots,r_t)\times 1)(\tau,\rho_1,\cdots,\rho_{j-1},\rho,\rho_{j+1},\cdots,\rho_t,\sigma)\end{aligned}$$

となる。そこで m を、$r_1+\cdots+r_{m-1}<l\leq r_1+\cdots+r_m$ により定めれば、$m>j$, $m=j$ かつ $r_1+\cdots+r_{m-1}<l<k+r_1+\cdots+r_{j-1}$, $m=j$ かつ $k+r_1+\cdots+r_{j-1}\leq l\leq k+r_1+\cdots+r_j$, $m<j$ に従い、

各々計算することにより、定義から、

$$s_l(\gamma') = \omega_{i-1} d_l(\gamma)$$

$$\gamma = \delta(t, r_1, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_t)$$

が示される。(このとき $\gamma' = \omega_i(\gamma)$ となっている。)その計算は、例えば $m = j$ かつ $r_1 + \cdots + r_{j-1} < l < k + r_1 + \cdots + r_{j-1}$ のときは、

$$s_l \bar{\delta}_{\frac{1}{3}}(t + r_j - 1, r_1, \cdots, r_{j-1}, \overbrace{1, \cdots, 1}^{r_j}, r_{j+1}, \cdots, r_t)$$
$$= \omega_{i-1} d_l \delta(t + r_j - 1, r_1, \cdots, r_{j-1}, 1, \cdots, 1, r_{j+1}, \cdots, r_t)$$
$$= \omega_{i-1} \delta(t + r_j - 2, r_1, \cdots, r_{j-1}, \underbrace{1, \cdots, 1}_{r_j - 1}, r_{j+1}, \cdots, r_t)$$
$$\circ (s_{l-(r_1+\cdots+r_{j-1})+j-1} \times 1 \times \cdots \times 1)$$

$$s_l \partial_{k+r_1+\cdots+r_{j-1}}(i+1-s, s)(\bar{\delta}_{\frac{1}{3}}(t, r_1, \cdots, r_{j-1}, r, r_{j+1}, \cdots, r_t) \times 1)$$
$$= \partial_{k+r_1+\cdots+r_{j-1}-1}(i-s, s)(s_l \bar{\delta}_{\frac{1}{3}}(t, r_1, \cdots, r_{j-1}, r, r_{j+1}, \cdots, r_t) \times 1)$$
$$\circ (1 \times 1 \times \cdots \times 1 \times d_{l-(r_1+\cdots+r_{j-1})} \times 1 \times \cdots \times 1 \times 1)$$

かつまた

$$s_{l-(r_1+\cdots+r_{j-1})+j-1} \partial_j(t, r_j)(\tau, \bar{\rho}_j)$$
$$= \partial_j(t, r_j - 1)(\tau, s_{l-(r_1+\cdots+r_{j-1})}(\bar{\rho}_j))$$

であり、$\{d_j\}$ の定義から、

$$d_{l-(r_1+\cdots+r_{j-1})}(\rho_{r_j})$$
$$= (1-u)\ \delta(r_j - 1, 1, \cdots, 1)(s_{l-(r_1+\cdots+r_{j-1})}(\bar{\rho}_j), *, \cdots, *)$$
$$+ u\ \delta_{k-1}(r-1, s)(d_{l-(r_1, \cdots, r_{j-1})}(\rho), \sigma)$$

より、

$$s_j(\gamma') = \bar{\delta}_{\frac{1}{3}}(t, r_1, \cdots, r_{j-1}, r_j - 1, r_{j+1}, \cdots, r_t)$$
$$(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_{j-1}, d_{l-(r_1+\cdots+r_{j-1})}(\rho_j), \cdots, \rho_t)$$
$$= \omega_{i-1} \cdot d_l(\gamma)$$

となった。 □

§4　An form に随伴する構造

4.1　An 構造の構成

$(X, *)$ を An form をゆるす $\mathcal{H}_n$ の対象とする。ここで、X に随伴する An 構造を与える写像列 $\{p_i : E^i \longrightarrow P^{i-1},\ 1 \leq i \leq n\}$ の構成を与えることにする。(J. D. Stasheff [15]) この構成は、帰納法によって定められる。まず3つの写像

$$p_1 : E^1 \longrightarrow P^0 \quad , \quad E^1 = X, \quad P^0 = \{*\}$$

$$\alpha_1 : K_2 \times X \longrightarrow E^1$$

$$\beta_1 : K_2 \longrightarrow P^0$$

を、$p_1 =$ (定値写像)、$\alpha_1(*, x) = x$、$\beta_1(*) = *$ と定める。次に、$K_{i+1} \times X^i$ の部分空間 R_i を、

$$R_i \equiv K_{i+1} \times X \times X^{[i-1]} \cup \partial K_{i+1} \times X^i$$

とし、$K_{i+1} \times X^{i-1}$ の部分空間 S_{i-1} を、

$$S_{i-1} \equiv K_{i+1} \times X^{[i-1]} \cup \partial K_{i+1} \times X^{i-1}$$

とおく。ただし、$X^{[i-1]} \equiv \{(x_1, \cdots, x_{i-1}) \in X^{i-1} \mid * \in \{x_1, \cdots, x_{i-1}\}\}$

組 (E^i, α_i) $(i \leq n)$ は次の関係式によって定義する。

i) $\alpha_i : (K_{i+1} \times X^i, R_i) \longrightarrow (E^i, E^{i-1})$

は相対同相写像とする。

ii) $\alpha_i(\partial_k(r, s)(\rho, \sigma), x_1, \cdots, x_i)$

$$= \begin{cases} \alpha_{r-1}(\rho, x_1, \cdots, x_{k-1}, M_s(\sigma, x_k, \cdots, x_{k+s-1}), x_{k+s}, \cdots, x_i) \\ \qquad\qquad , \ k \leq r-1 \\ \alpha_{r-1}(\rho, x_1, \cdots, x_{r-1}) \quad , \ k = r \end{cases}$$

iii) $\alpha_i(\tau, x_1, \cdots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \cdots, x_i)$

$$= \alpha_{i-1}(s_j(\tau), x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_i), \quad 1 \leq j \leq i$$

また組 (P^{i-1}, β_i) ($i \leqq n+1$) を次の関係式によって定義する。

i) $\beta_i : (K_{i+1} \times X^{i-1}, \mathcal{S}_{i-1}) \longrightarrow (P^{i-1}, P^{i-2})$

は相対同相写像である。

ii) $\beta_i(\partial_k(r,s)(\rho,\sigma), x_2, \cdots, x_i)$

$$=\begin{cases} \beta_{r-1}(\rho, x_{s+1}, \cdots, x_i), & k=1 \\ \beta_{r-1}(\rho, x_2, \cdots, x_{k-1}, M_s(\sigma, x_k, \cdots, x_{k+s-1}), x_{k+s}, \cdots \\ \quad \cdots, x_i), & 2 \leqq k \leqq r-1 \\ \beta_{r-1}(\rho, x_2, \cdots, x_{r-1}), & k=r \end{cases}$$

iii) $\beta_i(\tau, x_2, \cdots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \cdots, x_i)$

$$= \beta_{i-1}(A_j(\tau), x_2, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_i)$$

ここで準ファイブレイション

$$p_i : E^i \longrightarrow P^{i-1}$$

を、$p_i(\alpha_i(\tau, x_1, \cdots, x_i)) = \beta_i(\tau, x_2, \cdots, x_i)$ によって定義する。

次に、(E^i, α_i) ($i \leqq n$) の部分空間 (D^{i-1}, γ_i) を、

i) D^{i-1} は可縮である。

ii) (D^{i-1}, E^{i-1}) は (P^{i-1}, P^{i-2}) と相対同相であると

という性質を有するものとして、以下に定義しよう。

i) $\gamma_i : (K_{i+1} \times X^{i-1}, \mathcal{S}_{i-1}) \longrightarrow (D^{i-1}, E^{i-1})$

は相対同相写像である。

ii) $\gamma_i(\partial_k(r,s)(\rho,\sigma), x_2, \cdots, x_i)$

$$=\begin{cases} \alpha_{r-1}(\rho, M_{s-1}(A_1(\sigma), x_2, \cdots, x_s), x_{s+1}, \cdots, x_i), & k=1 \\ \alpha_{r-1}(\rho, *, x_2, \cdots, x_{k-1}, M_s(\sigma, x_k, \cdots, x_{k+s-1}), x_{k+1}, \\ \qquad \cdots, x_i), & 2 \leqq k \leqq r-1 \\ \alpha_{r-1}(\rho, *, x_2, \cdots, x_{r-1}), & k=r \end{cases}$$

また、連続写像 $\sigma_i : D^{i-1} \longrightarrow P^{i-1}$ ($i \leqq n+1$) を

$$\sigma_i(\gamma_i(\tau, x_2, \cdots, x_i)) = \beta_i(\tau, x_2, \cdots, x_i)$$

($i \leqq n$ のとき、$\sigma_i = p_i|_{D^{i-1}}$ となる。)

とおくと、これが相対同相 $(D^{i-1}, E^{i-1}) \xrightarrow{\approx} (P^{i-1}, P^{i-2})$ を誘導する。

このように定義された空間の間の写像が well-defined であることをいうのには、次の補題が有効である。

$\boxed{\text{補題}}$ 4.1.1　増大する空間の列 $\{Z_i\}_{1 \leq i \leq \ell}$ が与えられているとする。

$$Z_1 \subset Z_2 \subset \cdots \cdots \subset Z_{\ell-1} \subset Z_\ell$$

このとき、次の i), ii) が成立する。

i) 写像の集合 $\{g_i' : Y \times K_{i+1} \times X^i \longrightarrow Z_i\}_{1 \leq i \leq \ell}$ が $\{g_i : Y \times E_i \longrightarrow Z_i\}_{1 \leq i \leq \ell}$ を誘導して、

$$g_i' = g_i \circ (id_Y \times \alpha_i)$$

が成立するための必要十分条件は、次の ①,②,③ で与えられる。

① g_1 が well-defined である。

② $g_i'(y, \partial_k(r,s)(\rho,\sigma), x_1, \cdots, x_i)$

$$= \begin{cases} g_{r-1}'(y, \rho, x_1, \cdots, x_{k-1}, M_s(\sigma, x_k, \cdots, x_{k+s-1}), \cdots, x_i) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , \; k \leq r-1 \\ g_{r-1}'(y, \rho, x_1, \cdots, x_{r-1}), \quad k = r \end{cases}$$

③ $g_i'(y, \tau, x_1, \cdots, x_{k-1}, *, x_{k+1}, \cdots, x_i)$

$$= g_{i-1}'(y, \Delta_k(\tau), x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_i)$$

ii) 写像の集合 $\{h_i' : Y \times K_{i+1} \times X^{i-1} \longrightarrow Z_i\}_{1 \leq i \leq \ell}$ が $\{h_i : Y \times P^{i-1} \longrightarrow Z_i\}_{1 \leq i \leq \ell}$ を誘導して、

$$h_i' = h_i \circ (id_Y \times \beta_i)$$

が成立するための必要十分条件は、次の ①,②,③ で与えられる。

① h_1 が well-defined である。

② $h_i'(y, \partial_k(r,s)(\rho,\sigma), x_1, \cdots, x_i)$

$$
=\begin{cases} h'_{r-1}(y,\ \rho,\ x_{s+1},\ \cdots\cdots,\ x_i) & ,\ k=1 \\ h'_{r-1}(y,\ \rho,\ x_2,\cdots,x_{k-1},M_s(\sigma,x_k,\cdots,x_{k+s-1}),\cdots,x_i) & \\ & ,\ 2\leqq k\leqq r-1 \\ h'_{r-1}(y,\ \rho,\ x_2,\cdots,\cdots,\ x_{r-1}) & ,\ k=r \end{cases}
$$

③ $h'_i(y,\tau,\ x_2,\cdots,x_{k-1},*,x_{k+1},\cdots,x_i)$

$\quad = h'_{i-1}(y,\ s_k(\tau),\ x_2,\cdots,x_{k-1},*,x_{k+1},\cdots,x_i)$

証明：i), ii) どちらも同様に証明できるから、i) のみ行なう。また必要性は明らかなので、十分であることを、帰納法を用いて証明する。まず条件①から、$1\leqq m<l$ なる m まで証明できたとする。α_{m+1} は、等化写像であるから、次の α) を示せば、g_{m+1} が誘導されることがわかる。

α) $\alpha_{m+1}(\tau_1,x_1,\cdots,x_{m+1})=\alpha_{m+1}(\tau_2,y_1,\cdots,y_{m+1})$ ならば任意の $y\in Y$ に対して、

$g'_{m+1}(y,\tau_1,x_1,\cdots,x_{m+1})=g'_{m+1}(y,\tau_2,y_1,\cdots,y_{m+1})$

さて、$\alpha_{m+1}(\tau_1,x_1,\cdots,x_{m+1})=\alpha_{m+1}(\tau_2,y_1,\cdots,y_{m+1})$ とすると、$(\tau_1,x_1,\cdots,x_{m+1})=(\tau_2,y_1,\cdots,y_{m+1})$ であるか、あるいは

$$
\begin{cases} \tau_1\in\partial K_{m+1}\ \ (イ)\ または\ \exists_{j\geqq 2}\ \ x_j=*\ \ (ロ) \\ \tau_2\in\partial K_{m+1}\ \ (イ)'\ または\ \exists_{j\geqq 2}\ \ y_j=*\ \ (ロ)' \end{cases}
$$

が成立する。$(\tau_1,x_1,\cdots,x_{m+1})=(\tau_2,y_1,\cdots,y_{m+1})$ でないときは、α) は自明ではないが、いずれにしても、帰納法の仮定と、②, ③ に帰着する。例えば、イ) かつ イ)' のときは、次のように証明される。

$\tau_1=\partial_{k_1}(r_1,s_1)(\rho_1,\sigma_1)$, $\tau_2=\partial_{k_2}(r_2,s_2)(\rho_2,\sigma_2)$

であり、

$$
\begin{cases} \alpha_{r_1-1}(\rho_1,\ x_1,\cdots,\ x_{k_1-1},\ M_{s_1}(\sigma_1,x_{k_1},\cdots),\cdots,x_{m+1}) & ,k_1<r_1 \\ \alpha_{r_1-1}(\rho_1,\ x_1,\ \cdots\cdots\cdots,\ x_{r_1-1}) & ,k_1=r_1 \end{cases}
$$

$$= \alpha_{m+1}(\tau_1, x_1, \text{-----}, x_{m+1})$$
$$= \alpha_{m+1}(\tau_2, y_1, \text{------}, y_{m+1})$$
$$= \begin{cases} \alpha_{r_2-1}(\rho_2, y_1, \text{---}, y_{k_2-1}, M_{s_2}(\sigma_2, y_{k_2}, \text{---}), \text{---}, y_{m+1}), & k_2 < r_2 \\ \alpha_{r_2-1}(\rho_2, y_1, \text{---------}, y_{r_2-1}) & , k_2 = r_2 \end{cases}$$

なので、②と帰納法の仮定から、

$$g'_{m+1}(y, \tau_1, x_1, \text{------}, x_{m+1})$$
$$= \begin{cases} g'_{r_1-1}(y, \rho_1, x_1, \text{---}, x_{k_1-1}, M_{s_1}(\sigma_1, x_{k_1}, \text{---}), \text{---}, x_{m+1}), & k_1 < r_1 \\ g'_{r_1-1}(y, \rho_1, x_1, \text{---------}, x_{r_1-1}) & , k_1 = r_1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} g_m(y, \alpha_{r_1-1}(\rho_1, x_1, \text{---}, x_{k_1-1}, M_{s_1}(\sigma_1, x_{k_1}, \text{---}), \text{---}, x_{m+1})), & k_1 < r_1 \\ g_m(y, \alpha_{r_1-1}(\rho_1, x_1, \text{---------}, x_{r_1-1}) & , k_1 = r_1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} g_m(y, \alpha_{r_2-1}(\rho_2, y_1, \text{---}, y_{k_2-1}, M_{s_2}(\sigma_2, x_{k_2}, \text{---}), \text{---}, x_{m+1})), & k_2 < r_2 \\ g_m(y, \alpha_{r_2-1}(\rho_2, y_1, \text{-------}, y_{r_2-1}) & , k_2 = r_2 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} g'_{r_2-1}(y, \rho_2, y_1, \text{---}, y_{k_2-1}, M_{s_2}(\sigma_2, x_{k_2}, \text{---}), \text{---}, x_{m+1})), & k_2 < r_2 \\ g'_{r_2-1}(y, \rho_2, y_1, \text{----------}, y_{r_2-1}) & , k_2 = r_2 \end{cases}$$
$$= g'_{m+1}(y, \tau_2, y_1, \text{--------}, y_{m+1})$$

よって、g'_{m+1} は、g_{m+1} を誘導して、

$$g'_{m+1} = g_{m+1} \circ (1 \times \alpha_{m+1})$$

となるから、帰納法が成立した。 $\square$

ここでこのような補題を挿入したのは、次のような反例があるからである。対応：

$$\begin{array}{ccc} X \times D^2 & \longrightarrow & E^{i+1} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (x, \gamma_{i+1}(\tau, x_2, \text{--}, x_{i+1})) & \longmapsto & \alpha_{i+1}(\tau, x, x_2, \text{--}, x_{i+1}) \end{array}$$

は、i が2以上ならば、厳密に結合的な積を持つときを除けば、写像とはならない。つまり、

$$\exists a, b, c \in X, \quad M_2(*, a, M_2(*, b, c)) \neq M_2(*, M_2(*, a, b), c)$$

であるとすると、

$$\tau = \partial_1(2,3)(*, \partial_1(2,2)(*, *))$$

に対して、

$$\begin{aligned}\gamma_3(\tau, b, c) &= \alpha_1(*, M_2(*, b, c)) \\ &= \alpha_1(*, M_2(*, *, M_2(*, b, c))) \\ &= \gamma_3(\tau, *, M_2(*, b, c))\end{aligned}$$

にもかかわらず、

$$\begin{aligned}(a, \gamma_3(\tau, *, M_2(*, b, c))) \longmapsto \alpha_3(\tau, a, *, M_2(*, b, c)) &= \alpha_1(*, M_3(\partial_1(2,2)(*,*), a, *, M_2(*, b, c))) \\ &= \alpha_1(*, M_2(*, a, M_2(*, b, c))) \\ &= M_2(*, a, M_2(*, b, c))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a, \gamma_3(\tau, b, c)) \longmapsto \alpha_3(\tau, a, b, c) &= \alpha_1(*, M_3(\partial_1(2,2)(*,*), a, b, c)) \\ &= M_2(*, M_2(*, a, b), c)\end{aligned}$$

となり、この対応は一意でない。

4.2　写像 κ_i と μ_{i-1}

前節において構成した E^{i-1} に対し、適当な写像 μ_{i-1} を定義すると、

$$(x, (1, e)) \sim \mu_{i-1}(x, e) \quad , \quad (1, e) \in CE^{i-1}$$

という同一視によって得られる接着空間 $E^{i-1} \cup_{\mu_{i-1}} X \times CE^{i-1}$ は E^i とホモトピー同値であることを知る。この節では、写像 $\kappa_i : X \times CE^{i-1} \longrightarrow E^i$, $\mu_{i-1} : X \times E^{i-1} \longrightarrow E^{i-1}$ を、次式をみたすように与えることとする。

$$\mu_{i-1}(x, e) = \kappa_i(x, (1, e))$$

$\boxed{定義}$ 4.2.1　$\kappa_i' : X \times I \times K_i \times X^{i-1} \longrightarrow E^i$ を

$$\kappa_i'(x, t, \tau, x_1, \cdots, x_{i-1}) = \alpha_i(\eta_i(t, \tau), x, x_1, \cdots, x_{i-1})$$

により定め、$\mu_{i-1}' : X \times K_i \times X^{i-1} \longrightarrow E^{i-1} \subset E^i$ を

$\mu'_{i-1}(x, \tau, x_1, \dots, x_{i-1}) = \alpha_i(\eta_i(1,\tau), x, x_1, \dots, x_{i-1})$

と定める。これらの写像から誘導される写像を、K_i, μ_{i-1} とする。

$\boxed{\text{命題}}$ 4.2.2　上の定義により、K_i, μ_{i-1} は well-defined である。

証明： $K'_i|_{X\times\{1\}\times K_i\times X^{i-1}} = \mu'_{i-1}$ とみなせるから、$\{K'_i\}$ が $\{K_i\}$ を導くことをいえばよい。

まず、$E^1 = X$ なので、$K_2 = K'_2$ は、うまく定義されている。また、

- $K'_i(x, t, \partial_k(r,s)(\rho,\sigma), x_1, \dots, x_{i-1})$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha_i(\eta_i(t, \partial_k(r,s)(\rho,\sigma)), x, x_1, \dots, x_{i-1}) \\
&= \alpha_i(\partial_{k+1}(r+1, s)(\eta_r(t,\rho), \sigma), x, x_1, \dots, x_{i-1}) \\
&= \begin{cases} \alpha_r(\eta_r(t,\rho), x, x_1, \dots, x_{k-1}, M_s(\sigma, x_k, \dots), \dots, x_{i-1}) \\ \alpha_r(\eta_r(t,\rho), x, x_1, \dots, x_{r-1}) \end{cases} \\
&= \begin{cases} K'_r(x, t, \rho, x_1, \dots, x_{k-1}, M_s(\sigma, x_k, \dots), \dots, x_{i-1}) \\ K'_r(x, t, \rho, x_1, \dots, x_{r-1}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

- $K'_i(x, t, \tau, x_1, \dots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \dots, x_{i-1})$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha_i(\eta_i(t,\tau), x, x_1, \dots, x_{j-1}, *, x_{j+1}, \dots, x_{i-1}) \\
&= \alpha_{i-1}(s_{j+1}\eta_i(t,\tau), x, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{i-1}) \\
&= \alpha_{i-1}(\eta_{i-1}(t, s_j(\tau)), x, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{i-1}) \\
&= K'_{i-1}(x, t, s_j(\tau), x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{i-1})
\end{aligned}
$$

より、補題 1.4.1 を用いることができて、下図を可換図とする $\{K''_i\}$ が存在する；

$$
\begin{tikzcd}
X \times I \times K_i \times X^{i-1} \arrow[r, "K'_i"'] \arrow[d, "1\times 1\times \alpha_{i-1}"] & E^i \\
X \times I \times E^{i-1} \arrow[ur, "K''_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

しかも、この K''_i は、

・ $K_i''(x, 0, \alpha_{i-1}(\tau, x_1, \cdots, x_{i-1}))$

$$= \alpha_i(\eta_i(0,\tau), x, x_1, \cdots, x_{i-1})$$
$$= \alpha_i(\partial_2(2,i)(*,\tau), x, x_1, \cdots, x_{i-1})$$
$$= \alpha_1(*, x) = x$$

・ $K_i''(x, t, *) = K_i''(x, t, \alpha_{i-1}(\tau, *, \cdots, *))$

$$= \alpha_i(\eta_i(t,\tau), x, *, \cdots, *)$$
$$= \alpha_{i-1}(\eta_{i-1}(t, s_{i-1}(\tau)), x, *, \cdots, *)$$
$$= \cdots = \alpha_2(\eta_2(t,*), x, *)$$
$$= \alpha_1(*, x) = x$$

より、$\pi_{i-1} : I \times E^{i-1} \longrightarrow CE^{i-1}$ を標準的な等化写像とすると、下図を可換にする $\{K_i\}$ がとれる。

$$\begin{tikzcd}
X \times I \times E^{i-1} \arrow[rr, "K_i''"] \arrow[d, "1\times\pi_{i-1}"'] & & E^i \\
X \times CE^{i-1} \arrow[urr, "K_i"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{系}}$ 4.2.3 $K_i|_{X\times CE^{i-2}} = K_{i-1}$, $K_i|_{X\times\{1\}\times E^{i-1}} = \mu_{i-1}$ □

以上の写像 K_i, μ_{i-1} を用いて、次の結果を得ることができる。

$\boxed{\text{定理}}$ 4.2.4 (Stasheff [15]) $E^i \simeq E^{i-1} \cup_{\mu_{i-1}} X \times CE^{i-1}$

しかしながら、Stasheffの証明には、4.1の最後に例として挙げた一意でない対応が用いられていて、全く不満足なものである。そこでこの定理の証明を新しく与えることとした。

4.3 定理4.2.4の証明

まず、$\overline{\kappa}_i : X\times I\times K_i\times X^{i-1} \longrightarrow K_{i+1}\times X^i$ を、

$$\overline{\kappa}_i(x, t, \tau, x_1, \cdots, x_{i-1}) = (\eta_i(t,\tau), x, x_1, \cdots, x_{i-1})$$

で定めると、下図は可換である。

$$\begin{tikzcd}
X\times I\times K_i\times X^{i-1} \arrow[r, "\overline{\kappa}_i"] \arrow[d, "(1\times\overline{\pi}_{i-1}\circ(1\times\alpha_{i-1}))"] & K_{i+1}\times X^i \arrow[d, "\alpha_i"] \\
X\times CE^{i-1} \arrow[r, "\kappa_i"] & E^i
\end{tikzcd}$$

そこでさらに

$$T_i \equiv I\times R_{i-1} \cup \partial I\times K_i\times X^{i-1} \cup I\times K_i\times\{*\}\times X^{i-2}$$
$$= I\times S_{i-1} \cup \partial I\times K_i\times X^{i-1} \subset I\times K_i\times X^{i-1}$$
$$F_{i-1} \equiv C(D^{i-2}) \cup \{1\}\times E^{i-1} \subset C(E^{i-1})$$

とおくと、定義から、

$$X\times T_i = \overline{\kappa}_i^{-1}(R_i)$$
$$\kappa_i^{-1}(E^{i-1}) = F_{i-1}$$
$$\overline{\pi}_{i-1}^{-1}(F_{i-1}) = I\times E^{i-2} \cup \partial I\times E^{i-1} \cup I\times D^{i-2}$$
$$(1\times\alpha_{i-1})^{-1}(\overline{\pi}_{i-1}^{-1}(F_{i-1})) = T_i$$

に注意して、次の命題を得る。

$\boxed{\text{命題}}$ 4.3.1　$\kappa_i : (X\times C(E^{i-1}), X\times F_{i-1}) \to (E^i, E^{i-1})$
は相対同相写像である。

証明：$\alpha_i : (K_{i+1}\times X^i, R_i) \longrightarrow (E^i, E^{i-1})$ は相対同相写像である。同様に、

$$(1\times\alpha_{i-1}) : (I\times K_i\times X^{i-1}, I\times R_{i-1}) \longrightarrow (I\times E^{i-1}, I\times E^{i-2})$$

も相対同相写像であり、しかも、$T_i \supset I\times R_{i-1}$ より、

$$(1\times\alpha_{i-1}) : (I\times K_i\times X^{i-1}, T_i) \longrightarrow (I\times E^{i-1}, \overline{\pi}_{i-1}^{-1}(F_{i-1}))$$

もまた相対同相写像である。また、

$$\overline{\pi}_{i-1} : (I\times E^{i-1},\ I\times\{1\}\cup\{0\}\times E^{i-1}) \longrightarrow (C(E^{i-1}),\ *)$$

は相対同相写像であり、$* \subset F_{i-1}$ より、

$$\overline{\pi}_{i-1} : (I\times E^{i-1},\ \overline{\pi}_{i-1}^{-1}(F_{i-1})) \longrightarrow (C(E^{i-1}),\ F_{i-1})$$

も相対同相写像である。$\overline{\kappa}_i$ は同相写像であるから、結局、次の可換図は κ_i を除いて相対同相からなる図となった。

$$\begin{tikzcd}
(X\times I\times K_i\times X^{i-1},\ X\times T_i) \arrow[r, "\overline{\kappa}_i"] \arrow[d, "1\times 1\times\alpha_{i-1}"] & (K_{i+1}\times X^i,\ R^i) \arrow[dd, "\alpha_i"] \\
(X\times I\times E^{i-1},\ X\times\overline{\pi}_{i-1}^{-1}(F_{i-1})) \arrow[d, "1\times\overline{\pi}_{i-1}"] & \\
(X\times C(E^{i-1}),\ X\times F_{i-1}) \arrow[r, "\kappa_i"] & (E^i,\ E^{i-1})
\end{tikzcd}$$

よって、$\kappa_i : (X\times CE^{i-1},\ X\times F_{i-1}) \longrightarrow (E^i,\ E^{i-1})$ も相対同相でなければならない。 □

この命題から、$E^i \equiv E^{i-1}\cup_{\kappa_i|X\times F_{i-1}} X\times CE^{i-1}$, $F_{i-1} = CD^{i-2}\cup\{1\}\times E^{i-1}$ と知る。また、$\{D^j\}$ は可縮である。(J. D. Stasheff [15]) しかも、(E^{i-1}, D^{i-2}) はNDR-pair (i.e. ホモトピー拡張性質をもつ) であるので、ホモトピー論の一般的議論により、$E^i \simeq E^{i-1} \cup_{\mu_{i-1}} X\times CE^{i-1}$ すなわち、定理　　　が示される。□

4.4、定理 1.2.2 の証明

この節のもう一つの目標は§1で予告した定理の証明である。すでに前節においてその性質を議論した写像 ω_i が決定的に働く。

まず、A_n form を持つ写像が A_n 構造を保つことをいう。つまり、X, Y を A_n 空間とし、各々の A_n 構造を、

$$
\begin{tikzcd}
K_{i+1}\times X^i \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_i^X"] & K_{i+1}\times X^{i-1} \arrow[d, "\beta_i^X"] \\
E^i(X) \arrow[r, "p_i^X"] & P^{i-1}(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K_{i+1}\times Y^i \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_i^Y"] & K_{i+1}\times Y^{i-1} \arrow[d, "\beta_i^Y"] \\
E^i(Y) \arrow[r, "p_i^Y"] & P^{i-1}(Y)
\end{tikzcd}
$$

とする。このとき与えられた写像 $f: X\longrightarrow Y$ が A_n form $\{F_i\}_{i\leq n}$ を持つとして、構造写像

$$f_i^E : E^i(X)\longrightarrow E^i(Y)\ ,\quad i\leq n$$
$$f_{i-1}^P : P^{i-1}(X)\longrightarrow P^{i-1}(Y)\ ,\quad i\leq n+1$$

を構成しよう。

$\boxed{\text{定義}}$ 4.4.1　$\sigma=\omega_{i+1}(\gamma)$, $\gamma=\delta(t,r_1,\cdots,r_t)(\tau,\rho_1,\cdots,\rho_t)$ に対して、f_i^E, f_{i-1}^P を次式で定義する。

i) $f_i^E(\alpha_i^X(\sigma,x_1,\text{------},x_i))$
$$\equiv \alpha_{t-1}^Y(\tau,F_{r_1}(\rho_1,x_1,\cdots,x_{r_1}),\text{----},F_{r_{t-1}}(\rho_{t-1},x_{r_1+\cdots+r_{t-2}+1},\cdots,x_{r_1+\cdots+r_{t-1}}))$$

ii) $f_{i-1}^P(\beta_i^X(\sigma,x_2,\text{-----},x_i))$
$$\equiv \beta_{t-1}^X(\tau,F_{r_2}(\rho_2,x_{r_1+1},\cdots,x_{r_1+r_2}),\text{---},F_{r_{t-1}}(\rho_{t-1},x_{r_1+\cdots+r_{t-2}+1},\cdots,x_{r_1+\cdots+r_{t-1}}))$$

この定義が well-defined であることは、命題 3.3.1 より明らか。また定義から、$f_1^E(x)=f(x)$ は明らかであり、この $\{f_i^E, f_{i-1}^P\}$ が A_n 構造の間の可換図を与える。

次にこの逆を証明しよう。そのために、準ファイブレイション：$Y\hookrightarrow E^i(Y)\longrightarrow P^{i-1}(Y)$ を、ホモトピーを除いて、ファイブレイション：$F\hookrightarrow \bar{E}^i\xrightarrow{\bar{p}_i} P^{i-1}(Y)$ にと

り換えると、 $F \xrightarrow[\gamma]{\simeq} Y$, $\bar{E}^i \simeq E^i(Y)$ であるので、F への A_n form $\{\bar{F}_i\}$ が存在すれば、$F_i = \gamma\circ\bar{F}_i$ とおくことにより、Y への A_n form がえられる。証明は帰納法によって、$\{\bar{F}_j\}_{j<i}$ が定義され、可換図：

$$\begin{tikzcd} E^i(X) \arrow[r, "h_i"] \arrow[d, "p_i^X"] & \bar{E}^i \arrow[d, "\bar{p}_i"] \\ P^{i-1}(X) \arrow[r, "g_{i-1}"] & P^{i-1}(Y) \end{tikzcd}$$

で、g_{i-1}, $h_i|_{E^{i-1}(X)}$ が、$\{\bar{F}_j\}_{j<i}$ により定められる写像に一致するようにとっていく。これは、$i=1$ のときは、

$$\begin{tikzcd} E^1(X) = X \arrow[r, "h_1"] \arrow[d] & F \arrow[d] \\ * \arrow[r, "g_0"] & * \end{tikzcd} \qquad \gamma\circ h_1 = f$$

より、成立している。そこで i まで成立したとする。ところで $J = \mathrm{Int}\,\omega_{i+1}(\mathrm{Im}\,\delta(2,i,1))$ とおくと、

$(K_{i+1}, K_{i+1} - J)$ は NDR-pair

$(K_{i+1} - J, \partial K_{i+1})$ は DR-pair

であるから、ホモトピー拡張性質を用いて、

$h_i|_{\alpha_i^X((K_{i+1}-J)\times X^i \cup K_{i+1}\times X\times X^{[i-1]})}$

が、$\{\bar{F}_j\}_{j<i}$ により定義されるものに一致しているとしてよい。そこで、

$$\bar{F}_i'(\gamma, x_1, \dots, x_i) \equiv h_i(\alpha_i^X(\sigma, x_1, \dots, x_i)),\quad \sigma = \omega_{i+1}\cdot\delta(2,i,1)(*,\gamma,*)$$

とおくと、$\bar{F}_i'$ は、バウンダリー条件(2),(3)をみたすから、補題1,2,3より、A_i-form $\{\bar{F}_j\}_{j\le i}$ がとれる。さらに、$(P^i(X), P^{i-1}(X))$ は NDR-pair で、$\bar{p}_{i+1}$ が fibration なので、h_{i+1}, g_i を、帰納法の条件をみたすように、

変形することができる。

4.5　結合的H空間への写像。

上記定理1.2.2により，我々はその二つの同値な条件が成立するとき，その写像をA_n写像とよぶことにする。

ところで，A_n写像という用語は，A_n空間$(X, \{M_i\}_{i\leq n})$から，結合的H空間Yへの写像$f: X \to Y$が次の条件をみたすときにも使用される。

i) f は $\mathcal{K}_*$の射である。

ii) 連続写像の列$\{h_i : K_{i+1} \times X^i \longrightarrow Y\}_{i\leq n-1}$があって，次の①〜③をみたす。

① $h_1(*, x) = f(x)$

② $h_i(\partial_k(r,s)(\rho,\sigma), x_1, \cdots, x_i)$
$= h_{r-1}(\rho, x_1, \cdots, x_{k-1}, M_s(\sigma, x_k, \cdots, x_{k+s-1}), \cdots, x_i)$
$, k \leq r-1, r \geq 2, s \geq 2, r+s = i+2$

③ $h_i(\partial_r(r,s)(\rho,\sigma), x_1, \cdots, x_i)$
$= h_{r-1}(\rho, x_1, \cdots, x_{r-1}) \cdot h_{s-1}(\sigma, x_k, \cdots, x_i)$

この「A_n写像」が我々のA_n写像の特殊な場合であることを次に示そう。まず，2節で作った同相写像$\varphi_i : K_i \longrightarrow K_i$を用いれば，上記条件ii)の②,③は，次のように，書き換えられる。

②' $h_i(\partial_{k+1}(r+1,s)(\rho,\sigma), x_1, \cdots, x_i)$
$= h_r(\rho, x_1, \cdots, x_{k-1}, M_s(\sigma, x_k, \cdots, x_{k+s-1}), \cdots, x_i)$
$, 1 \leq k \leq r, r+s = i+1, r \geq 1, s \geq 2$

③' $h_i(\partial_1(r+1,s+1)(\rho,\sigma), x_1, \cdots, x_i)$
$= h_s(\sigma, x_1, \cdots, x_s) \cdot h_r(\rho, x_{s+1}, \cdots, x_i), r \geq 1, s \geq 1$

$, \quad r+s=i$

ところで、第二節における K_i の構成から、K_i は ε_i を通して、$\tau_i([\frac{2}{3},1]\times K_i)$ と同一視できるから、(退化作用素は無視する。) $\{k_i\}$ がさらに次の条件をみたすようにとりかえられれば、補題1.2.3の下で、f の A_n form が存在する。

④′ $\frac{2}{3} \leqq u \leqq 1$ に対して、

$$k_i(\tau_i(u, \bar{\delta}_{1-u}(t, r_1, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_t), x_1, \cdots, x_i)$$
$$= k_i(\tau_i(1, \bar{\delta}_0(t, r_1, \cdots, r_t)(\tau, \rho_1, \cdots, \rho_t), x_1, \cdots, x_i)$$

この変形は、∂K_{i+1} が $\partial K_{i+1} \cup \tau_i([\frac{2}{3},1]\times K_i)$ の強変位レトラクトであることと、$(K_{i+1}, \partial K_{i+1} \cup \tau_i([\frac{2}{3},1]\times K_i))$ のホモトピー拡張性質から、帰納的に行なわれる。

§5　E^i, P^{i-1} の分割と、μ_{i-1}, P_i

ここでは、第　節で用意した K_i, $\partial K_i^{(1)}$ の分割を用いて、E^i, P^{i-1} を分割し、さらに写像 μ_{i-1}, P_i がその分割を保つ写像となることをみる。

5.1　E^i の分割

次のように E^i の分割を与える。

$\boxed{\text{定義}}$ 5.1.1　$0 < a \leqq \frac{1}{2}$ に対して、

$$M_1^i(a) \equiv \alpha_i(K_{i+1}^a \times X^i)$$
$$M_2^i(a) \equiv \alpha_i(K_{i+1}^{\prime a} \times X^i \cup K_{i+1} \times X \times X^{[i]})$$
$$M_0^i(a) \equiv \alpha_i((K_{i+1}^a \cap K_{i+1}^{\prime a}) \times X^i)$$

この定義から直ちに $M_1^i(a) \cup M_2^i(a) = E^i$ であり、次の命題も成立する。

$\boxed{\text{命題}}$ 5.1.2　$M_1^i(a) \cap M_2^i(a) = M_0^i(a)$

証明：　この命題を証明するために、次の補題を用意する。

$\boxed{\text{補題}}$ 5.1.3　$0 < a \leqq \frac{1}{2}$ に対して、

i)　$M_1^i(a) \cap E^{i-1} = M_1^{i-1}(a)$

ii)　$M_2^i(a) \supseteq E^{i-1}$

iii)　$M_0^i(a) \cap E^{i-1} = M_1^{i-1}(a)$

証明：(i)　$\tau \in K_{i+1}^a$ のとき、

$$y = \alpha_i(\tau, x_1, \cdots, x_i) \in E^{i-1}$$

$\Leftrightarrow$ $\left(\tau \in \mathrm{Im}\, \partial_2(2, i)\right.$ または、$x_j = *$ なる $j \geqq 2$ があ $\left.\text{る。}\right)$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \tau = \partial_2(2, i)(*, \tau') \text{ なる } \tau' \in K_i \text{ があるか、または} \\ x_j = * \text{ なる } j \geqq 2 \text{ がある。} \end{array}\right\}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \alpha_1(*, x_1) = x_1 \text{ となるか、または} \\ y = \alpha_{i-1}(s_j(\tau), x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_i) \text{ なる } j \geqq 2 \\ \text{がある。} \end{array}\right\}$

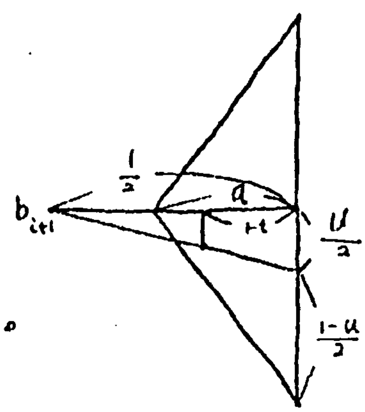
ここで、$X \subset M_1^{i-1}(a)$ なので、$s_j(\tau)$ が K_i^a に入ることがいえれば、$M_1^i(a) \cap E^{i-1} \subset M_1^{i-1}(a)$ がいえることになる。そのため、$\tau \in K_{i+1}^a$ を次のように表示する。

$$\tau = (1-t)\cdot b_{i+1} + t\cdot\partial_2(2, i)(*, (1-u)\cdot b_i + u\cdot\tau''), \ \tau'' \in \partial K_i,$$
$$t \geqq 1 - (1-u)a$$

$2 \leqq j \leqq i$ なる j に対しては、

$$s_j(\tau) = (1-t)\cdot b_i + t\cdot\partial_2(2, i-1)$$
$$(*, s_{j-1}((1-u)b_i + u\tau''))$$

であり、$j \geqq 3$ なら、$j-1 \geqq 2$ なので、$s_j(\tau) \in K_i^a$ は明らか。



$j = 2$ のときも、

$$s_1((1-u)b_i + u\tau'')$$

は、中心 b_{i-1} から $\frac{u}{2}$ より小さい距離になければならないから、$s_1((1-u)b_i + u\tau'') = (1-u')b_{i-1} + u'\tau'''$ とかくと、

$$u' \leqq u, \quad 1-(1-u)a \geqq 1-(1-u')a$$

が成立し、よって $s_j(\tau) \in K_i^a$ がいえた。また、$M_1^{i-1}(a)$ が $M_1^i(a) \cap E^{i-1}$ に含まれることは、自明。

(ii) これは、$M_1^i(a)$ の定義から明らか。

(iii) $\tau \in K_{i+1}^a \cap K_{i+1}^{1a}$ のとき、

$$y = \alpha_i(\tau, x_1, \cdots, x_i) \in E^{i-1}$$

$\Leftrightarrow \quad \tau \in \partial_2(2, i)(K_2 \times \partial K_i)$ or $x_j = *$ なる $j \geqq 2$ が

ある。

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x_1 \text{ または,} \\ y = \alpha_{i-1}(s_j(\tau), x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_i) \text{ となる } j \\ \geqq 2 \text{ がある。} \end{cases}$$

ここで、$s_j(\tau)$ は i) の証明により、K_i^a に入る。よって、$M_1^i(a) \cap E^{i-1} \subseteq M_1^{i-1}(a)$ はいえた。逆に、$\tau' \in K_i^a$ を任意にとると、

$$\tau' = \ell_{i-1}(t, (1-v)\cdot b_{i-1} + v\cdot\tau''), \quad t + av \leq a$$

とかけ、よって次のように変形できる。

$$\tau' = \begin{cases} \ell_{i-1}\left(t, \frac{t}{a} b_{i-1} + (1-\frac{t}{a})\left(\frac{1-\frac{t}{a}-v}{1-\frac{t}{a}} b_{i-1} + \frac{v}{1-\frac{t}{a}}\tau''\right)\right), & t < a \\ \ell_{i-1}(a, b_{i-1}), & t = a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \ell_{i-1}\left(t, \frac{t}{a} b_{i-1} + (1-\frac{t}{a}) s_2 \partial_2(i-1,2)\left(\frac{1-\frac{t}{a}-v}{1-\frac{t}{a}} b_{i-1} + \frac{v}{1-\frac{t}{a}}\tau''\right)\right), & t < a \\ \ell_{i-1}(a, s_2(b_{i-1})), & t = a \end{cases}$$

$$\in s_3(K_a^i \cap K_{a'}^i)$$

□

この補題から、$(M_1^i(a) \cap M_2^i(a)) \cap E^{i-1} = M_1^{i-1}(a) = M_0^i(a) \cap E^{i-1}$ であり、また α_i が相対同相であることにより、

$$(M_1^i(a) \cap M_2^i(a)) - E^{i-1} = M_0^i(a) - E^{i-1}$$

も得られる。 □

系 5.1.4 特に、$E^i = M_1^i(\frac{1}{2}) \cup M_2^i(\frac{1}{2})$, $M_0^i(\frac{1}{2}) = M_1^i(\frac{1}{2}) \cap M_2^i(\frac{1}{2})$ □

そこで次に $\partial K_{i+2}^{(1)}$ の分割に付随した分割を与える。

定義 5.1.5

$$N_1^i = \alpha_{i+1}(L_{i+2}^H \times X^{i+1})$$

$$N_2^i = \alpha_{i+1}(L'^H_{i+2} \times X^{i+1}) \cup \partial K^{(1)}_{i+2} \times X^2 \times X^{[i-1]})$$
$$N_0^i = \alpha_{i+1}((L^H_{i+2} \cap L'^H_{i+2}) \times X^{i+1})$$

とおくと、次のように、前の分割と一致する。

命題 5.1.6

i) $N_1^i = M_1^i(\frac{1}{2})$, ii) $N_2^i = M_2^i(\frac{1}{2})$, iii) $N_0^i = M_0^i(\frac{1}{2})$

証明：(i) まず L^H_{i+2} の元は K^H_{i+1} の元 τ によって、

$$\partial_1(i+1, 2)(\tau, *)$$

とかける。よって、N_1^i の任意の元 y は、

$$y = \alpha_{i+1}(\partial_1(i+1,2)(\tau,*), x_1, \dots, x_{i+1})$$
$$= \alpha_i(\tau, M_2(*, x_1, x_2), x_3, \dots, x_{i+1})$$
$$\in M_1^i(\tfrac{1}{2})$$

となり、$N_1^i \subset M_1^i(\frac{1}{2})$ が示された。逆は明らか。ii) iii) についても、全く同様なので、以下は省略する。□

系 5.1.7 $E^i = N_1^i \cup N_2^i$, $N_0^i = N_1^i \cap N_2^i$

5.2 M_1^i, M_2^i, M_0^i の変形

次に、M_1^i, M_2^i, M_0^i が、次のように変形されることをみよう。

補題 5.2.1 次のホモトピー同値をえる。

i) $M_1^i(a) \simeq X$ （強変位レトラクト）

ii) $M_2^i(a) \simeq E^{i-1}$ （強変位レトラクト）

iii) $M_0^i(a) \simeq X \times E^{i-1}$

証明：証明は、ii), i), iii) の順に行なう。

(ii) まず、系3.1.3から、$(K^{i+1}_{i+1}, \partial K_{i+1})$ は強変位レ

トラクトを与える。よって、$K'^{a}_{i+1} \times X \times X^{[i-1]} \cup \partial K_{i+1} \times X^{i} = K'^{a}_{i+1} \cap R_i$ は、K'^{a}_{i+1} の強変位レトラクトである。よって、R_i は、$R_i \cup K'^{a}_{i+1}$ の強変位レトラクトとなる。また α_i は相対同相なので、i) が証明された。
(ii) は、第3節で定義されたホモトピー H^{a}_{i+1} を用いて、ホモトピーをつくる。まず、H^{a}_{i+1} は、

$$H^{a}_{i+1} : I \times (K^{a}_{i+1}, K^{a}_{i+1} \cap \partial K_{i+1}) \longrightarrow (K^{a}_{i+1}, K^{a}_{i+1} \cap \partial K_{i+1})$$

$$H^{a}_{i+1}(t, \eta_i(u, \tau)) = \eta_i((1-t)u, \tau)$$

で与えられていた。そこで、

$$\tilde{H}^{a}_{i} : I \times M^{i}_{i}(a) \longrightarrow M^{i}_{i}(a)$$

を、次式で与える。

$$\tilde{H}^{a}_{i}(t, \alpha_i(\tau, x_1, \cdots, x_i)) = \alpha_i(H^{a}_{i+1}(t, \tau), x_1, \cdots, x_i)$$

で定めればよい。実際、もし次の写像 $\alpha_i^{(a)} = \alpha_i |_{K^{a}_{i+1} \times X^{i}} : (K^{a}_{i+1} \times X^{i}, L_2(2,i) \times X^{i} \cup K^{a}_{i} \times X \times X^{[i-1]}) \longrightarrow (M^{i}_{i}(a), M^{i-1}_{i}(a))$ が相対同相であることがいえれば、$\tilde{H}^{a}_{i}$ がうまく定義されていることが、証明できる。

$\boxed{\text{補題}}$ 5.2.2　上記の $\alpha_i^{(a)}$ は相対同相である。

証明：
$$\begin{aligned}\alpha_i^{(a)-1}(M^{i-1}_{i}(a)) &= \alpha_i^{-1}(M^{i}_{i}(a) \cap E^{i-1}) \cap K^{a}_{i+1} \times X^{i} \\ &\subseteq \alpha_i^{-1}(E^{i-1}) \cap K^{a}_{i+1} \times X^{i} \\ &= L_2(2,i) \times X^{i} \cup K^{a}_{i+1} \times X \times X^{[i-1]} \\ &\subseteq \alpha_i^{(a)-1}(M^{i-1}_{i}(a))\end{aligned}$$

より、$\alpha_i^{(a)-1}(M^{i-1}_{i}(a)) = L_2(2,i) \times X^{i} \cup K^{a}_{i} \times X \times X^{[i-1]}$ であり、

$$K^{a}_{i+1} \times X^{i} \setminus \alpha_i^{(a)-1}(M^{i-1}_{i}(a)) \subseteq K_{i+1} \times X^{i} \setminus R_i$$

より、α_i が相対同相であることから、$\alpha_i^{(a)}$ も相対同

相となる。このとき、補題1.4.1と同様な補題が、E^i を M^i_1 にかえて成立するから、$\tilde{H}^{(a)}_i$ が、退化作用素や辺作用素とうまく交換すればよいが、それは、γ_i の性質に帰着する。

(iii) この証明のために、次の写像を導入する。

$$\lambda^i_a : X \times E^{i-1} \longrightarrow M^i_0(a)$$

$$\lambda^i_a(x, \alpha_{i-1}((1-u)b_i + u\tau, x_1, \cdots, x_i))$$

$$\equiv \alpha_i((1-u)b_{i+1}(a) + u\,\partial_2(2,i)(*, \tau), x, x_1, \cdots, x_i)$$

$$, \tau \in \partial K_i$$

これも、補題　　　より、well-defined なることがわかる。

$\boxed{\text{補題}}$ 5.2.3　$\lambda^i_a : (X \times E^{i-1}, X \times D^{i-2}) \longrightarrow (M^i_0(a), M^{i-1}_1(a))$ は相対同相写像である。

証明：$M^{i-1}_1(a) = M^i_0(a) \cap E^{i-1}$ より、

$$\lambda^i_a(x, \alpha_{i-1}(\tau, x_1, \cdots, x_i)) \in M^{i-1}_1(a)$$

$\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}\tau \in L_2(2, i) \text{ または、} \\ x_j = * \text{ なる } j \leq i \text{ がある。}\end{array}\right\}$

より、$(\lambda^i_a)^{-1}(M^{i-1}_1(a)) = X \times D^{i-2}$ となった。また同様に考えれば、$\lambda^i_a|_{X \times (E^{i-1} - D^{i-2})}$ は、同相写像：$X \times (E^{i-1} - D^{i-2}) \longrightarrow (M^i_0(a) - M^{i-1}_1(a))$ となる。 □

よってこの λ^i_a が求めるホモトピー同値となる。□

5.3　Mayer-Vietoris 完全列

以上の分割と、写像 μ_{i-1}, p_i との関係をみる。

定理 5.3.1　写像 μ_i は、triad mapping：

$$\mu_i : (X \times E^i, X \times M_1^i(\tfrac{1}{4}), X \times M_2^i(\tfrac{1}{4})) \longrightarrow (E_i, N_1^i, N_2^i)$$

であり、次の性質を持つ。

i)
$$\mu_i|_{X \times E^{i-1}} = \mu_{i-1}$$
$$\mu_i|_{X \times X} = M_2$$
$$(\mu_i|_{X \times M_0^i}) \cdot (1 \times \lambda^i_{\frac{1}{4}}) = \lambda^i_{\frac{1}{2}} \circ (M_2 \times 1)$$

ただし、$M_2 : X \times X \longrightarrow X$ とみなした。

ii) 任意の一般コホモロジー論 G^* に対して、下図は可換図である。

$$\begin{tikzcd}
\to G^*(X) \oplus G^*(E^{i-1}) \arrow[r] \arrow[d, "M_2^* \oplus \mu_{i-1}^*"] & G^*(X \times E^{i-1}) \arrow[r, "\Delta_i"] \arrow[d, "(M_2 \times 1)^*"] & G^{*+1}(E^i) \to \arrow[d, "\mu_i^*"] \\
\to G^*(X \times X) \oplus G^*(X \times E^{i-1}) \arrow[r] & G^*(X \times X \times E^{i-1}) \arrow[r, "\Delta_i'"] & G^{*+1}(X \times E^i) \to
\end{tikzcd}$$

証明：i) については、最後の等式のみ示す。

$$\begin{aligned}
&\mu_i(x, \lambda^i_{\frac{1}{4}}(x_1, \alpha_{i-1}((1-u)b_i + u\tau, x_2, \cdots, x_i))) \\
&= \mu_i(x, \alpha_i((1-u)b_{i+1}(\tfrac{1}{4}) + u\partial_2(2,i)(*,\tau), x_1, \cdots, x_i)) \\
&= \alpha_{i+1}((1-u)\partial_1(i+1,2)(b_{i+1}(\tfrac{1}{2}),*) + u\partial_3(3,i)(\partial_1(2,2)(*,*),\tau) \\
&\qquad , x, x_1, \cdots, x_i) \\
&= \alpha_{i+1}((1-u)\partial_1(i+1,2)(b_{i+1}(\tfrac{1}{2}),*) + u\partial_1(i+1,2)(\partial_2(2,i)(*,\tau),*) \\
&\qquad , x, x_1, \cdots, x_i) \\
&= \alpha_i((1-u)b_{i+1}(\tfrac{1}{2}) + u\partial_2(2,i)(*,\tau), M_2(*,x,x_1), x_2, \cdots, x_i) \\
&= \lambda^i_{\frac{1}{2}} \circ (M_2 \times 1)(x, x_1, \alpha_{i-1}((1-u)b_i + u\tau, x_2, \cdots, x_i))
\end{aligned}$$

また ii) は i) の系である。　□

次に、P_i との関係をみるために、P^{i-1} の分割を与える。

$\boxed{\text{定義}}$ 5.3.2　$0 < a \leqq \frac{1}{2}$ に対して次の様に定める。

i) $J_1^{i-1}(a) \equiv \beta_i(K_{i+1}^a \times X^{i-1})$

ii) $J_2^{i-1}(a) \equiv \beta_i(K_{i+1}'^a \times X^{i-1} \cup S_i)$

iii) $J_0^{i-1}(a) \equiv \beta_i((K_{i+1}^a \cap K_{i+1}'^a) \times X^{i-1})$

このようにすると、$\{M_t^i(a) ; t=1,2,0\}$ と全く同様にして次の命題をえる。

$\boxed{\text{命題}}$ 5.3.3

i) $P^{i-1} = J_1^{i-1} \cup J_2^{i-1}$

ii) $J_0^{i-1} = J_1^{i-1} \cap J_2^{i-1}$ □

さらに、やはり $H_i^{(a)}$ を用いて、J_1^{i-1}, J_2^{i-1}, J_0^{i-1} を変型する。ただし、λ_a^i に代わって、J_0^{i-1} には、

$$\nu_a^{i-1} : E^{i-1} \longrightarrow J_0^{i-1}(a)$$

を、

$$\nu_a^{i-1}(\alpha_{i-1}((1-u)b_i + u\tau, x_2, \cdots, x_i))$$
$$\equiv \beta_i((1-u)b_{i+1}(a) + \partial_2(2,i)(*,\tau), x_2, \cdots, x_i)$$

で定める。これがホモトピー同値を与えることは、λ_a^i と全く同様である。

$\boxed{\text{定理}}$ 5.3.4　写像 $p_i : E^i \longrightarrow P^{i-1}$ は triad map :

$$(E^i, M_1^i(a), M_2^i(a)) \longrightarrow (P^{i-1}; J_1^{i-1}(a), J_2^{i-1}(a))$$

となり、次の性質をもつ。

i) $p_i|_{E^{i-1}} = p_{i-1}$

$p_i|_{X \times \{*\}} = 0_*$

$(p_i|_{M_0^i(a)}) \circ \lambda_a^i = \nu_a^{i-1} \circ pr_{E^{i-1}}$

ただし、$pr_{E^{i-1}} : X \times E^{i-1} \longrightarrow E^{i-1}$ は標準的射影。

ii) 任意のコホモロジー論に対して次の図は可換。

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & G^*(P^{i-1}) \arrow[r] \arrow[d, "p_i^*"] & G^*(P^{\ast}) \oplus G^*(P^{i-2}) \arrow[r] \arrow[d, "(a_n)^* \oplus p_{i-1}^*"] & G^*(E^{i-1}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "(pr_{E^{i-1}})^*"] & G^{*+1}(P^{i-1}) \arrow[r] \arrow[d, "p_i^*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & G^*(E^i) \arrow[r] & G^*(X) \oplus G^*(E^{i-1}) \arrow[r] & G^*(X \times E^{i-1}) \arrow[r, "\Delta_i"] & G^{*+1}(E^i) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

証明：定理5.3.1同様、i)の最後の等式以外は自明である。

$$
\begin{aligned}
& (p_i|_{M_0^i(a)}) \circ \lambda_a^i (x_1, \alpha_{i-1}((1-u)b_i + u\tau, x_2, \cdots, x_i)) \\
= \ & p_i(\alpha_i((1-u)b_{i+1}(a) + u\partial_2(2,i)(*,\tau), x_1, x_2, \cdots, x_i)) \\
= \ & \beta_i((1-u)b_{i+1}(a) + u\partial_2(2,i)(*,\tau), x_2, \cdots, x_i) \\
= \ & \nu_a^{i-1}(\alpha_{i-1}((1-u)b_i + u\tau, x_2, \cdots, x_i)) \\
= \ & \nu_a^{i-1} \circ pr_{E^{i-1}}(x, \alpha_{i-1}((1-u)b_i + u\tau, x_2, \cdots, x_i))
\end{aligned}
$$

より、$(p_i|_{M_0^i(a)}) \circ \lambda_a^i = \nu_a^{i-1} \circ pr_{E^{i-1}}$ □

§6 準ファイバー空間とKコホモロジー

Kコホモロジーの係数は，$\mathbb{Z}$または$\mathbb{Q}$とする。また空間は単連結な有限複体でA_n構造を持つとする。

6.1 A_3空間のKコホモロジー

単連結な有限複体がA_3空間であるとき、J.P.Linらによって、そのKコホモロジー環にはtorsionがないことが示された。すなわち、

$\boxed{\text{定理}}$ (J.P. Lin [12]) Xが単連結かつ有限CW複体のホモトピー型をもつH空間で、しかも$\mathbb{Z}/2$係数のPontryagin環$H_*(X;\mathbb{Z}_2)$が積に関して結合律をみたすならば、$K^*(X)$はtorsionを持たない。

$\boxed{\text{系}}$ 6.1.1 Xが、単連結な有限CW複体のホモトピー型をもつH空間で、しかもA_3構造をもてば、$K^*(X)$はtorsionをもたない。

またtorsionをもたないA_3空間に対しては、次のHodgkinの定理が有効である。

$\boxed{\text{定理}}$ (L. Hodgkin [5]) Aを$\mathbb{Z}_2$-gradingをもつHopf代数で、その代数はtorsionを持たない有限生成可換群になっているとする。このときさらに、$A\otimes\mathbb{Q}$が原始元によって生成される外積代数ならば、A自身そうなっている。

$\boxed{\text{系}}$ 6.1.2 系6.1.1の仮定の下では、

$$x_{j_0} * e_{j_0} = n\,\Delta_{i+1}\,\mu_i^*(e_{j_0}) + (x_{j_0} - n) * e_{j_0}$$
$$- n \sum_k x_{j_0,k} * e_{j_0,k}$$
$$= (x_{j_0} - n) * e_{j_0} - \sum_k n\, x_{j_0,k} * e_{j_0,k}$$

$$(x_{j_0} - n) \times e_{j_0} - \sum_k x_{j_0,k} \times e_{j_0,k} \in \tilde{K}^*(X) \otimes \tilde{K}^*(E^i)$$

よって、$x_{j_0} \times e_{j_0}$ のかわりに、この、$(x_{j_0} - n) \times e_{j_0} - \sum_k x_{j_0,k} \times e_{j_0,k}$ をとることができる。またある j_1 に対して $\varepsilon(e_{j_1}) = m \neq 0$ としても、

$$pr_X^*(x_{j_1}) = x_{j_1} \times 1$$

より、

$$x_{j_1} * e_{j_1} = m \Delta\, pr_X^*(x_{j_1}) + x_{j_1} * (e_{j_1} - m)$$
$$= x_{j_1} * (e_{j_1} - m)$$
$$x_{j_1} \times (e_{j_1} - m) \in \tilde{K}^*(X) \otimes \tilde{K}^*(E^i)$$

なので、$x_{j_1} \times e_{j_1}$ の代わりに、$x_{j_1} \times (e_{j_1} - m)$ をとればよい。 □

$\boxed{\text{定義}}$ 6.2.3 次の同型を定める。

i) $\Delta^{(i+1)} : (\tilde{K}^*(X) \otimes \cdots \otimes \tilde{K}^*(X))^{i} \longrightarrow \tilde{K}^{i+i}(E^{i+1})$

ii) $\Delta^{(0)} = id$

iii) $\Delta^{(k+1)} = \Delta_{k+1} \circ \tilde{\chi}_k \circ (id \otimes \Delta^{(k)})$

ただし、$\tilde{\chi}_k : \tilde{K}^*(X) \otimes \tilde{K}^*(E^k) \longrightarrow \tilde{K}^*(X \times E^k)$ はクロス積である。

そこで、$\Delta^{(i+1)}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i+1})$ を、$x_1 * \cdots * x_{i+1}$ とかくことにする。

$\boxed{\text{系}}$ 6.2.4 $\tilde{K}^*(E^{i+1})$ の module basis として、次のものがとれる。$(i \geq 0)$

$\{ \Delta^{(i+1)}(y_{j_1} \otimes \cdots \otimes y_{j_{i+1}}) : \{y_k\}$ は $\tilde{K}^*(X)$ の module basis$\}$

□

$K^*(X)\otimes\mathbb{Q} \xrightarrow[ch_{\mathbb{Q}}]{\cong} H^*(X:\mathbb{Q})$ は原始元によって生成されるる外積代数であるから、$K^*(X)$ は原始元によって生成される外積代数である。

6.2 μ_i に関する原始性

E^i は、その Mayer-Vietoris 完全列から X の i この join に弱ホモトピー同値となっているから、$K^*(E^i)$ が torsion をもたないことが、$K^*(X)$ が torsion をもたないことでわかる。まずこの $K^*(E^i)$ の元を $K^*(X)$ の元で書き表わそう。

まず、第5節で得られた次の可換図式を考察する。

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \tilde{K}^{*+1}(P^i) \arrow[r, "(p_{i+1})^*"] & \tilde{K}^{*+1}(E^{i+1}) \arrow[r] & \tilde{K}^{*+2}(P^{i+1}) \arrow[r] & \cdots \\
& \tilde{K}^*(E^i) \arrow[u, "\delta_i"] \arrow[r, "(pr_{E^i})^*"] & \tilde{K}^*(X\times E^i) \arrow[u, "\Delta_{i+1}"'] & & \\
& 0\oplus\tilde{K}^*(P^{i-1}) \arrow[u, "(p_{i-1})^*"] \arrow[r, "0\oplus p_i^*"] & \tilde{K}^*(X)\oplus\tilde{K}^*(E^i) \arrow[u, "{\langle -(pr_X)^*,\ \mu_{i-1}^* \rangle}"'] & & \\
& \tilde{K}^*(P^i) \arrow[u, "\iota_i^*"] \arrow[r, "p_{i+1}^*"] & \tilde{K}^*(E^{i+1}) \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

ただし、ι_i は標準的な包含写像であり、pr_X, pr_{E^i} は各々 X, E^i への標準的な射影。

ここで、$K^*(X)$ は torsion を持たないので、$K^*(X\times E^i)$ は、$K^*(X)\otimes_{K^*}K^*(E^i)$ であり、Δ_{i+1} は全射なので、$K^*(E^{i+1})$ の元は、$x\in K^*(X)$, $e\in K^*(E^i)$ に対

して、　$x * e \equiv \Delta_{i+1}(x \times e)$　のように作った元の和として書き表わせる。さらに、次の補題が成立する。

$\boxed{\text{補題}}$ 6.2.2　$\Delta_{i+1} | \tilde{K}^*(X) \otimes \tilde{K}^*(E^i)$ は $\tilde{K}^*(E^{i+1})$ の上への同型である。

証明；まず、単射であることは、次のように行なう。

$\Delta_{i+1}(\sum_j x_j \times e_j) = 0$

とすると、$\exists (y, f) \in \tilde{K}^*(X) \oplus \tilde{K}^*(E^i)$, $\sum_j x_j \times e_j = -y \times 1 + \mu_i^*(f)$

であり、$X \xrightarrow{i_1} X \times E^i \xleftarrow{i_2} E^i$　を標準的な包含写像とすると、

$0 = i_1^*(\sum_j x_j \times e_j) = i_1^*(-y \times 1 + \mu_i^*(f)) = -y + 0$

$0 = i_2^*(\sum_j x_j \times e_j) = i_2^*(-y \times 1 + \mu_i^*(f)) = -0 + f$

より、　$y = 0$, $f = 0$　よって、$\sum_j x_j \times e_j = 0$ となる。

次に全射であることは、まず Δ_{i+1} が全射であることから、任意の $\tilde{K}^*(E^{i+1})$ の元 $\tilde{e}$ に対し、

$\exists \sum_j x_j \times e_j \in \tilde{K}^*(X \times E^i)$, $\tilde{e} = \sum_j x_j \times e_j$

が成立している。よって、$\sum_j x_j \times e_j$ が $\tilde{K}^*(X) \otimes \tilde{K}^*(E^i)$ の中に入ればよい。もし、ある j_0 について x_{j_0} が $\tilde{K}^*(X)$ に入っていなかったとすると、augmentation 写像を

$\varepsilon : K^*(X) \longrightarrow K^*(pt)$

とすれば、$\varepsilon(x_{j_0}) = n \neq 0$ である。よって、$x_{j_0} - n$ は、$\tilde{K}^*(X)$ に入る。そこで、

$\mu_i^*(e_{j_0}) = 1 \times e_{j_0} + \sum_k x_{j_0,k} \times e_{j_0,k}$

$(x_{j_0,k} \times e_{j_0,k} \in \tilde{K}^*(X) \otimes \tilde{K}^*(E^i))$

に注意して、次の変形を行なう。

そこで、E. Thomas [18] に従い、次の概念を定義する。

$\boxed{\text{定義}}$ 6.2.5　$e \in \tilde{K}^*(E^i)$ が「μ_i に関して primitive」であるとは、次の条件が成立することである。

☆) $\mu_i^*(e) = x \times 1 + 1 \times e'$ となる様な $x \in \tilde{K}^*(X)$ と $e' \in \tilde{K}^*(E^i)$ とが存在する。

今の場合、この定義は、次のように書き換えることができる。

$\boxed{\text{命題}}$ 6.2.6

i) $x \in \tilde{K}^*(X)$ は「$\mu_1 = M_2$ に関して primitive」である。
$\Leftrightarrow$ x は X の primitive element である。

ii) $e \in \tilde{K}^*(E^i)$ $(i \geqq 2)$ は「μ_i に関して primitive」である。
$\Leftrightarrow$ $\mu_i^*(e^i) = 1 \times e^i$

証明：$\mu_i : X \times E^i \longrightarrow E^i$ は、標準的な、第二成分への包含写像 $i_2 : E^i \hookrightarrow X \times E^i$ との合成をつくると、

$$\mu_i \circ i_2 \simeq id_{E^i}$$

である。また、$i_1 : X \hookrightarrow X \times E^i$ との合成は、定義から、包含写像に一致するから、

$$\mu_i \circ i_1 : X \subset E^i$$

となる。しかし、これは、$i = 1$ のときは、id_X であり、$i \geqq 2$ では、null-homotopic となる。 □

$\boxed{\text{系}}$ 6.2.7　命題 6.2.6 の証明から、任意の $e \in \tilde{K}^*(E^i)$ に対し、$\mu_i^*(e) - 1 \times e \in \tilde{K}^*(X) \otimes \tilde{K}^*(E^i)$ である。

$(i \geqq 2)$

そこで、次の命題を証明しよう。

$\boxed{\text{命題}}$ 6.2.8　$x_1, \cdots, x_i$ を $K^*(X)$ の0でない元とする。これに対し、次の条件は同値である。

i) 各 $j\ (1 \leqq j \leqq i)$ に対し、x_j は primitive である。

ii) $x_1 * \cdots * x_i$ は、「μ_iに関して primitive」である。

証明：証明は、帰納法を用いて行なう。$i = 1$ のときは命題6.2.6より明らか。またその定義と、命題6.2.6から、$e = x_1 * \cdots * x_i$ が「μ_i に関して primitive」であるとは、

$$\Delta_{i+1}(1 \times e) = \Delta_{i+1} \circ (pr_{E^i})^*(e) = 0$$

に同値な条件である。そこで、$i \geqq 2$ に対して、

$$e = x_1 * \cdots * x_i \ ,\quad e' = x_2 * \cdots * x_i$$

とおくと、$e = x_1 * e'$ であり、帰納法の仮定から、

☆) e'：「μ_i に関して primitive」である

$\Leftrightarrow$ $x_2, \cdots, x_i$ はすべて primitive

が成立している。また、定理5.3.1により、

$$\begin{aligned}\mu_i^* e &= \mu_i^* \Delta_i(x_1 \times e') \\ &= \Delta_i(M_i^*(x_1) \times e')\end{aligned}$$

である。そこで、

$$M_i^*(x_1) = x_1 \times 1 + 1 \times x_1 + \sum_{j=1}^{s} v_j \times w_j$$

となっているとする。ただし、v_j は、$K^*(X)$ の primitive な生成元 $u_1, \cdots, u_\ell$ をとったとき、$u_1, \cdots, u_\ell$ の相異なる単項式になっていると仮定する。よって、

$$\begin{aligned}\mu_i^*(e) = {} & x_1 \times \Delta_i(1 \times e') + 1 \times \Delta_i(x_1 \times e') \\ & + \sum_j v_j \times \Delta_i(w_j \times e')\end{aligned}$$

$$= 1\times e + x_1\times(1 * e') + \sum_j v_j \times (w_j * e')$$

とかけるから、結局、

(※) e が「μ_i に関して primitive」である

$$\Leftrightarrow \quad x \times \Delta_i(1\times e') + \sum_j v_j \times (w_j * e') = 0$$

今もし $\Delta_i(1\times e') = 0$ とすると、上式の下の条件は、

$$\sum_j v_j \times (w_j * e') = 0$$

と同値であり、v_j がすべて相異なる単項式であるので、

$$w_j * e' = 0 \quad (1 \leqq j \leqq s)$$

よって補題 6.2.2 より、$w_j = 0$ $(1 \leqq j \leqq s)$ となる。故に x_1 は primitive となった。また $\Delta_i(1\times e') = 0$ としたので、$x_2, \cdots, x_i$ は primitive である。またもし、$\Delta_i(1\times e') \neq 0$ とすると矛盾がでることをいう。このときは、$x_1 = \sum_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_\ell)} a_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_\ell}\, u_1^{\varepsilon_1}\cdots u_\ell^{\varepsilon_\ell}$ とかいたときに、$(\varepsilon_1^{(0)}, \cdots, \varepsilon_\ell^{(0)})$ を、$\sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j^{(0)} = \max\{\sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j \mid a_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_\ell} \neq 0\}$ を与える組とする。ところで、

$$M_2^*(u_1^{\varepsilon_1}\cdots u_\ell^{\varepsilon_\ell}) = (u_1\times 1 + 1\times u_1)^{\varepsilon_1}\cdots(u_\ell\times 1 + 1\times u_\ell)^{\varepsilon_\ell}$$
$$= \sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma\ u_{\sigma(1)}\cdots u_{\sigma(k)} \times u_{\sigma(k+1)}\cdots u_{\sigma(\ell)}$$

とかけるから、次の事が成立する。

(※) $M_2^*(v_j) = a_j\ M_2^*(u_1^{\varepsilon_1(j)}\cdots u_1^{\varepsilon_\ell(j)})$ に対して、
$$\max_j\{\sum_{k=1}^{\ell} \varepsilon_k^{(j)}\} < \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j^{(0)}$$

よって、$x_1 \times \Delta_1(1\times e')$ の中の

$$a_{\varepsilon_1^{(0)},\cdots,\varepsilon_\ell^{(0)}}\ u_1^{\varepsilon_1^{(0)}}\cdots u_\ell^{\varepsilon_\ell^{(0)}} \times \Delta_i(1\times e') \neq 0$$

は、$\quad x_1\times\Delta_i(1\times e') + \sum_j v_j\times(w_j * e')$

の中の他の成分とは消しあわない。よって、

$$x_1 \times \Delta_i(1\times e') + \sum_j v_j \times (w_j * e') \neq 0$$

となり、仮定に矛盾する。

またこの証明から、逆向きの成立は明らか。 □

6.3 A_k primitive と主定理

次に述べるのは、主定理に課せられている条件の考察である。

$\boxed{\text{補題}}$ 6.3.1　下図の $\bar{\delta}_k$ および p_{k+1}^* は単射であり、$\bar{\delta}_k(x) = p_{k+1}^*(y)$ ならば、$y = s^*(x)$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{K}^*(E^k) \arrow[r, "\bar{\delta}_k"] \arrow[rdd, "s^*"'] & K^{*+1}(E^{k+1}, E^k) \\
 & K^{*+1}(P^k, P^{k-1}) \arrow[u, "p_{k+1}^*"'] \\
 & \tilde{K}^{*+1}(SE^k) \arrow[u, phantom, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

ただし、s^* は suspension 同型

証明：次の可換図をみる。

$$\begin{tikzcd}
(D^k, E^k) \arrow[r, hook] \arrow[rd, "\sigma_{k+1}"] & (E^{k+1}, E^k) \arrow[d, "p_{k+1}"] \\
(K_{k+1} \times X^k, \partial K_{k+1} \times X^k \cup K_{k+1} \times X^{[k]}) \arrow[u, "\gamma_{k+1}"] \arrow[r, "\beta_{k+1}"] & (P^k, P^{k-1})
\end{tikzcd}$$

定義から、σ_{k+1} は相対同相写像であった。また、つぶす写像

$$\gamma_k : (P^k, P^{k-1}) \longrightarrow (P^k/P^{k-1}, *)$$

$$\rho_k : (CE^k, E^k) \longrightarrow (SE^k, *)$$

も相対同相である。よって、Stasheff [ ] の与えたホ

モトピー同値射

$$\phi_k : (CE^k, E^k) \longrightarrow (D^k, E^k)$$

は、ホモトピー同値射

$$\bar{\varphi}_k : (SE^k, *) \longrightarrow (P^k/P^{k-1}, *)$$

を誘導する。よって次の可換図式がえられる。

$$\begin{tikzcd}
\tilde{K}^*(E^k) \arrow[r, tail, "\bar{\delta}''_k"] \arrow[dr, "\bar{\delta}'_k"'] \arrow[ddr, "\bar{\delta}_k"'] & K^{*+1}(CE^k, E^k) & K^{*+1}(SE^k, *) \arrow[l, "\rho_k^*"'] \\
 & K^{*+1}(D^k, E^k) \arrow[u, "\phi_k^*", "\wr"'] & K^{*+1}(P^k/P^{k-1}, *) \arrow[l, "(\rho_k \circ \sigma_{k+1})^*"'] \arrow[u, "\bar{\varphi}_k^*"', "\wr"] \arrow[d, "\gamma_k^*", "\wr"'] \\
 & K^{*+1}(E^{k+1}, E^k) \arrow[u, two heads] & K^{*+1}(P^k, P^{k-1}) \arrow[l, "p_{k+1}^*"']
\end{tikzcd}$$

この可換図を追い回して、

$$\bar{\delta}_k(x) = p_{k+1}^*(y) \Rightarrow \bar{\varphi}_k^* \circ \gamma_k^{*-1}(y) = \Delta^*(x)$$

を得る。 □

この補題は、加法的関係（Additive relation）の言葉で書くと、$\Delta^* \supset (\rho_k^*)^{-1} \cdot \delta_k$ と書ける。ただし、この合成，逆写像とも Additive relation としてのものである。そこで、ここで Additive relation について注意を記しておく。

可換群 A，B に対して、A×B の部分集合 φ が、A から B への加法的関係とは、A×B に、A，B の加法から誘導される加法によって可換群の構造を与えたときに、φ がその部分群になっていることである。

また加法的関係 φ が、A から B へのそれであることを示すのに、写像の記法 φ : A ⟶ B をとることがある。加法的関係の合成，逆，は各々集合論的な関係

としてのものである。つまり、$\varphi : A \to B$, $\psi : B \to C$ を加法的関係とするとき、

$$\psi \circ \varphi \equiv \{ (a, c) \in A \times C \mid \exists_{b \in B}\ (a,b) \in \varphi,\ (b,c) \in \psi \}$$

$$\varphi^{-1} \equiv \{ (b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in \varphi \}$$

で与えられる。さらに、加法的関係 $\varphi : A \to B$ に対して、

$$\mathrm{Dom}\ \varphi \equiv \{ a \in A \mid \exists_{b \in B}\ (a,b) \in \varphi \}$$

$$\mathrm{Im}\ \varphi \equiv \{ b \in B \mid \exists_{a \in A}\ (a,b) \in \varphi \}$$

$$\mathrm{Ker}\ \varphi \equiv \{ a \in A \mid (a, 0) \in \varphi \}$$

$$\mathrm{Ind}\ \varphi \equiv \{ b \in B \mid (0, b) \in \varphi \}$$

とおけば、$\mathrm{Dom}\,\varphi = B$ かつ $\mathrm{Ind}\,\varphi = 0$ のとき、φ は、写像となり、しかもその加法性から、準同型となる。そして、φ が真の写像のときは、$\mathrm{Ker}\,\varphi$, $\mathrm{Im}\,\varphi$ は、各々準同型の Kernel, Image に一致することは、定義から明らかであろう。

さて、次図において、

$$\tau_k = p_k^{*-1} \circ \delta_k \subseteq \tilde{K}^*(X) \oplus \tilde{K}^{*+1}(P^{k-1})$$

として加法的関係を定める。

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \tilde{K}^*(X) \arrow[r, "\delta_k"] & K^{*+1}(E^k, X) \arrow[r] & \tilde{K}^{*+1}(E^k) \arrow[r] & {} \\
 & & K^{*+1}(P^{k-1}, *) \arrow[u, "p_k^*"'] & &
\end{tikzcd}$$

さらに、$(x, y) \in \tau_k$ のとき、x を $(k-1)$ transgressive、y を x の transgression image と呼ぶ。

そこで、この節で最も重要な概念である、A_k-primitive という概念について、次に述べよう。

$\boxed{\text{定義}}$ 6.3.2　$K^*(X)$ の元 x が次の条件をみたすとき、A_k-primitive という。

(*)　$\exists y \in \tilde{K}^{*+1}(P^k)$ s.t. $\Delta^*(x) = \iota_2^* \cdots \iota_k^*(y)$

ただし、ι_j は、包含写像 $P^{j-1} \subset P^j$ である。

これは、次のように、スペクトル列における条件とみることができる。

$\boxed{\text{定義}}$ 6.3.3

(1) $$D^{*,k} \equiv \begin{cases} K^*(P^k), & 0 \leqq k \leqq n \\ K^*(P^n), & n < k \end{cases}$$

(2) $$E^{*,k} \equiv \begin{cases} \tilde{K}^*(SE^k), & 0 \leqq k \leqq n \\ 0, & n < k \end{cases}$$

さらに、$D^{*,*} \equiv \sum_k^{\oplus} D^{*,k}$, $E^{*,*} \equiv \sum_k^{\oplus} E^{*,k} \supset \tilde{K}^*(SX)$

また、$\iota^*: D^{*,*} \longrightarrow D^{*,*}$, $p^*: D^{*,*} \longrightarrow E^{*,*}$

$\delta: E^{*,*} \longrightarrow D^{*,*}$

を、
$$\iota^*|_{D^{*,k}} = \begin{cases} \iota_k^*: K^*(P^k) \longrightarrow K^*(P^{k-1}), & k \leqq n \\ id: K^*(P^n) \longrightarrow K^*(P^n), & n < k \end{cases}$$

$$p^*|_{D^{*,k}} = \begin{cases} \Delta^* \circ p_{k+1}^*: K^*(P^k) \longrightarrow K^{*+1}(SE^{k+1}), & k < n \\ 0: K^*(P^n) \longrightarrow 0, & n \leqq k \end{cases}$$

$$\delta|_{E^{*,k}} = \begin{cases} \delta_k \circ \Delta^{*-1}: K^*(SE^k) \longrightarrow K^*(P^k), & k \leqq n \\ 0: 0 \longrightarrow K^*(P^n), & n < k \end{cases}$$

として定めれば、コファイバー列 $P^{k-1} \hookrightarrow P^k \longrightarrow SE^k$ から導びかれる長完全列から、$(D^{*,*}, E^{*,*})$ は、exact couple となる。この exact couple から導びかれるスペクトル列の第 r term を $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ とかくと、

$$d_1 = p^* \circ \delta, \quad E_1^{*,*} = E^{*,*}$$

$$\deg d_r = (1, r)$$

また、加法的関係

$$d'_r \subseteq E^{*,*} \oplus E^{*,*}$$

$$d'_r = p^* \circ (i^*)^{-r+1} \circ \delta$$

は、この $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ と次のように関連する。

$$E_r^{*,*} \cong \mathrm{Dom}\, d'_r / \mathrm{Ind}\, d'_r = \mathrm{Ker}\, d'_{r-1} / \mathrm{Ind}\, d'_{r-1}$$

$$d_r([x]) = [y] \Leftrightarrow (x, y) \in d'_r$$

さらに、$r \geq n$ なら、$\mathrm{Ker}\, d'_r = \mathrm{Ker}\, d'_{r-1}$, $\mathrm{Im}\, d'_r = 0$ より、$E_n = E_{n+1} = \cdots = E_\infty$ である。

このように導入された概念には次の関連がある。

定理 6.3.5

(1) 次の三つの条件は同値である。

i) x : A_k - primitive

ii) $p^*(x) \in \mathrm{Dom}\, d'_k$

iii) x : $(k-1)$ transgressive

(2) 次の二つの条件は同値である。

iv) x : A_2 - primitive

v) x : primitive

証明：定義から、i)⇔ii) であることは明らか。まず iii)⇒i) を証明する。

左の可換図において、x を $(k-1)$ transgressive とすると、

$y \in K^*(P^{k-1}, *)$

があって $\delta'_k(x) = p_k^*(y)$ である。よって、

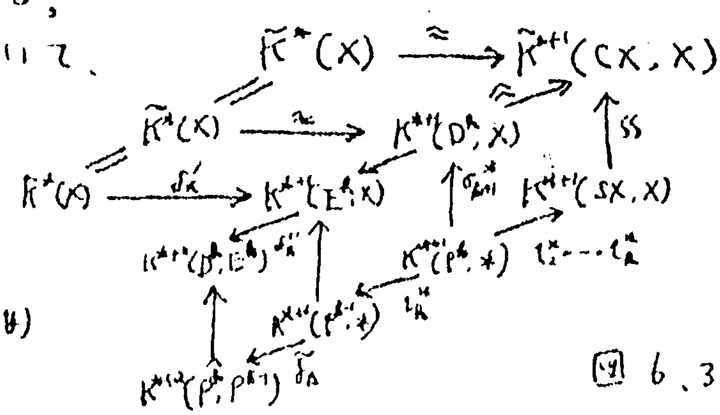


図 6.3.1

$$\delta_k''\circ p_k^*(y) = \delta_k''\circ d_k'(x) = \delta_k''\circ \ell_k^*\cdot d_k'(x) = 0$$

より、

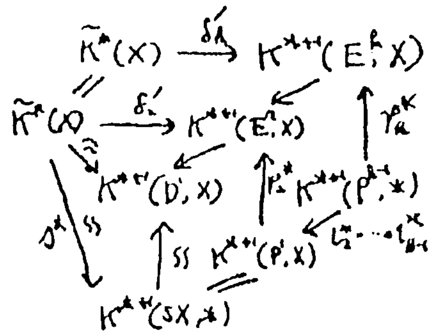
$$\begin{tikzcd}
\tilde K^*(X) \arrow[r, "\delta_k'"] & K^{*+1}(E^k, X) \arrow[r, "\ell_k^*"] \arrow[d, "\delta_k''"] & \tilde K^{*+1}(E^k) \arrow[d, "\delta_k''"] \\
 & K^{*+2}(D^k, E^k) \arrow[r, "="] & \tilde K^{*+2}(D^k, E^k)
\end{tikzcd}$$

$\tilde\delta_k(y) = 0$

故に $y' \in K^{*+1}(P^k, *)$ が存在して、$y = i_k^*(y')$

さらに次図と、補題6.3.1から、

$i_2^*\circ\cdots\circ i_{k-1}^*(y) = s^*(x)$



よって

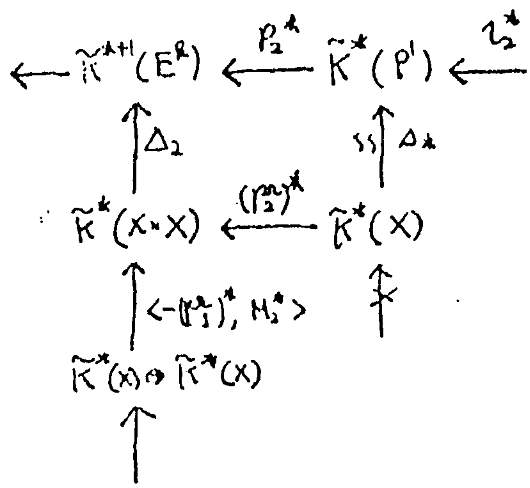
$i_2^*\circ\cdots\circ i_k^*(y') = s^*(x)$

逆の「i)⇒iii)」は、今の証明を逆にたどればよい。

また「iv)⇒v)」は、次図において、

$s_*(x) \in \mathrm{Im}\, i_2^*$

から x: primitive を導びけばよい。まず、



$0 = p_2^* s^*(x) = \Delta_2\cdot(p_2^2)^*(x)$

なので、$(x_1, x_2) \in \tilde K^*(X)\oplus\tilde K^*(X)$ が存在して、

$1\times x = -x_1\times 1 + \mu_2^*(x_2)$

よって、$x = x_1 = x_2$ かつ x_2 は primitive となった。この逆は明らか。□

さらに「A_k primitive」に関して次の事実が知られている。ただし、スペクトル列は、常コホモロジーである。

$\boxed{\text{定理}}$ (J. D. Stasheff [17]) A_n 空間 X に対して、コホモロジー類 $w \in H^*(X)$ が A_i 写像の代表元をもつことと、$w \in \mathrm{Dom}\, d_i$ とは同値。($i < n$)

この節の最後に、次の主定理を掲げておく。

定理 6.3.6　$K^*(X)$ が A_k primitive な元で生成されていれば、($k \leqq n$)

$$K^*(P^k) \cong K^{*[k+1]}[v_1, \cdots, v_l] \oplus S_k$$

となる。ただし、"K^*" は右辺では、考えている K コホモロジーの係数（ここでは $\mathbb{Z}$ または $\mathbb{Q}$）であり、同型は algebra としてのものである。また l は、X の rank で、$\{v_j\}$ は、$K^*(X)$ の A_k primitive な生成元の系 $\{u_j\}$ と、

$$\Delta^*(u_j) = \iota_2^* \circ \cdots \circ \iota_k^*(v_j)$$

によって関係づけられる。そして S_k は、次節で具体的に与えられるが、

$$\iota_k^*(S_k) = 0$$
$$S_k \cdot \tilde{K}^*(P^k) = 0$$

をみたす。

§7 主定理の証明

7.1 準同型 p_k^*

主定理の証明には、$K^*(P^k)$ が torsion を持たないことを同時に証明しなければならない。そこで短完全系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Cok}\, p_k^* \longrightarrow K^*(P^k) \longrightarrow \mathrm{Ker}\, p_k^* \longrightarrow 0$$

における $\mathrm{Cok}\, p_k^*$ に注目する。そのために、$\widetilde{K}^*(E^{k-1})$ の中に、ある部分加群を定義する。

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \widetilde{K}^*(E^k) \arrow[r] & \widetilde{K}^{*+1}(P^k) \arrow[r] & \widetilde{K}^{*+1}(P^{k-1}) \arrow[r, "p_k^*"] & \widetilde{K}^{*+1}(E^k) \arrow[r] & \cdots \\
& & \widetilde{K}^* \arrow[u] & \widetilde{K}^*(E^{k-1}) \arrow[u, "\delta_{k-1}"'] \arrow[r, "(p_{E^{k-1}})^*"] & \widetilde{K}^*(X\times E^{k-1}) \arrow[u, "\Delta_k"'] & \\
& & & (\widetilde{K}^*(X)\otimes\cdots\otimes\widetilde{K}^*(X)) \arrow[u, "\Delta^{(k-1)}", "\cong"'] & &
\end{tikzcd}$$

図7.1

$K^*(X)$ の primitive な元の全体のなす部分加群を P とし、また decomposable な元の全体のつくる部分加群を D とすると、

$$\widetilde{K}^*(X) \equiv P \oplus D$$

$$\mathrm{rank}\, P = l \quad (X \text{ の rank})$$

$$\mathrm{rank}\, D = 2^l - 1 - l$$

である。そこで、

$$\bar{S}_{k-1} \equiv \sum_i \widetilde{K}^*(X)\otimes\cdots\otimes\widetilde{K}^*(X)\otimes \overset{i}{D}\otimes\widetilde{K}^*(X)\otimes\cdots\otimes\overset{k-1}{\widetilde{K}^*(X)}$$

$$\widetilde{S}_{k-1} \equiv \Delta^{(k-1)}(\bar{S}_{k-1}) \in \widetilde{K}^*(E^{k-1})$$

$$s_{k-1} \equiv \delta_{k-1}(\tilde{s}_{k-1}) \subset \tilde{K}^*(P^{k-1})$$

とおく。ここで、$\Delta^{(k-1)}$ は同型なので、

$$\mathrm{rank}\,\tilde{S}_{k-1} = \mathrm{rank}\,\tilde{s}_{k-1} = (2^l-1)^{k-1} - l^{k-1}$$

である。また、$\Delta^{(k-1)}(P\otimes\cdots\otimes P)$ および S_{k-1} に対しては、次の補題を示そう。

$\boxed{\text{補題}}$ 7.1.2

i) $p_k^* \circ \delta_{k-1}(\Delta^{(k-1)}(P\otimes\cdots\otimes P)) = 0$

ii) $p_k^*|_{S_{k-1}}$ は単射で、$\mathrm{rank}\,S_{k-1} = \mathrm{rank}\,\tilde{S}_{k-1} - \mathrm{rank}\,S_{k-2}$

iii) $\mathrm{Cok}\, p_k^* \circ \delta_{k-1}$ は torsion をもたない。

証明：図 7.1 を用いて証明する。

(i) $p_k^* \delta_{k-1}(x_1 * \cdots * x_{k-1})$

$= \Delta_k \circ (pr_{E^{k-1}})^*(x_1 * \cdots * x_{k-1})$

であるので、$\{x_i\}$ がすべて原始的なら命題 6.2.8 によってこれは 0 となる。

(iii) まず、次の式を証明する。

$$\Delta_k \circ (pr_{E^{k-1}})^*(x_1 * \cdots * x_{k-1})$$
$$= \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \underset{\hat{1}}{x_1} * \cdots * x_{j-1} * (\Delta_2 \circ \overline{M_2^*}(x_j)) * x_{j+1} * \cdots * \underset{\widehat{k-1}}{x_{k-1}}$$

$$\left(\overline{M_2^*}(x) = M_2^*(x) - x\times 1 - 1\times x\right)$$

これは、$k=2$ のとき正しい。

$\because)$ $\Delta_2 \circ (pr_2)^*(x) = \Delta_2(1\times x)$
$= \Delta_2(1\times x) + \Delta_2(-M_2^*(x) + x\times 1)$
$= -\Delta_2 \circ \overline{M_2^*}(x)$

また $k-1$ まで正しかったとすると、

$\Delta_k \circ (pr_{E^{k-1}})^*(x_1 * \cdots * x_{k-1})$
$= \Delta_k \circ (pr_{E^{k-1}})^*(x_1 * \cdots * x_{k-1}) - \Delta_k \circ \mu_{k-1}^*(x_1 * \cdots * x_{k-1})$

$$= \Delta_k \circ (pr_{E^{k-1}})^* (x_1 * \cdots * x_{k-1})$$
$$- \Delta_k \circ \mu_{k-1}^* \circ \Delta_{k-1} (x_1 * (x_2 * \cdots * x_{k-1}))$$
$$= \Delta_k \circ (pr_{E^{k-1}})^* (x_1 * \cdots * x_{k-1})$$
$$- \Delta_k \circ \Delta'_{k-1} \circ (\bar{M}_2 \times 1)^* (x_1 \times (x_2 * \cdots * x_{k-1}))$$
$$= \Delta_k \circ (pr_{E^{k-1}})^* (x_1 * \cdots * x_{k-1})$$
$$- \Delta_k \circ \Delta'_{k-1} (1 \times x_1 \times (x_2 * \cdots * x_{k-1}))$$
$$- \Delta_k \circ \Delta'_{k-1} (x_1 \times 1 \times (x_2 * \cdots * x_{k-1}))$$
$$- \Delta_k \circ \Delta'_{k-1} (\overline{M_2^*}(x_1) \times (x_2 * \cdots * x_{k-1}))$$
$$= - \Delta_2 \overline{M_2^*}(x_1) * x_2 * \cdots * x_{k-1}$$
$$- x_1 * \Delta_{k-1} (1 \times (x_2 * \cdots * x_{k-1}))$$
$$= - \Delta_2 \overline{M_2^*}(x_1) * x_2 * \cdots * x_{k-1}$$
$$- \sum_{j=1}^{k-2} (-1)^j x_1 * \cdots * x_j * \Delta_2 \overline{M_2^*}(x_{j+1}) * x_{j+2} * \cdots * x_{k-1}$$
$$= \sum_{j=1}^{k-1} x_1 * \cdots * x_{j-1} * \Delta_2 \overline{M_2^*}(x_j) * x_{j+1} * \cdots * x_{k-1}$$

となるから、帰納法が成立して、すべての k に対して、式がなりたつ。この式から、$p_k^* \delta_{k-1} = \Delta_k \circ (pr_{E^{k-1}})^*$ は、module の生成元を、自然数では割れない元にうつすから、$\mathrm{Cok}\, p_k^* \delta_{k-1}$ は torsion をもたない。

(iii) この $\{p_k^* \circ \delta_{k-1}\}$ は、第6節で導入したスペクトル列の最初の differential とみなすことができる。よって、このスペクトル列の dual は、外積代数のバー構成に($k \leq n$ の範囲において)一致する。よって、$k \leq n$ では、

$$E_2^{*,*} \approx \mathrm{Ext}_{\Lambda(u_1, \cdots, u_\ell)}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}[v_1, \cdots, v_\ell]$$

となる。(A. Borel [ ])

よってここでは、decomposable な元を含むバー構成の differential が 0 ならば、それは differential の像に入る。よって我々のスペクトル列でも、$k \leq n$ のときは、そうなっている。 □

さて、主定理を帰納法を用いて証明する。$k=1$ のときは、

$$P^1 \cong SX \;,\quad \tilde{K}^*(SX) \xleftarrow[\delta_1]{\cong} \tilde{K}^*(X) \cong P \oplus D$$

より明らかに成立する。そこで、k まで定理が成立したとする。よって

$$K^*(P^k) \cong K^{*[k+1]}[v_1, \cdots, v_\ell] \oplus S_k$$
; torsion をもたない。

よって $\mathrm{Ker}\, P_k^*$ は torsion をもたず、

$$P_{k+1}^*(\mathbb{Z}^{[k+1]}[v_1, \cdots, v_\ell]) = 0$$

$$\mathrm{Im}\, P_{k+1}^* = \mathrm{Im}\, P_{k+1}^*(S_k) = \mathrm{Im}\, P_{k+1}^* \delta_k$$

なので、

$\mathrm{Cok}\, P_{k+1}^* = \mathrm{Cok}\, P_{k+1}^* \cdot \delta_k$ は torsion をもたない。

であり、この節の初めにあげた完全列から、

$K^*(P^{k+1})$ は torsion をもたない。

とわかった。ところで、E. Thomas [18] によれば、triad mapping $P: (E; E_1, E_2) \longrightarrow (P, P_1, P_2)$

$E = E_1 \cup E_2 \qquad P = P_1 \cup P_2$

$E_0 = E_1 \cap E_2 \qquad P_0 = P_1 \cap P_2$

が与えられたとき、$\tilde{H}^*(E_1) \ni e_1$ ($\tilde{H}^*(E_2) \ni e_2$) は、

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}^*(E_1) \arrow[r, "\delta_1"] & \tilde{H}^{*+1}(E/E_1) \arrow[r] & \tilde{H}^{*+1}(E) \\
\tilde{H}^*(P_1) \arrow[r] \arrow[u] & \tilde{H}^{*+1}(P/P_1) \arrow[r, "j_1^*"] \arrow[u, "P_1^*"] & \tilde{H}^{*+1}(P) \arrow[u, "P^*"]
\end{tikzcd}$$

$\delta_1(e_1) \in \mathrm{Im}\, P_1^*$

($\delta_2(e_2) \in \mathrm{Im}\, P_2^*$)

のとき、e_1 (e_2) は transgressive といわれる。また、$\delta_1(e_1) = P_1^*(\bar{e}_1)$ ($\delta_2(e_2) = P_2^*(\bar{e}_2)$) のとき、$b_1 = j_1^*(\bar{e}_1)$ を ($b_2 = j_2^*(\bar{e}_2)$ を) e_1 (e_2) の tranagression 像とよぶ。（j_1, j_2 は包含写像，$p_1 = p_2 = p$）

$i_t : E_t \hookrightarrow E$ $(t=1,2)$ を包含写像とするとき、次の定理が成立する。

$\boxed{定理}$（E. Thomas [18]）7.1.3

e_1, e_2 $(e_1 \in H^p(E_1),\ e_2 \in H^p(E_2))$ を transgressive で、その像が、各々 $b_1, b_2 \in H^{p+1}(P)$ であったとする。ここでもし $b \in H^t(P_0)$ が

$$(P|E_0)^*(b) = \sum_a i_1^*(f_a) \oplus i_2^*(f_a')$$

$$f_a \in H^*(E_1),\quad f_a' \in H^*(E_2)$$

とかけたならば、

$$p^*(b_1) = p^*(b_2) = 0,\quad b_1 \cup \delta(b) = 0$$

$$b_2 \cup \delta(b) = 0,\quad \delta(b) \cup b_1 = 0,\quad \delta(b) \cup b_2 = 0$$

であって、ファンクショナル cup 積は、

$$b_1 \cup_p \delta(b) \ni \sum_a (-1)^{p+1} (e_1 \cup f_a) * f_a'$$

$$\delta(b) \cup_p b_2 \ni \sum_a (-1)^g f_a * (f_a' \cup e_2)$$

となる。ただし、「$*$」は、小論と同じく、Mayer-Vietris の完全列の connecting 準同型による像を示す。（δ がその connecting 準同型である。

$\boxed{系}$ 7.1.4

$x_1, \cdots, x_{k+1}$ を A_{k+1}-primitive in $H^{odd}(X;\mathbb{Q}) \cong K^1(X)\otimes\mathbb{Q}$ とする。その transgression 像を、各々 $y_1, \cdots, y_{k+1}$ とすると、

$$\delta_{k+1}(x_1 * \cdots * x_{k+1}) = y_1 \cup \cdots \cup y_{k+1}$$

証明：上記定理において、$E_1 = M_1^{k+1}$, $E_2 = M_2^{k+1}$, $E = E^{k+1}$
$E_0 = M_0^{k+1}$, $p_1 = J_1^k$, $p_2 = J_2^k$, $P = P^k$, $p_0 = J_0^k$
$e_1 = x_1$, $b = x_2 * \cdots * x_{k+1}$, $b_1 = y_1$, $p = p^k_{k+1}$
とおけば、

$$(p|_{E_0})^*(b) = (p^n_{E^k})^*(x_2 * \cdots * x_{k+1})$$
$$= 1 \times (x_2 * \cdots * x_{k+1})$$

より、$y_1 \cup_{p_{k+1}} \delta_k (x_2 * \cdots * x_{k+1})$

$$\ni x_1 * (x_2 * \cdots * x_{k+1})$$

$$\begin{tikzcd}
H^*(E^{k+1}:\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d, "*"] & H^*(P^{k+1}:\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d, "\cup\delta_k(x_2*\cdots*x_{k+1})"] & H^*(P^k:\mathbb{Q}) \ni y \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
H^*(E^{k+1}:\mathbb{Q}) \arrow[r, "\delta_{k+1}"] & H^*(P^{k+1}:\mathbb{Q}) \arrow[r] & H^*(P^k:\mathbb{Q}) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\cup$$
$$y \cup_{p_{k+1}} \delta_k (x_2 * \cdots * x_{k+1})$$

なので、$\delta_{k+1}(x_1 * \cdots * x_{k+1})$

$$= y_1 \cup \delta_k (x_2 * \cdots * x_{k+1})$$
$$= y_1 \cup \cdots \cup y_{k+1}$$

が帰納的に証明される。 □

$\boxed{系}$ 7.1.5　$x_1, \cdots, x_{k+1}$ を A_{k+1}-primitive in $K^1(X)$ のとき、$u_1, \cdots, u_{k+1}$ をその transgression 像とすれば、

$$\delta_{k+1}(x_1 * \cdots * x_{k+1}) = u_1 \cup \cdots \cup u_{k+1}$$

証明：$ch : K^*(P^{k+1}) \longrightarrow H^*(P^{k+1}:\mathbb{Q})$ は単射で、
$ch(K^0) \subseteq H^{even}$, $ch(K^1) \subseteq H^{odd}$
より、ch の naturality から得られる。 □

ここで、$K^*(P^{k+1})$ に戻れば、

$\boxed{\text{定理}}$ 7.1.7　次の完全列は split する。

$$0 \longrightarrow S_{k+1} \oplus K^*\{v_{i_1} \cup \cdots \cup v_{i_{k+1}} : 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_{k+1} \leq l\}$$

$$\longrightarrow K^*(P^{k+1}) \longrightarrow K^{*[k+1]}[v_1, \cdots, v_l] \rightarrow 0$$

証明：$K^{*[k+1]}[v_1, \cdots, v_l]$ の生成元が、$K^*(P^{k+1})$ からの像であるから、その自然な対応をとればよい。

□

よって、加群として、

$$K^*(P^{k+1}) \cong K^{*[k+2]}[v_1, \cdots, v_l] \oplus S_{k+1}$$

という同型が得られた。この同型が積を保つことは、$\{v_i\}$ の定義と、S_{k+1} の定義からわかる。

さらに応用のために、次の定理を証明する。

$\boxed{\text{系}}$ 7.1.8　X を結合的な H 空間とすると、以下の三条件は同値。

i) $K^*(X)$ は A_n-primitive な元で生成される。

ii) $H^*(X:\mathbb{Q})$ は A_n-primitive な元で生成される。

iii) $X_{(0)}$ は $\prod_{i=1}^{l} S^{n_i}_{(0)}$ に、A_n-写像によってホモトピー同値となる。ただし、$X_{(0)}$, $S^n_{(0)}$ は、各々、空間 X，球面の 0-局所化である。

証明：i) から ii) の証明は、chern character による。また ii) から iii) は、$H^*(X:\mathbb{Q}) \cong H^*(X_{(0)}:\mathbb{Q})$ から

その A_n primitive な生成元系 $\{x_i\}$ の代表元

$$f_i : X_{(0)} \longrightarrow K(\mathbb{Q}, \deg x_i) \simeq S^{\deg x_i}_{(0)}$$

をとると、J. D. Stasheff の定理から、f_i は、A_n 写像としてよい。そこで、

$$f = (f_1 \times \cdots \times f_\ell) \circ \Delta : X_{(0)} \longrightarrow X_{(0)} \times \cdots \times X_{(0)} \longrightarrow \prod_{i=1}^{\ell} S^{\deg x_i}_{(0)}$$

をとればよい。

また iii) から ii) の証明は、0 への局所化写像

$$\varphi^X_{(0)} : X \longrightarrow X_{(0)}$$

が、X の A_n 構造の局所化

$$\varphi^E_{(0)} : E^i \longrightarrow E^i_{(0)}$$

$$\varphi^P_{(0)} : P^{i-1} \longrightarrow P^{i-1}_{(0)}$$

をその構造を保つ写像とすることから得られる。また iii) から i) を示すには、まず、$H^*(X, \mathbb{Q}) \approx K^*(X ; \mathbb{Q})$ より、$\mathbb{Q}$ 係数の K コホモロジーについては、主定理が成立している。よって、$H^*(X, \mathbb{Q})$ について主定理が成立している。$n = 2$ のときは、i) は成立しているから、帰納法によって示そう。そこで、$K^*(X)$ は A_{n-1} primitive な元により生成されているとしてよい。よって主定理から、

$$K^*(P^{k-1} ; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{[k]}[u_1, \cdots, u_\ell] \oplus S_{k-1}$$

そこで次の可換図に注目する。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Cok}\, p_k^! & \longrightarrow & K^*(P^k) & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\, p_k^! & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Cok}\, p_k^* & \longrightarrow & H^*(P^k ; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\, p_k^* & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

このとき、補題7.1.2により、

$$\begin{cases} \mathrm{rank}\left(K^*(P^k)/\mathrm{torsion}\right) = \dim_{\mathbb{Q}} H^*(P^k:\mathbb{Q}) \\ \mathrm{rank}\ \mathrm{Ker}\, p_k^! \leqq \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Ker}\, p_k^* \\ \mathrm{rank}\left(\mathrm{Cok}\, p_k^!/\mathrm{torsion}\right) \leqq \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Cok}\, p_{k-1}^* \end{cases}$$

であり、もし $p_k^!(\mathbb{Z}^{[k]}[u_1,\cdots,u_\ell]) \neq 0$ とすると、

$K^*(E^k)$: torsion free より、

$$\begin{cases} \mathrm{rank}\ \mathrm{Ker}\, p_k^! < \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Ker}\, p_k^* \\ \mathrm{rank}\left(\mathrm{Cok}\, p_k^!/\mathrm{torsion}\right) < \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Cok}\, p_k^* \end{cases}$$

より、 $\mathrm{rank}\left(K^*(P^k)/\mathrm{torsion}\right) < \dim_{\mathbb{Q}} H^*(P^k:\mathbb{Q})$
となり、 $K^*(P^k)\otimes\mathbb{Q} \approx H^*(P^k:\mathbb{Q})$ に反する。
故に $p_k^!(\mathbb{Z}^{[k]}[u_1,\cdots,u_\ell]) = 0$ 。すなわち、$u_1,\cdots,u_\ell$ は、$K^*(P^k)$ へ引きあげられる。 □

§8 応用

8.1 $Sp(2)$のコホモロジー

まず、$Sp(2)$の整数係数コホモロジー環は、

$$H^*(Sp(2):\mathbb{Z}) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}(x_3, x_7) \quad , \deg x_j = j$$

であり、$Sp(2)$の自己写像 $f : Sp(2) \longrightarrow Sp(2)$
は、コホモロジー環で準同型を誘導する。このとき、
丸山・岡[ ]に従って、写像fのdegreeを、

$$\deg f = (m, n)$$
$$\Leftrightarrow \quad f^*(x_3) = m x_3 \ , \ f^*(x_7) = n x_7$$

として定める。

命題 8.1.1 (Maruyama-Oka[15])
$m \equiv n \mod 12$

証明: $\deg f = (m, n)$ とする。fは胞体写像とし
てよいから、$Sp(2)$の7-skelton $Sp(2)^7$ へのf
の制限 $g : Sp(2)^7 \longrightarrow Sp(2)^7$ は、次の図を可換と
する。

$$\begin{tikzcd}
S^3 \arrow[r, hook] \arrow[d, "m"] & Sp(2)^7 \arrow[r] \arrow[d, "g"] & S^7 \arrow[r, "S(\omega)"] \arrow[d, "n"] & S^4 \arrow[d, "m"] \\
S^3 \arrow[r, hook] & Sp(2)^7 \arrow[r] & S^7 \arrow[r, "S(\omega)"] & S^4
\end{tikzcd}$$

ただし、ωは、$\pi_6(S^3)$の生成元である。よって、

$$m S(\omega) = n S(\omega)$$

であり、$S : \pi_6(S^3) \longrightarrow \pi_7(S^4)$ は単射であるので、

$m \equiv n \mod 12$ となる。（∵ $\pi_6(S^3) \cong \mathbb{Z}_{12}$）

さて、$BSp(2)$ の K コホモロジーは、Atiyah[1] を用いて、$U(n)$ の時と同様にして、次の形になる。

$$K^*(BSp(2)) \cong K^*[[u,v]], \quad P_1^K(\eta_{H^2})=u, \ P_2^K(\eta_{H^2})$$

をえる。ただし、η_{H^2} はその普遍バンドルであり、P_1^K 及び P_2^K は、K群のポアンカレ類である。

また、常コホモロジーは、

$$H^*(BSp(2);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x,y], \quad \deg x=4, \ \deg y=8$$

となるが、これらは、次のように与えられる。まず、η_{H^2} は、図のように、quaternion 直線バンドルに分解される。ただし、π_1 は、

$S^3\times S^3 \hookrightarrow Sp(2)$

なる包含写像から誘導される。また、quaternion 直線バンドルは、その旗バンドル $\pi_2: CP^{2n+1} \longrightarrow HP^n$ において、右のように分解する。i と j の歪可換性によって、（$ij=-ji$）片方が $\bar{\ }$ となる。

$$\begin{array}{ccc} \eta_H^1\times\eta_H^2 & & \eta_{H^2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ HP^\infty\times HP^\infty & \xrightarrow{\pi_1} & BSp(2) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \eta\oplus\bar{\eta} & & \eta_H \\ \downarrow & & \downarrow \\ CP^\infty & \xrightarrow{\pi_2} & HP^\infty \end{array}$$

$$CP^{2n+1} \xrightarrow{\pi_2} HP^n$$

よって、η_{H^2} は、

$\pi = \pi_1\circ(\pi_2\times\pi_2)$

によって、直線バンドルに

$$CP^{2n+1}\times CP^{2n+1} \xrightarrow{\pi} Sp(2)P^n$$

分解する。このとき、π は、コホモロジーで単射を誘導する。(splitting principle)

このとき、

$$\begin{aligned}\pi^* u &= \pi^* P_1^K(\eta_{H^2}) \\ &= \pi_1^*(\eta_H^1) - 1_H + \pi_2^*(\eta_H^2) - 1_H \\ &= \xi_1 + \bar{\xi}_1 - 2_C + \xi_2 + \bar{\xi}_2 - 2_C\end{aligned}$$

ただし、ξ_1, ξ_2 は、複素直線バンドルの K 群における類である。同様に、

$$\begin{aligned}\pi^* v &= \pi^* P_2^K(\eta_{H^2}) \\ &= (\pi_1 \times \pi_2)^*\left((\eta_H - 1_H)(\eta_H - 1_H) \right) \\ &= (\xi_1 + \bar{\xi}_1 - 2_C)(\xi_2 + \bar{\xi}_2 - 2_C)\end{aligned}$$

となる。

またコホモロジーにおいて、

$$\begin{aligned}\pi^*(x) &= \pi^*(P_1(\eta_{H^2})) \\ &= \pi^*((-1)^1 c_2(\eta_{H^2})) \\ &= - c_2(\xi_1 + \bar{\xi}_1 + \xi_2 + \bar{\xi}_2) \\ &= c_1(\xi_1)^2 + c_1(\xi_2)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi^*(y) &= \pi^*(P_2(\eta_{H^2})) \\ &= \pi^*((-1)^2 c_4(\eta_H)) \\ &= c_4(\xi_1 + \bar{\xi}_1 + \xi_2 + \bar{\xi}_2) \\ &= c_1(\xi_1)^2 \, c_1(\xi_2)^2\end{aligned}$$

以後は、複素バンドルのみ考察するので、自明バンドルの下に C などは付さない。

ここで、$x_1 = c_1(\xi_1)$, $x_2 = c_1(\xi_2)$ とおくと、

$$\pi^* ch(u) = (e^{x_1}+e^{-x_1}-2)+(e^{x_2}+e^{-x_2}-2)$$
$$= \sum_{k\geq 1} \frac{2}{(2k)!}(x_1^{2k}+x_2^{2k})$$
$$\pi^* ch(v) = (e^{x_1}+e^{-x_1}-2)(e^{x_2}+e^{-x_2}-2)$$
$$= \Big(\sum_{k\geq 1} \frac{2}{(2k)!} x_1^{2k}\Big)\Big(\sum_{\geq 1} \frac{2}{(2l)!} x_2^{2l}\Big)$$

より、これらは、x_1^2 と x_2^2 とに関して対称性をもつ。
よって、
$$\alpha = \pi^*(x) = x_1^2+x_2^2$$
$$\beta = \pi^*(y) = x_1^2\cdot x_2^2$$
で表現することができる。以下それを実行した。

$\boxed{\text{定義}}$ 8.1.4　次のような数論的関数を導入する。

i) $\left[{0 \atop 0}\right]=2$,　$2k>n \Rightarrow \left[{n \atop k}\right]=0$

$n\geq 1 \Rightarrow \left[{n \atop 0}\right]=1$

ii) $\left[{n+1 \atop k}\right] = \left[{n \atop k}\right] + \left[{n-1 \atop k-1}\right]$　$\left(\therefore \left[{2k \atop k}\right]=2\right)$

これは、n, k が小さいときは次のようになる。

$$\begin{array}{c}
2\\
1 \quad 0\\
1 \quad 2 \quad 0\\
1 \quad 3 \quad 0 \quad 0\\
1 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \quad 0\\
1 \quad 5 \quad 5 \quad 0 \quad 0 \quad 0\\
1 \quad 6 \quad 9 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0\\
1 \quad 7 \quad 14 \quad 7 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\\
1 \quad 8 \quad 20 \quad 16 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\\
1 \quad 9 \quad 27 \quad 30 \quad 9 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}$$

$n \downarrow$　　$k \searrow$

これを用いると、π^* が単射であることから、

$\boxed{\text{定理}}$ 8、1、5

i) $$ch(u) = \sum_{k\geq 1}(-1)^k\left(\sum_{l\geq 0}\frac{2}{(2l+4k)!}\left[{l+2k \atop k}\right]y^k x^l\right) + \sum_{l\geq 1}\frac{2}{(2l)!}x^l$$

ii) $$ch(v) = \sum_{m\geq 1}\left\{[2m,m] - \frac{4}{(2m)!(2m)!}\right\}y^m + \sum_{l\geq 1}\left\{[l+2m,m]\,y^m\right\}x^l$$

ただし、$$[n,m] = \sum_{j=1}^{m}\frac{(-1)^{m-j}\cdot 4\cdot\left[{n-2j \atop m-j}\right]}{(2n-2j)!\,(2j)!}$$

証明：i)では、$\pi^* ch\, u$ の形から、まず
$$\alpha_k = x_1^{2k} + x_2^{2k}$$
とおいて、これを α, β で表わした。

$\boxed{\text{補題}}$ 8、1、6 $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha^2 - 2\beta$, $\alpha_{n+1} = \alpha\alpha_n - \beta\alpha_{n-1}$
をみたす列 $\{\alpha_k\}$ は、次のように表わせる。
$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\left[{n \atop k}\right]\beta^k\alpha^{n-2k}$$

証明：この証明は、帰納法によって行なう。まず、$n=1$ のときは、両辺とも α に等しい。また、α_n で成立したとすると、n が偶数のとき、

$$\alpha_{n+1} = \alpha\alpha_n - \beta\alpha_{n-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\left[{n \atop k}\right]\beta^k\alpha^{n+1-2k}$$

$$-\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} (-1)^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \beta^{k+1} \alpha^{n-2k-1}$$

$$= \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} \alpha^{n+1} + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (-1)^k \left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \right) \beta^k \alpha^{n+1-2k}$$

$$= \begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} \alpha^{n+1} + \sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]} (-1)^k \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} \beta^k \alpha^{n+1-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{[\frac{n+1}{2}]} (-1)^k \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} \beta^k \alpha^{n+1-2k}$$

また n が奇数でも、

$$\alpha_{n+1} = \alpha \alpha_n - \beta \alpha_{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \beta^k \alpha^{n+1-2k} - \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \beta^{k+1} \alpha^{n-1-2k}$$

$$= \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} \alpha^{n+1} + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \right) \beta^k \alpha^{n+1-2k} + (-1)^{\frac{n+1}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ \frac{n-1}{2} \end{bmatrix} \beta^{\frac{n+1}{2}}$$

$$= \begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} \alpha^{n+1} + \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}-1} (-1)^k \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} \beta^k \alpha^{n+1-2k} + (-1)^{\frac{n+1}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ \frac{n+1}{2} \end{bmatrix} \beta^{\frac{n+1}{2}}$$

$$= \sum_{k=0}^{[\frac{n+1}{2}]} (-1)^k \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} \beta^k \alpha^{n+1-2k}$$

となる。よって帰納法が成立して補題は証明された。

□

これを直接 $\pi^* ch\,u$ に代入して、$l = n-2k$ とおけば、π^* が単射であるので、i) を得る。

ii) の証明は、まず、

$$\pi^* ch(v) = \sum_{n \geqq 2} \Big(\sum_{\substack{n=k+l \\ k\geqq 1,\, l \geqq 1}} \frac{4}{(2k)!\,(2l)!} x_1^{2k} x_2^{2l} \Big)$$

と変形し、

$$\beta_n = \sum_{\substack{n=k+l \\ k\geqq 1,\, l\geqq 1}} \frac{4}{(2k)!\,(2l)!} x_1^{2k} x_2^{2l}$$

とおき、これをまた α, β で表わす。

$\boxed{\text{補題}}$ 8.1.7

イ) $$\beta_{2n+1} = \sum_{m=1}^{n} \Big(\sum_{l=1}^{m} \frac{(-1)^{m-l} \cdot 4 \cdot \left[{2n-2l+1 \atop m-l}\right]}{(4n-2l+2)!\,(2l)!} \Big) \beta^m \alpha^{2n-2m+1}$$

ロ) $$\beta_{2n} = \sum_{m=1}^{n-1} \Big(\sum_{l=1}^{m} \frac{(-1)^{m-l} \cdot 4 \cdot \left[{2n-2l \atop m-l}\right]}{(4n-2l)!\,(2l)!} \Big) \cdot \beta^m \alpha^{2n-2m}$$
$$+ \Big(\sum_{l=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-l} \cdot 8}{(4n-2l)!\,(2l)!} + \frac{4}{(2n)!\,(2n)!} \Big) \cdot \beta^n$$

証明：イはまず、

$$\beta_{2n+1} = \sum_{\substack{k+l=2n+1 \\ k>l\geqq 1}} \frac{4}{(2k)!\,(2l)!} (x_1^{2k} x_2^{2l} + x_1^{2l} x_2^{2k})$$

$$= \sum_{\substack{k+l=2n+1 \\ k>l\geqq 1}} \frac{4}{(2k)!\,(2l)!} \beta^l \alpha_{k-l}$$

と変形し、これに α_{k-l} の式を代入する。すると、

$$\beta_{2n+1} = \sum_{\substack{k+l=2n+1 \\ k>l\geqq 1}} \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-l}{2}\right]} \frac{4 \left[{k-l \atop j}\right] \cdot (-1)^j}{(2k)!\,(2l)!} \cdot \beta^{l+j} \alpha^{k-l-2j}$$

$$= \sum_{\substack{n \geq l \geq 1 \\ n-l-[\frac{2n-2l+1}{2}] \geq j \geq 0}} \frac{(-1)^j \cdot 4 \cdot [{}^{2n-2l+1}_{\quad j}]}{(4n-2l+2)!\,(2l)!} \beta^{l+j} \alpha^{2n+1-2(l+j)}$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \frac{(-1)^{m-l} \cdot 4 \cdot [{}^{2n-2l+1}_{\ m-l}]}{(4n-2l+2)!\,(2l)!} \beta^m \alpha^{2n+1-2m}$$

を得る。ロ)は、

$$\beta_{2n} = \sum_{\substack{k+l=2n \\ k>l\geq 1}} \frac{4}{(2k)!\,(2l)!} (x_1^{2k} x_2^{2l} + x_1^{2l} x_2^{2k})$$
$$+ \frac{4}{(2n)!\,(2n)!} x_1^{2n} x_2^{2n}$$

と変形し、イ)と同様な操作を行なえばよい。 □

この補題で得た式に、$[n, m]$ の定義式を代入すれば、ii) を得る。 □

全く同様な計算を繰り返せば、アダムス作用素 ψ^n の作用も与えることができる。

<u>定理 8.1.8</u>

i) $$\psi^n u = \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^m \sum_{k=0}^{m} [{}^{n}_{k}][{}^{n-2k}_{m-k}] (v+2u+4)^{m-k} (u+4)^{n-2m} - 4$$

ii) $$\psi^n v = \sum_{[\frac{n}{2}] \geq k > l \geq 0} \sum_{j=0}^{k-l} (-1)^{k+l+j} [{}^{n}_{k}][{}^{n}_{l}][{}^{2k-2l}_{\ \ j}] (v+2u+4)^{n-2k+j}$$

証明： $$\pi^* \psi^n u = \xi_1^n + \xi_1^{-n} + \xi_2^n + \xi_2^{-n} - 4$$

$$\pi^* \psi^n v = (\xi_1^n + \xi_1^{-n} - 2)(\xi_2^n + \xi_2^{-n} - 2)$$
$$= (\xi_1^n + \xi_1^{-n})(\xi_2^n + \xi_2^{-n}) - 2(\xi_1^n + \xi_1^{-n} + \xi_2^n + \xi_2^{-n}) + 4$$

より、$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を、

$$a_n = \xi_1^n + \xi_1^{-n} \quad , \quad a = a_1 = \xi_1 + \xi_1^{-1}$$

$$b_n = \xi_2^n + \xi_2^{-n} \quad , \quad b = b_1 = \xi_2 + \xi_2^{-1}$$

とおくと、

$$\pi^* \psi^n u = a_n + b_n - 4$$

$$\pi^* \psi^n v = a_n \cdot b_n - 2(a_n + b_n) + 4$$

とかけ、a_n, b_n は 補題8.1.6 を用いて、

$$a_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \left[{n \atop k} \right] a^{n-2k}$$

$$b_n = \sum_{l=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^l \left[{n \atop l} \right] b^{n-2l}$$

とかける。また、$a_n + b_n$, $a_n \cdot b_n$ は、a, b の対称式であるので、補題8.1.6 より、$a_n + b_n$ は、

$$a_n + b_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \left[{n \atop k} \right] \sum_{j=0}^{[\frac{n-2k}{2}]} (-1)^j \left[{n-2k \atop j} \right] (ab)^j (a+b)^{n-2j-2k}$$

$$= \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^m \sum_{k=0}^{m} \left[{n \atop k} \right] \left[{n-2k \atop m-k} \right] (ab)^{m-k} (a+b)^{n-2m}$$

とかけることになった。また $a_n \cdot b_n$ は、補題8.1.7 の証明における変形と同様な変形を行って、

$$a_n \cdot b_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \sum_{l=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^{k+l} \left[{n \atop k} \right] \left[{n \atop l} \right] a^{n-2k} b^{n-2l}$$

$$= \sum_{[\frac{n}{2}] \geq k > l \geq 0} (-1)^{k+l} \left[{n \atop k} \right] \left[{n \atop l} \right] (ab)^{n-2k} \left(a^{2(k-l)} + b^{2(k-l)} \right)$$

$$+ \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \left[{n \atop k} \right]^2 (ab)^{n-2k}$$

$$= \sum_{[\frac{n}{2}] \geq k > l \geq 0} (-1)^{k+l} \left[{n \atop k} \right] \left[{n \atop l} \right] (ab)^{n-2k} \sum_{j=0}^{k-l} (-1)^j \left[{2k-2l \atop j} \right] (ab)^j$$

$$\times (a+b)^{2k-2l-2j}$$

$$= \sum_{[\frac{n}{2}]\geq k>l\geq 0} \sum_{j=0}^{k-l} (-1)^{k+l+j} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k-2l \\ j \end{bmatrix} (ab)^{n-2k+j} (a+b)^{2k-2l} \cdot$$

$$\times (a+b)^{-2j} + \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^2 (ab)^{n-2k}$$

より代入して得られる。 □

8.2 $Sp(2)$ 上の自己 A_3 写像

さて、$Sp(2)_{(0)} \simeq S^3_{(0)} \times S^7_{(0)}$ なるH同値写像がある。([14]) このホモトピー同値写像が A_n 写像になるための障害は、第一節で示した定義と、障害の理論から、次のホモトピー集合にある。

$$[\, S^{n-1} \wedge \underbrace{(S^3_{(0)} \times S^7_{(0)}) \wedge \cdots \wedge (S^3_{(0)} \times S^7_{(0)})}_{n} : S^3_{(0)} \times S^7_{(0)} \,]_0$$

$$\approx \tilde{H}^3 (S^{n-1} \wedge (S^3_{(0)} \times S^7_{(0)}) \wedge \cdots \wedge (S^3_{(0)} \times S^7_{(0)}) : \mathbb{Q})$$

$$\oplus \tilde{H}^7 (S^{n-1} \wedge (S^3_{(0)} \times S^7_{(0)}) \wedge \cdots \wedge (S^3_{(0)} \times S^7_{(0)}) : \mathbb{Q})$$

ここで、$S^3_{(0)} \times S^7_{(0)}$ は、$(3-1)$ 連結なので、

$$S^{n-1} \wedge \underbrace{(S^3_{(0)} \times S^7_{(0)}) \wedge \cdots \wedge (S^3_{(0)} \times S^7_{(0)})}_{n}$$

は $(4n-2)$ 連結であり、$n \geqq 3$ なら、$4n-2 \geqq 10$ であるので、はじめのHホモトピー同値写像は、任意の n に対して、A_n 同値になる。よって、系7.1.8と定理6.3.6(主定理)により、

$$K^*(Sp(2)P^n) \cong \mathbb{Z}^{(n+1)}[u, v] \oplus S_n$$

となる。u, v は、$K^*(BSp(2))$ からの像である。また、有理数係数コホモロジーでも、

$$H^*(Sp(2)P^n) \cong \mathbb{Q}^{(n+1)}[x, y] \oplus S_n^{(0)}$$

が成立して、chern character は、$n=3$ のときも自

然性をもつから、　$ch(S_3) \subset S_3^{(0)}$　であり、u, v は、

$$
\begin{aligned}
ch(u) \equiv\ & x + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{360}x^3 \\
& -\frac{1}{6}y - \frac{1}{120}yx - \frac{1}{7!}yx^2 \\
& + \frac{1}{2\cdot 7!}y^2 + \frac{1}{9!}y^2x \\
& - \frac{1}{3\cdot 11!}y^3 \qquad \mathrm{mod}\ S_3^{(0)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ch(v) \equiv\ & y + \frac{1}{2\cdot 5!}y^2 + \frac{1}{5\cdot 9!}y^3 \\
& + \frac{1}{12}yx + \frac{10}{3\cdot 8!}y^2x \\
& + \frac{1}{3\cdot 5!}yx^2 \qquad \mathrm{mod}\ S_3^{(0)}
\end{aligned}
$$

とかけ、よって、

$$
\begin{aligned}
ch(u^2) \equiv\ & x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}xy - \frac{2}{45}x^2y \\
& + \frac{1}{36}y^2 + \frac{15}{7!}xy^2 - \frac{2}{6\cdot 7!}y^3 \qquad \mathrm{mod}\ S_3^{(0)}
\end{aligned}
$$

$$ch(vu) \equiv yx + \frac{1}{6}yx^2 - y^2 - \frac{13}{720}y^2x - \frac{3}{7!}y^3 \quad \mathrm{mod}\ S_3^{(0)}$$

$$ch(vu^2) \equiv yx^2 \qquad \mathrm{mod}\ S_3^{(0)}$$

$$ch(v^2) \equiv y^2 + \frac{1}{6}y^2x + \frac{1}{5!}y^3 \qquad \mathrm{mod}\ S_3^{(0)}$$

$$ch(u^3) \equiv x^3 - \frac{1}{2}yx^2 + \frac{1}{12}y^2x - \frac{1}{6^3}y^3 \qquad \mathrm{mod}\ S_3^{(0)}$$

$$ch(v^2u) \equiv y^2x - \frac{1}{6}y^3 \qquad \mathrm{mod}\ S_3^{(0)}$$

$$ch(v^3) \equiv y^3 \qquad \mathrm{mod}\ S_3^{(0)}.$$

よって、 $f : Sp(2) \longrightarrow Sp(2)$ を A_3 写像とすると、その構造を保つ写像

$$\tilde{f} : Sp(2)P^3 \longrightarrow Sp(2)P^3 \quad ; \; \text{s.f の拡張}$$

が存在する。よって、$\tilde{f}$ は、有理係数のコホモロジーにおいて、f と同様、

$$\tilde{f}^*(x) \equiv mx \;,\quad \tilde{f}^*(y) \equiv ny \quad \bmod S_3^{(0)}$$

$$(\deg f = (m, n))$$

をみたす。ここで、$S_3^{(0)}$ は、decomposable element の module から、コネクティング準同型によって写された像であるから、

$$\tilde{f}^*(S_3^{(0)}) \subseteq S_3^{(0)}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} ch\,\tilde{f}^*(u) \equiv\; & mx + \frac{1}{12}m^2x^2 + \frac{m^3}{360}x^3 \\ & - \frac{n}{6}y - \frac{1}{120}nmyx - \frac{1}{7!}nm^2yx^2 \\ & + \frac{1}{2\cdot 7!}n^2y^2 + \frac{1}{9!}n^2my^2x \\ & - \frac{1}{3\cdot 11!}n^3y^3 \\ & \bmod S_3^{(0)} \end{aligned} \;;$$

$$\begin{aligned} ch\,\tilde{f}^*(v) \equiv\; & ny + \frac{1}{2\cdot 6!}n^2y^2 + \frac{1}{5\cdot 9!}n^3y^3 \\ & + \frac{1}{12}nmyx + \frac{10}{3\cdot 8!}n^2my^2x \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{3\cdot 5!} n m^2 y x^2 \qquad \mathrm{mod}\ S_3^{(0)}$$

$\boxed{\text{補題}}$ 8.2.1 上式を変形して、次の事実を見い出すことができる。

i) $\mathfrak{F}^*(u)$ における u^2, u^3 の係数は、各々、

$$\frac{m(m-1)}{12} \qquad \frac{m(m-1)(m-4)}{360}$$

ii) $\mathfrak{F}^*(v)$ における vu, vu^2 の係数は各々

$$\frac{n(m-1)}{12} \qquad \frac{n(m-1)(m-4)}{360}$$

よって次の定理を得る。

$\boxed{\text{定理}}$ 8.2.2 $Sp(2)$ 上の自己 A_3 写像 (i.e. ホモトピー結合性を保存する自己写像) は、その degree を、(m, n) とすれば、(m, n) は次の集合に含まれる。

$$\left\{ (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists k \in \mathbb{Z} \quad m \equiv k^2 \ \mathrm{mod}\ 360 \\ \exists \ell \in \mathbb{Z} \quad n = m + 12\ell \text{ かつ「} 3|k \Rightarrow 3|\ell \text{」} \end{array} \right\}$$

参考文献

[1] M.F.Atiyah: K-Theory, Benjamin, New York (1967)

[2] A.Borel: Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes des groupes de Lie compacts, Ann. of Math.57 (1953) 115-207.

[3] W.Browder: Torsion in H-spaces, Ann. of Math.74 (1961) 24-51.

[4] W.Browder and E.Thomas: On the Projective Plane of a H-space, Ill. J. Math. 7 (1963) 492-502.

[5] L.Hodgkin: On the K-theory of Lie groups, Topology, 6 (1967) 1-36.

[6] H.Hopf: Über die Topologie der Gruppen mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen, Ann. of Math. 42 (1941) 3-61.

[7] J.R.Hubbuck: On homotopy commutative H-spaces, Topology,8 (1969) 119-126.

[8] J.R.Hubbuck: Mod p associative H-spaces of given rank, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 88 (1980) 153-160.

[9] I.M.James: Reduced product spaces, Ann. of Math. (2) 62 (1955) 170-197.

[10] J.P.Lin: Torsion in H-spaces,I, Ann. of Math. 103 (1976) 457-487.

[11] J.P.Lin: Torsion in H-spaces,II, Ann. of Math. 107 (1978) 41-88.

[12] J.P.Lin: Two torsion and the loop space conjecture, Ann. of Math. 115 (1982) 35-91.

[13] K.Maruyama and S.Oka: Self-H-maps of H-spaces of Type (3,7), Mem. of the Fac. of Sci., Kyushu Univ. Ser. A,35, No.2 (1981) preprint.

[14] M.Mimura, G.Nishida and H.Toda: Localization of CW-complexes and its applications, J. Math. Soc. Japan 23 No.4 (1971) 593-624.

[15] J.D.Stasheff: Homotopy associativity of H-spaces,I, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963) 275-292.

[16] J.D.Stasheff: Homotopy associativity of H-spaces,II, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963) 293-312.

[17] J.D.Stasheff: H-spaces from a Homotopy Point of View, Lecture Notes in Math. 161 Springer-Verlag (1970)

[18] E.Thomas: On functional cup-products and the transgression operator, Arch. Math. 12 (1961) 435-444.

[19] G.W.Whitehead: Elements of Homotopy Theory, Springer-Verlag (1979)

[20] A.Zabrodsky: Homotopy associativity and finite CW-complexes, Topology,9 (1970) 121-128.

[21] A.Zabrodsky: Hopf spaces, North Holland (1976)

[22] I.M.James: On H-spaces and their homotopy groups, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 11 (1960) 161 179.