Ganea 予想と Lusternik-Schnirelmann カテゴリーの最近の発展

岩瀬　則夫

0　はじめに

Lusternik-Schnirelmann カテゴリー（略して L-S カテゴリー）は、多様体上の smooth な実関数の critical/stationary points の個数の下限を与える自然数として、Lusternik と Schnirelmann [42] によって 1934 年に定義されたホモトピー不変量である。ただし今日では、彼等の定義より 1 少ない（=正規化された）値で定める文献が増えてきている。それはちょうど、自然数を 1 から始めるか 0 から始めるかといった違いにあたる。本稿においては正規化された L-S カテゴリーを「L-S の猫」と呼ぶことにする。これらの不変量は、後で述べる定義から一般の位相空間に対しても定義され、空間の「複雑さ」を表す量となる。

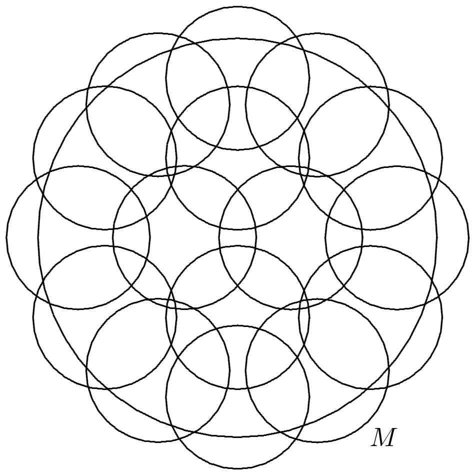

図 1

例えば Matumoto [44, 45], Komatsu [39, 38] により knot 理論において、その複雑さを表す量として採用され、knot あるいは link の補空間の L-S の猫が 1 であることが多くの場合に knot あるいは link が自明になる為の必要十分条件であることが示された。また離散群に対してその複雑さを表す量として与えられ、離散群の L-S の猫と（分類空間の）次元とは、いくつかの場合を除いて等しいという 1957 年の Eilenberg-Ganea の定理（[7]）から「両者は常に等しい」と予想される。ただしこの原稿を書いている時点ではこの問題は未解決である。さて L-S の猫が 0 である空間は可縮であり、1 である空間はこれに次いで簡単な空間である co-Hopf 空間である。ただしその「簡単な」空間が「円周の一点和と単連結な空間との一点和になる」という「co-Hopf 空間に関する Ganea 予想」は各素数 $p \geq 0$ に対し p 完備なホモトピー圏において代数的な議論を用いて肯定的に解決されたが（Henn [21], Hubbuck-I[24]）、本来の予想は否定的に解決された（I [26]）。

近年、Symplectic 多様体に対する Arnold の予想が L-S の猫と密接な関連を持つこと（Hofer [23], Floer [11], Rudyak [53]）が（安定）ホモトピー不変量を用いて明らかにされた。その一方で、L-S の猫の積公式に関する「Ganea 予想」が有理ホモトピー圏で肯定的に（Hess [22]）、しかし本来の予想は（非安定）高次ホモトピー不変量を用いて否定的に（I [25, 27]）解決された。

本稿においては、歴史的事項の多くの記述を I. James [32, 33], G. W. Whitehead [70, 71] に依存している。また L-S の猫の代数的取り扱いが可能となる有理ホモトピー論では、独自の展開がなされており、これについては Felix-Halperin-Thomas [9], Cornea-Lupton-Oprea-Tanré [6] 等の解説書を参照されたい。特に [33], [6] は L-S の猫について網羅的に解説している。

記号については、多くは研究者の大勢に従ったが、e や c など主として有理ホモトピー論由来の記

号は、ホモトピー論全体で特別な意味を持つ記号[1)]と重複する為、これを避ける目的で本稿においては本来の意味内容を明確に表すと思われる wgt、cup など[2)]の表記を採用する。 これより以後は、位相空間は連結かつ CW 分割可能とする。 このとき連続写像は胞体写像で近似される。

1 Lusternik-Schirelmann の猫たち

まず、Lusternik と Schnirelmann によって与えられた古典的な猫たちの間の関係を復習する。

1.1 幾何的な猫たち

（可微分）閉多様体 M 上の smooth な実関数の critical points は、いくつあるであろうか？ その最少数（あるいは最少数から1を引いた数）を $\mathrm{Crit}(M)$（あるいは $f\mathrm{Cat}(M)$）で表す。 与えられた関数が Morse 関数ならば critical points はハンドル分解を導くが、Hessian の退化があり得る状況ではむしろ embedded closed balls による被覆（Takens [64]）を導く。— さて閉多様体 M は、いったい何枚の embedded closed balls で覆い尽くせる（図 1 ）であろうか？ その最少数を $\mathrm{Ball}(M)$ で表すと、[64] の証明から次の不等式が得られる：

定理 1.1 (Takens [64]) $\mathrm{Ball}(M) \le \mathrm{Crit}(M) = f\mathrm{Cat}(M){+}1 \le \dim(M){+}1.$

次の $g\mathrm{Cat}(-)$ も $f\mathrm{Cat}(-)$ と共にホモトピー不変ではない幾何的な猫の一種である。

定義 1.2 (Fox [12]) 位相空間 X は、いったい何枚の可縮な閉集合[3)]で覆い尽くせるであろうか? その最少数から1を引いた数を $g\mathrm{Cat}(X)$ で表す。

1.2 古典的な猫

L-S の猫は $g\mathrm{Cat}(-)$ をホモトピー不変量となるようにしたものと見なせる： 位相空間 X の部分集合 A は、包含写像 $i : A \hookrightarrow X$ が null-homotopic であるとき categorical（猫的）と呼ばれる。

定義 1.3 (Lusternik-Schnirelmann [42]) 位相空間 X は、いったい何枚の猫的な閉集合で覆い尽くせるであろうか？ その最少数から1を引いた数を $\mathrm{cat}(X)$ で表し、*L-S* の猫などと呼ぶ。

Whitehead [70, 71], Berstein-Ganea [1] によれば、多様体 M に対しては L-S の猫の定義において、「閉集合」を「包含写像が homotopy 拡張性質を持つ（=NDR）閉集合」に置き換えても、値は変わらない。 ところが猫的な NDR 閉集合 A に対する包含写像 $i_A : A \hookrightarrow X$ の null-homotopy は、恒等写像 $1_X : X \to X$ を変形して、A を基点に潰す写像 $r_A : X \to X,\ r_A(A) = \{*\}$ に変形する homotopy に拡張される。 従って $m{+}1$ 枚の猫的な NDR 閉集合によって X が覆われるとき、上の拡張された homotopy を並べることで $m{+}1$ 重対角写像 $\Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X$ を「fat wedge」と呼ばれる部分空間 $\prod^{m+1}_m X = \{(x_0, x_1, ..., x_m) | \exists i \,\text{s.t.}\, x_i = *\} \subseteq \prod^{m+1} X$ に圧縮する homotopy が得られる。 そこで本稿では、ホモトピー論で標準的な次の定義をL-Sの猫の定義として採用する：

定義 1.4 (Whitehead [70, 71], Berstein-Ganea [1]) 位相空間 X に対し次のように定める。

$$\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \ge 0 \,\middle|\, \begin{array}{l} m{+}1\text{-重対角写像 } \Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X \text{ を圧縮して、部分空間} \\ \text{への写像 } s : X \to \prod^{m+1}_m X \subseteq \prod^{m+1} X \text{ を得ることができる。} \end{array} \right\}$$

注 1.5 この定義で *L-S* の猫は 0 以上の整数値（または ∞）をとるホモトピー不変量である。

Lusternik と Schnirelmann の猫は、幾何的な猫 $g\mathrm{Cat}(-)$ をホモトピー不変量としたものと考えることができる。 L-S の猫と幾何的な猫たちの関係を以下にまとめて述べる：

定理 1.6 (L-S [42], Fox [12], Takens [64], Ganea [14], Whitehead [71])

(1) 閉多様体 M は「$\mathrm{cat}(M) \leq g\mathrm{Cat}(M) \leq \mathrm{Ball}(M){-}1 \leq \mathrm{Crit}(M){-}1 \leq \dim(M)$」をみたす。

(2) 位相空間 X は「$\mathrm{cat}(X) \leq g\mathrm{Cat}(X) \leq \dim(X)$」をみたす。

1.3 「強い」古典的な猫

実は幾何的な猫をホモトピー不変量とする方法は一通りではない。 実際 Ganea は上の (2) に挙げた不等式を用いて「強い」猫を次のように与えた：

定義 1.7 (Ganea [14]) 位相空間 X に対して、X とホモトピー同値な位相空間 Y 全体を考え、$g\mathrm{Cat}(Y)$ の最小値を $\mathrm{Cat}(X)$ で表す： $\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{Cat}(X) \leq g\mathrm{Cat}(X) \leq \dim(X)$.

さらに Ganea は、cone-length などと呼ばれる「強い」猫のもう一つの定義を与えた。

定義 1.8 連続写像 $h : A \to B$ の写像錐（*mapping cone*）$C(h)$ とは、位相和 $\{*\} \coprod A{\times}[0,1] \coprod B$ から $(a,1) \in A{\times}[0,1]$ と $h(a) \in B$ とを、また $(a,0) \in A{\times}[0,1]$ と $*$ とを同一視して得られる等化空間である。このとき B は、包含写像 $B \hookrightarrow \{*\} \coprod A{\times}[0,1] \coprod B$ と等化写像 $\{*\} \coprod A{\times}[0,1] \coprod B \to C(h)$ の合成写像により C の閉部分空間と見なされる。

定義 1.9 (Ganea [14]) 位相空間 X に対して、連続写像の集合 $\{h_n : A_n \to Y_n \;\; m{-}1 \geq n \geq 0\}$ で、$Y_0 = \{*\}$ と $Y_{n+1} = C(h_n) \supset Y_n$ $(m{-}1 \geq n)$ をみたし $Y_m = C(h_{m-1}) \simeq X$ となるものをすべて考える。 各々の集合はいったいいくつの写像からなるのであろうか？　その最少数を $\mathrm{Cone}(X)$ で表す。 また X に対するこのような表示は *cone* 分解などと呼ばれる。

定理 1.10 (Ganea [14]) 位相空間 X に対して「$\mathrm{Cone}(X) = \mathrm{Cat}(X)$」が成立する。

さらに Cornea は空間 A_n を $\Sigma^n B_n$ の形に限定することで、新たな「強い」猫を定義した。

定義 1.11 (Cornea [4]) 位相空間 X に対して、連続写像の集合 $\{h_n : \Sigma^n B_n \to Y_n \;\; m{-}1 \geq n \geq 0\}$ で、$Y_0 = \{*\}$ と $Y_{n+1} = C(h_n) \supset Y_n$ $(m{-}1 \geq n \geq 0)$ をみたし $Y_m = C(h_{m-1}) \simeq X$ となるものをすべて考える。 各々の集合に含まれる写像の最少数を $\mathrm{Cl}(X)$ で表す。

定理 1.12 (Cornea [5]) 位相空間 X に対して「$\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{Cone}(X)$ $(= \mathrm{Cat}(X))$」が成立する。

以上のように「強い猫」は本質的には unique であることが分かっている。 さらに $\Sigma^n B_n$ を球面の一点和の形に限定することで有理ホモトピー論における cone-length に類似した不変量 $\mathrm{Cl}_S(X)$（胞体 cone-length）も得られるが、本稿の主題からは離れる為これ以上は触れない：

定理 1.13 (L-S [42], James [32], Takens [64, 65], Ganea [14])　位相空間 X に対して、次の不等式が成立する。

$$\mathrm{Cat}(X){-}1 \leq \mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{Cat}(X) \leq g\mathrm{Cat}(X) \leq \dim(X).$$

1.4 「弱い」古典的な猫たち

上記の強い猫を、L-S の猫に対する上からの評価と見なした場合、下からの評価はどのように与えられるであろうか？　実は L-S の猫や強い猫たちに比べてより弱い不変量ではあるが、より計算の可能性が高い猫たちがいくつか知られている。 そのうちの古典的なものを以下に述べる。

定義 1.14 (Whitehead [70, 71])

$$w\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, \bar{\Delta}^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X \to \bigwedge^{m+1} X \text{ は } \textit{null-homotopic} \text{ である} \right\}$$

ここで $\prod^{m+1} X / \prod^{m+1}_m X = \bigwedge^{m+1} X$（smash 積）に注意すれば次を得る。

定理 1.15 (Whitehead [70, 71])　*(1)* 不等式 $w\mathrm{cat}(X) \le \mathrm{cat}(X)$ が成立する。

(2) h^* を乗法的な一般コホモロジー論とする。 $\tilde{h}^*(X)$ のどれかの m 個の元の積が 0 でないならば、$w\mathrm{cat}(X) \ge m$ が成立する。

略証。　まず (1) は、$\mathrm{cat}(X) = m$ とすると、$\Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X$ が $\prod^{m+1}_m X$ に compressible であることから、reduced diagonal $\bar{\Delta}^{m+1} : X \to \bigwedge^{m+1} X$ は零ホモトープである。従って $w\mathrm{cat}(X) \le m = \mathrm{cat}(X)$ が成立する。

次に (2) は対偶を示す：$w\mathrm{cat}(X) < m$ とすると、定義から reduced diagonal $\bar{\Delta}^m : X \to \bigwedge^m X$ は零ホモトープである。 さらに $\bar{h}^*(X)$ の任意の m 個の元の積は

$$\bar{h}^*(X)\otimes_{h^*}\cdots\otimes_{h^*}\bar{h}^*(X) \longrightarrow \bar{h}^*(X\wedge\cdots\wedge X) \xrightarrow{\bar{\Delta}^{m*}} \bar{h}^*(X)$$

を通り、従ってすべて 0 である。　　終り。

定義 1.16 位相空間 X に対して *cup-length* と呼ばれる不変量 $\mathrm{cup}(-)$ を定義する：

(1) h を乗法的コホモロジー論とするとき、次のように *cup-length* を定める。

$\mathrm{cup}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{ m \ge 0 \,\middle|\, \forall\{u_0,\cdots,u_m \in \tilde{h}^*(X)\}\, u_0{\cdot}u_1{\cdot}\cdots{\cdot}u_m = 0 \right\}$

特に h が R 係数の常コホモロジーのとき、$\mathrm{cup}(X;h)$ を $\mathrm{cup}(X;R)$ で表すことがある。

(2) $\mathrm{cup}(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{cup}(X;h) \,|\, h$ は乗法的コホモロジー論$\}$ と定める。

定理 1.17 任意の乗法的コホモロジー論 $h^*(-)$ に対し次の不等式／等式が成立する：

(1) $\mathrm{cup}(X;h) \;\le\; \mathrm{cup}(X) \;\le\; w\mathrm{cat}(X) \;\le\; \mathrm{cat}(X) \;\le\; \mathrm{Cat}(X).$

(2) $\mathrm{cup}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \ge 0 \,\middle|\, \bar{\Delta}^{m+1} : X \to \bigwedge^{m+1} X \text{ は } \textit{stably} \text{ に } \textit{null-homotopic} \text{ である} \right\}.$

証明。　(1) は定義より明らかである。 そこでここでは (2) を証明する：　始めに $m =$（右辺）とすれば、cup-length の定義より直ちに $\mathrm{cup}(X) \le m$ を得る。 次に、逆向きの不等号を示す：まず、空間 X の懸垂 spectrum の多重 smash 積 $\bigwedge^i(X) = \bigwedge^i\Sigma^\infty X = \Sigma^\infty\bigwedge^i X$（$i \ge 0$）の無限 wedge 和で表される次のような乗法的 spectrum $\mathcal{E}_X$ をとり、$h_X(-) = \{(-), \mathcal{E}_X\}$ と定義する：

$$\mathcal{E}_X = (S^0) \vee (X) \vee \bigwedge\nolimits^2(X) \vee \cdots \vee \bigwedge\nolimits^m(X) \vee \bigwedge\nolimits^{m+1}(X) \vee \cdots.$$

そして $\iota \in \tilde{h}^*_X(X) = \{(X), \mathcal{E}_X\}$ を wedge 和について $\mathcal{E}_X$ の２番目の因子 (X) への包含写像で表される要素とすると、$\iota^m = \bar{\Delta}^{m*}(\iota\otimes\cdots\otimes\iota) \in \tilde{h}^*_X(X) = \{(X), \mathcal{E}_X\}$ は reduced diagonal $\bar{\Delta}^m : X \to \bigwedge^m X$ で代表される $\mathcal{E}_X$ の $(m{+}1)$ 番目の因子 $\bigwedge^m(X)$ への安定写像であるので、m の取り方から non-trivial である。 従って $\mathrm{cup}(X) \ge \mathrm{cup}(X;h_X) \ge m$ を得る。　　終り。

2　L-S の猫の計算

この節では、猫たちの基本的な性質と上下の評価により L-S の猫が決定される様子を観察する。

2.1　L-S の猫の一般的性質

例 2.1　*(1)*　$\mathrm{cat}(X) = 0$ となるには空間 X が可縮であることが必要十分である。

(2)　$\mathrm{cat}(X) = 1$ となるには空間 X が可縮でない *co-Hopf* 空間であることが必要十分である。

(3)　位相空間 X が位相空間 Y を支配すれば、$\mathrm{cat}(X) \ge \mathrm{cat}(Y)$ が成立する。

(4) *(Varadarajan [69], Hardie [20])*　*Fibre* 空間 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ は次の不等式をみたす。

$\mathrm{cat}(E){+}1 \le (\mathrm{cat}(F){+}1){\cdot}(\mathrm{cat}(B){+}1).$

(5) (Ganea [14]) *Fibre* 空間 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ は $\mathrm{Cat}(E)+1 \leq (\mathrm{Cat}(F)+1)\cdot(\mathrm{Cat}(B)+1)$ をみたす。

(6) (Fox [12]) 位相空間 X, Y に対して、$\mathrm{cat}(X{\times}Y) \leq \mathrm{cat}(X){+}\,\mathrm{cat}(Y)$ が成立する。

(7) (Takens [65]) 位相空間 X, Y に対して、$\mathrm{Cat}(X{\times}Y) \leq \mathrm{Cat}(X){+}\,\mathrm{Cat}(Y)$ が成立する。

定理 2.2 (Ganea [14]) $(d{-}1)$ 連結な位相空間 X は $\mathrm{Cat}(X) \leq \dfrac{\dim(X)}{d}$ （$d \geq 2$）をみたす。

略証[4)]。 X の $(d{-}1)$-skeleton は一点空間 $\{*\}$ としてよい。 まず $k \geq 0$ に対し X_k を X の $((k{+}1)d-1)$-skeleton とすると、商空間 X_{k+1}/X_k の次元と連結性の関係から、これは何らかの空間 K_k の懸垂である： $X_1 \simeq \Sigma K_0$ また $X_{k+1}/X_k \simeq \Sigma K_k$（$k \geq 2$ のときは K_k も懸垂空間）である。さて $X_0 = \{*\}$ より、$X_1 \simeq X_0 \cup_{h_0} C(K_0)$,（$h_0 = * : K_0 {\to} \{*\}$）であるので以下は $k \geq 2$ とする。Blakers-Massey の定理から $\pi_q(X_{k+1}, X_k) \to \pi_q(\Sigma K_k)$ は $q < (k{+}2)d{-}1$ で同型かつ $q = (k{+}2)d{-}1$ で全射である。 ここで商写像 $f_k : X_{k+1} \to X_{k+1}/X_k$ の homotopy fibre を F_k とすれば、Fibre 空間 $F_k \hookrightarrow X_{k+1} \to \Sigma K_k$ と対 (X_{k+1}, X_k) に随伴する完全系列についての 4 項補題から、自然な包含写像 $X_k \hookrightarrow F_k$ は $((k{+}2)d-2)$-連結となる：

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_{q+1}(X_{k+1}, X_k) & \longrightarrow & \pi_q(X_k) & \longrightarrow & \pi_q(X_{k+1}) & \longrightarrow & \pi_q(X_{k+1}, X_k) \\
\downarrow & & \downarrow & & \| & & \downarrow \\
\pi_{q+1}(\Sigma K_k) & \longrightarrow & \pi_q(F_k) & \longrightarrow & \pi_q(X_{k+1}) & \longrightarrow & \pi_q(\Sigma K_k).
\end{array}$$

ここで $\dim(K_k) \leq (k{+}2)d-2$ より、J.H.C. Whitehead の定理から $f_* : [K_k, X_k] \longrightarrow [K_k, F_k]$ も全射となり、同様な完全系列の 4 項補題を用いて次の全射を得る。

$$[C(K_k), K_k; X_{k+1}, X_k] \to [\Sigma K_k, X_{k+1}/X_k] = [\Sigma K_k, \Sigma K_k]$$

右辺の ΣK_k の恒等写像に対応する写像 $\chi_k \in [C(K_k), K_k; X_{k+1}, X_k]$ を左辺から選び、$h_k = \chi_k|_{K_k} : K_k \to X_k$ とおけば χ_k はホモロジー同値 $\tilde{\chi}_k : X_k {\cup_{h_k}} C(K_k) \to X_{k+1}$ を誘導する。 ここで考えている空間はすべて単連結であるので、$X_{k+1} \simeq X_k {\cup_{h_k}} C(K_k)$, $h_k : K_k {\to} X_k$ $(k{\geq}1)$ となり、$\mathrm{Cat}(X_m) \leq m$ $(m{\geq}0)$ を意味する。そこで $\dim(X) = nd{+}r,\ 0{\leq}r{<}d$ とすると、$\dim X \leq (n{+}1)d{-}1$ より $\mathrm{Cat}(X) = \mathrm{Cat}(X_n) \leq n \leq \dfrac{\dim(X)}{d}$ を得る。 終り。

さらに Ganea は次を示している：

定理 2.3 (Ganea [14]) 位相空間 X が $(d{-}1)$ 連結かつ $\dim(X) \leq (k{+}2)d-3$, $\mathrm{cat}(X) \leq k$ ならば、$\mathrm{Cat}(X) \leq k$（$d \geq 2$）が成立する。

ホモトピー集合 $[\Sigma A, X]$ はよく知られているように自然な群構造を持つ。 $i_t : \Sigma A \hookrightarrow \Sigma A {\vee} \Sigma A$ を第 t 成分への包含写像（$t = 1, 2$）、$p_t : \Sigma A {\vee} \Sigma A \to \Sigma A$ を第 t 成分への射影（$t = 1, 2$）とすると、$p_{s*} i_t = \delta_{s,t} \cdot 1_{\Sigma A}$（$\delta s, t$ は Kronecker の delta）が成立する。

定理 2.4 (Ganea [15]) 位相空間 A, B に対する次の群の系列は、*split* する短完全列である：

$$1 \to [\Sigma B, \Omega\Sigma A {*} \Omega\Sigma A] \xrightarrow{[e_1,e_2]_*} [\Sigma B, \Sigma A {\vee} \Sigma A] \xrightarrow{p_{1*} \times p_{2*}} [\Sigma B, \Sigma A] \times [\Sigma B, \Sigma A] \to 1.$$

（$i_{1*} {\times} i_{2*}$ が *splitting* を与える）。 ただし $[e_1, e_2]$ は $e_1 = i_1 {\circ} \mathrm{ev}$ と $e_2 = i_2 {\circ} \mathrm{ev}$ との一般 *Whitehead* 積であり、$\mathrm{ev} : \Sigma\Omega\Sigma A \to \Sigma A$ は代入写像である。

定義 2.5 (B-H [2]) 任意の写像 $f:\Sigma B\to\Sigma A$ に対し $(i_1+i_2)\circ f\sim i_1\circ f+i_2\circ f+[e_1,e_2]\circ g$ をみたす $g:\Sigma B\to\Omega\Sigma A{*}\Omega\Sigma A$ が *up to homotopy* で一意的に存在する（*Saito [54]*）。 この g を $H_1(f)$ で表し、*Berstein-Hilton* の（一次の）*Hopf* 不変量と言う。

注 2.6 *Berstein-Hilton* による本来の高次 *Hopf* 不変量 H_m は *Whitehead* の *criterion* に従うもので、ホモトピー集合 $[\Sigma B,*;\prod^{m+1}X,\prod^{m+1}_m X]$（上記の場合 $m{=}1$ で $X{=}SA$）に値を持つ。 一方で H_1 は上の形でも高次不変量化（*§4.3*）され、これと *Berstein-Hilton* の本来の H_n が等価であることも示される（*I [27], Stanley [60]*）。

定理 2.7 (B-H [2]) 任意の写像 $f:S^q\to S^r$ に対して、接着空間 $Q=S^r\cup_f e^{q+1}$ の *L-S* の猫は「$\mathrm{cat}(Q)=1$ *iff* $H_1(f)=0$」かつ 「$\mathrm{cat}(Q)=2$ *iff* $H_1(f)\neq 0$」をみたす。

2.2 Compact Lie 群の L-S の猫の計算

Compact Lie 群などに対しては、以下の計算が現在までに5)なされている。

例 2.8 *(1)* $\mathrm{cat}(\mathrm{T}^r)=\mathrm{cat}(S^1{\times}S^1{\times}\cdots{\times}S^1)=r,\ r\geq 1.$
より一般に、$\mathrm{cat}(S^{n_1}{\times}S^{n_2}{\times}\cdots{\times}S^{n_r})=r,\ n_i\geq 1,\ (1{\leq}i{\leq}r)$ が成立する。

(2) (Singhof [57, 58]) $\mathrm{U}(n),\mathrm{SU}(n)$（$n{\geq}1$）に対して
$\mathrm{cup}(\mathrm{U}(n))=\mathrm{cat}(\mathrm{U}(n))\ (=n=\mathrm{cup}(\mathrm{U}(n);\mathbb{Z})),$
$\mathrm{cup}(\mathrm{SU}(n))=\mathrm{cat}(\mathrm{SU}(n))\ (=n{-}1=\mathrm{cup}(\mathrm{SU}(n);\mathbb{Z})).$

(3) (Mimura-I [29], Mimura-Nishimoto-I [30]) $\mathrm{Spin}(n)$（$3{\leq}n{\leq}8$）に対して
$\mathrm{cup}(\mathrm{Spin}(n))=\mathrm{cat}(\mathrm{Spin}(n))=\mathrm{Cat}(\mathrm{Spin}(n)).$

(4) (Schweitzer [56], Fernández Suárez-Gómez Tato-Tanré-Strom [10], Mimura-I [29])
$\mathrm{cup}(\mathrm{Sp}(n))=\mathrm{cat}(\mathrm{Sp}(n))=\mathrm{Cat}(\mathrm{Sp}(n))\ (=2n{-}1),\ n{\leq}3.$

(5) (Singhof [57], James [32], Mimura-Nishimoto-I [31]) $\mathrm{cat}(\mathrm{G}_2)=4,\ \mathrm{cat}(\mathrm{PSp}(2))$6) $=8.$

(6) (James-Singhof [34]) $\mathrm{SO}(n)$（$n{\leq}5$）に対しては $\mathrm{SO}(2){\approx}S^1,\mathrm{SO}(3){\approx}\mathbb{R}\mathrm{P}^3,\mathrm{SO}(4){\approx}\mathbb{R}\mathrm{P}^3{\times}S^3$ であり $\mathrm{cup}(\mathrm{SO}(5))=\mathrm{cat}(\mathrm{SO}(5))=\mathrm{Cat}(\mathrm{SO}(5))\ (=8=\mathrm{cup}(\mathrm{SO}(5);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})).$

(7) (Mimura-Nishimoto-I [31]) $\mathrm{PU}(n)$（$n{=}p^r$ ただし $r{\geq}1$ で p は素数）に対して
$\mathrm{wgt}(\mathrm{PU}(n))$7) $=\mathrm{cat}(\mathrm{PU}(n))=\mathrm{Cat}(\mathrm{PU}(n))\ (=3n{-}3).$

(8) (Mimura-Nishimoto-I [31]) $\mathrm{SO}(n)$（$6{\leq}n{\leq}9$）に対して
$\mathrm{cup}(\mathrm{SO}(n))=\mathrm{cat}(\mathrm{SO}(n))=\mathrm{Cat}(\mathrm{SO}(n))\ (=\mathrm{cup}(\mathrm{SO}(n);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})).$

(9) (Mimura-Nishimoto-I [31]) $\mathrm{PSO}(2n)$（$n{\leq}4$）に対しては $\mathrm{PSO}(2){\approx}S^1,\mathrm{PSO}(4){\approx}\mathbb{R}\mathrm{P}^3{\times}\mathbb{R}\mathrm{P}^3,$ $\mathrm{PSO}(6){=}\mathrm{PU}(4)$ であり $\mathrm{cup}(\mathrm{PSO}(8))=\mathrm{cat}(\mathrm{PSO}(8))=\mathrm{Cat}(\mathrm{PSO}(8))=\mathrm{cup}(\mathrm{PSO}(8);\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$

2.3 L-S の猫に関連した古典的な問題と最近の成果

L-S の猫の古典的な問題のいくつかは “Open Problems in Topology” [47] にリストされている。

問題 2.9 (Problem 643 of [47]) 閉多様体の *L-S* の猫の値は、*once-punctured* 部分多様体よりちょうど 1 大きいか？

次の問題の肯定的な解答は通常 Arnold の予想と呼ばれる。

問題 2.10 (Arnold (p.66 of [3])) *Symplectic* 多様体 M の *Symplecto-morphism* $\phi:M\to M$ の固定点の個数 $\mathrm{Fix}(\phi)$ は常に $\mathrm{Crit}(M)$ 以上あるか？

また次の問題の肯定的な解答は通常 Ganea の予想と呼ばれる。

問題 2.11 (Problem 2 of Ganea [16], Problem 642 of [47])　$\mathrm{cat}(X \times S^n) = \mathrm{cat}(X)+1$?
次の問題も Ganea の予想に深く関係する問題である。

問題 2.12 (Problem 4 of Ganea [16])　球面上の球面束の全空間の *L-S* の猫をバンドルの特性写像のホモトピー不変量を用いて記述せよ。

次に、よく知られた古典的な結果及びその改良形を挙げる。

定理 2.13 (Singhof [59], Rudyak [51])　閉多様体 M が次元 $\dim(M) = d$ と *L-S* の猫 $\mathrm{cat}(M) = m$ に関する不等式 $m \geq \dfrac{d+1}{2}$ をみたすならば、*Ganea* の予想は正しい。

定理 2.14 (Hofer [23], Floer [11])　*Symplectic* 多様体 M の *Symplecto-morphism* $\phi : M \to M$ は $\mathrm{Fix}(\phi) \geq \mathrm{cup}(M)+1$ をみたす。

定理 2.15 (Jessup [35], Hess [22])　有理ホモトピー論の範囲内で *Ganea* の予想は正しい。

そして'90 年代末以後、これらの問題に新たな展開があった。

定理 2.16 (Liu-Tian [41], Fukaya-Ono [13])　*Symplectic* 多様体 M の *Hamiltonian diffeomorphism* $\phi : M \to M$ の固定点が非退化ならば $\mathrm{Fix}(\phi) \geq \mathrm{Crit}(M)$ である。

定理 2.17 (I [25])　*Ganea* の予想をみたさない単連結な位相空間が存在する。

定理 2.18 (Rudyak [53], Oprea-Rudyak [49]) M を *Symplectic* 多様体とする。
M が条件 $\omega|_{\pi_2(M)} = 0$（$\pi_2(M) = 0$ ならよい）をみたせば、$\mathrm{cat}(M) = \mathrm{Crit}(M)-1 = \dim(M)$ が成立し、*Arnold* 予想は（この場合）正しい。

定理 2.19 (I [27])　*Ganea* の予想をみたさない単連結な閉多様体が存在する。

定理 2.20 (I [27, 28], Lambrechts-Stanley-Vandembroucq [43])　単連結な閉多様体で、*once-punctured* 部分多様体と同じ *L-S* の猫の値を持つものが存在する。

定理 2.21 (I [28])　球面上の球面バンドルの全空間の *L-S* の猫はバンドルの特性写像の *Hopf* 不変量で完全に記述され、*Ganea* の予想が成立する場合と成立しない場合が共に現れる。

定理 2.22 (Oprea-Rudyak [50])　3 次元閉多様体は *Ganea* の予想をみたす。

3　A_∞-構造と L-S の猫

もともと筆者は、Hopf 空間の高次結合性 — A_m-構造 — についての研究を行っていた。 あるとき、A_∞-構造に付随する射影空間上で Hopf 不変量を取り扱うことで、複雑な証明の必要な Sp(2) の L-S カテゴリーがあっさりと決定できることに気づいた。 そこで Ganea 予想にも A_∞-構造を使う方法は有効かも知れないと考え、1997 年に 3ヶ月ほど集中して A_∞-構造と L-S の猫の関連を考えたのであった。 射影空間上の高次の Hopf 不変量にさらに Homology 分解を組み合わせることで、高次 Hopf 不変量が L-S カテゴリーの決定に使える（§4.4）というのがそのときの発見である。

実は同じ頃に Rudyak が category weight を用いて Arnold 予想に取り組んでいた。 しかもそれは、§4.1 で述べるようにやはり A_∞-構造を用いた解釈が可能なものであった。

3.1　A_m-構造

定義 3.1 (Stasheff [61], 三村 [48]) 空間 X に対して、集まり $\{(E^k(X), B^k(X), p^k_X) \mid 0 \leq k \leq m\}$ が次の *(1)* 〜 *(3)* の 3 条件をみたすとき、これを X の A_m 構造と言い、また X を A_m 空間と言う。

(1) $B^1(X) = \{*\}$ かつ $E^1(X) = X$ であり、p^1_X は自明な写像である。

(2) $E^k(X)$ は $E^{k+1}(X)$ の 中で可縮（$k<m$）であり、従って $m{=}\infty$ のとき $E^\infty(X)=\bigcup E^k(X)$ はそれ自身可縮である。

(3) $p^k_X : E^k(X)\to B^k(X)$（$k\le m$）は X を *fibre* とする *quasi-fibration* である。

ただし $p : E\to B$ が $i : F\hookrightarrow E$ を *fibre* とする *quasi-fibration* とは、$p{\circ}i\sim *$ かつ誘導する準同型 $p_* : \pi_*(E,F)\to\pi_*(B)$ が同型であることである。

定理 3.2 (Stasheff [61]) 位相空間 X が A_∞-構造 $\{B^{k+1}(X)\,|\,k\ge 0\}$ を持つならば、X は *strict unit* を持つ A_∞-空間 $\tilde{X}$ にホモトピー同値であり、$\tilde{X}$ の標準的な A_m-構造 $\tilde{B}^{k+1}(\tilde{X})$ から $\tilde{X}\simeq X$ への写像は X の A_m-構造 $B^{k+1}(X)$ から X への写像を経由する。

系 3.3 位相空間 X に対して、*strict unit* を持つループ空間 $\tilde{\Omega}X$ の A_∞-構造 $\{B^{k+1}(\tilde{\Omega}X)\,|\,k\ge 0\}$ は $B^\infty(\tilde{\Omega}X)\simeq X$ をみたす。

例 3.4 *(1)* $\tilde{B}^{k+1}(S^0)=\mathbb{R}\mathrm{P}^k$、$\tilde{B}^{k+1}(S^1)=\mathbb{C}\mathrm{P}^k$、$\tilde{B}^{k+1}(S^3)=\mathbb{H}\mathrm{P}^k$（$0\le k\le\infty$）。

(2) $\tilde{B}^1(S^7)=*$、$\tilde{B}^2(S^7)=S^8$、$\tilde{B}^3(S^7)=\mathcal{O}P^2$ *(Cayley plane)*。

注 3.5 古典的な射影空間との類比から、$\tilde{B}^{k+1}(\tilde{\Omega}X)$ を簡単に $P^k(\Omega X)$ などと表すことがある。

3.2 射影空間と L-S の猫たち

射影空間の定義から明らかに次が成立する。

定理 3.6 $\mathrm{Cat}(P^m(\Omega X))\le m$ であり、従って $\mathrm{cat}(P^m(\Omega X))\le m$ である。

定理 3.7 (Cornea [4]) $\mathrm{cat}(X)=m$ のとき、$i\le m$ ならば $\mathrm{cat}(P^i(\Omega X))=i$ であり、$i\ge m$ ならば $\mathrm{cat}(P^i(\Omega X))=m$ である。

定理 3.8 (Ganea [14], Gilbert [17], I [25], Sakai [55]) 不等式 $\mathrm{cat}(X)\le m$ が成立するには $e^X_m : P^m(\Omega X)\hookrightarrow P^\infty(\Omega X){\simeq}X$ が右ホモトピー逆写像を持つことが必要十分である：

$$\mathrm{cat}(X)=\mathrm{Min}\{m\ge 0\,|\,\exists\sigma : X\to P^m(\Omega X)\;s.t.\,e^X_m{\circ}\sigma\sim 1_X\}.$$

定理 3.9 (I [25]) $\mathrm{cat}(X{\times}Y){=}\mathrm{cat}(X){+}\,\mathrm{cat}(Y)$ が成立するには、$\bigcup_{i+j<m+n}P^i(\Omega X){\times}P^j(\Omega Y)\hookrightarrow P^\infty(\Omega X){\times}P^\infty(\Omega Y)\simeq X{\times}Y$（$\mathrm{cat}(X){=}m,\ \mathrm{cat}(Y){=}n$ は共に 1 以上）が右ホモトピー逆写像を持たないことが必要かつ十分である。

略証。　まず $\bigcup_{i+j<m+n}P^i(\Omega X){\times}P^j(\Omega Y)\hookrightarrow P^\infty(\Omega X){\times}P^\infty(\Omega Y)\simeq X{\times}Y$ が右ホモトピー逆写像を持つとする：k についての帰納法で $\mathrm{Cat}(\bigcup_{i+j<k}P^i(\Omega X){\times}P^j(\Omega Y))<k$ が得られ、$X{\times}Y$ は仮定から $\bigcup_{i+j<m+n}P^i(\Omega X){\times}P^j(\Omega Y)$ に支配されるので $\mathrm{cat}(X{\times}Y)<\mathrm{cat}(X){+}\,\mathrm{cat}(Y)$ が分かる。

次に $\mathrm{cat}(X{\times}Y)<\mathrm{cat}(X){+}\,\mathrm{cat}(Y)$ とすると、定理 3.8 から $X{\times}Y$ は $P^{m+n-1}(\Omega(X{\times}Y))$ に支配される。 ここで、$\bigcup_{i+j\le k}P^i(\Omega X){\times}P^j(\Omega Y)$ は $P^\infty(\Omega X){\times}P^\infty(\Omega Y)\simeq X{\times}Y$ の標準的ではない A_∞-構造を与え、定理 3.2 から標準的な写像

$$e^{X\times Y}_k : P^k(\Omega(X{\times}Y))\hookrightarrow P^\infty(\Omega X){\times}P^\infty(\Omega Y)\simeq X{\times}Y$$

は包含写像 $\bigcup_{i+j\le k}P^i(\Omega X){\times}P^j(\Omega Y)\hookrightarrow P^\infty(\Omega X){\times}P^\infty(\Omega Y)$ を経由する。 従って $X{\times}Y$ は部分空間 $\bigcup_{i+j\le m+n-1}P^i(\Omega X){\times}P^j(\Omega Y)\subseteq P^\infty(\Omega X){\times}P^\infty(\Omega Y)$ にも支配される。　　終り。

系 3.10 (I [25]) $\mathrm{cat}(X{\times}S^n){=}\mathrm{cat}(X){+}1$ となるには包含写像 $P^m(\Omega X){\times}\{*\}{\cup}P^{m-1}(\Omega X){\times}S^n\hookrightarrow P^\infty(\Omega X){\times}S^n\simeq X{\times}S^n$（ただし $\mathrm{cat}(X)=m\ge 1$）が右ホモトピー逆写像を持たないことが必

要かつ十分である。

略証。 $P^m(\Omega X)\times\{*\}\cup P^{m-1}(\Omega X)\times P^1(\Omega S^n)\cup\cdots\cup\{*\}\times P^{m-1}(\Omega S^n)\subseteq P^m(\Omega X)\times\{*\}\cup P^{m-1}(\Omega X)\times P^\infty(\Omega S^n)\subset P^\infty(\Omega X)\times P^\infty(\Omega S^n)$ より、$\mathrm{cat}(X\times S^n)=\mathrm{cat}(X)$ ならば定理 3.9 から $P^m(\Omega X)\times\{*\}\cup P^{m-1}(\Omega X)\times P^\infty(\Omega S^n)\hookrightarrow P^\infty(\Omega X)\times P^\infty(\Omega S^n)\simeq X\times S^n$ が右ホモトピー逆写像を持ち、従って $P^m(\Omega X)\times\{*\}\cup P^{m-1}(\Omega X)\times S^n\hookrightarrow P^\infty(\Omega X)\times S^n\simeq X\times S^n$ が右ホモトピー逆写像を持つ。 逆は $\mathrm{Cat}(P^m(\Omega X)\times\{*\}\cup P^{m-1}(\Omega X)\times S^n)\le m$ より明らか。 終り。

4 二つのスタンス

L-S カテゴリー数の研究には、多様体などの良い状況の期待される環境で計算可能な不変量を用いるやり方があり、Rudyak の方法はまさにこれに沿ったものに見える。 しかし、Ganea 予想のような微妙な問題に証明を与えようとした場合には、必要十分条件を辿る道を見つけねばならない。

4.1 良い状況の下で計算可能な不変量を用いる

定義 4.1 *Toomer* 不変量とその改良版を導入する。

(1) h を乗法的なコホモロジー論とする。

(a) $\mathrm{wgt}(X;h)=\mathrm{Min}\left\{m\ge 0\,\middle|\, (e^X_m)_*:h^*(X)\to h^*(P^m(\Omega X))\text{ は単射}\right\}$

(b) $\mathrm{Mwgt}(X;h)=\mathrm{Min}\left\{m\ge 0\,\middle|\, \begin{array}{l}(e^X_m)_*:h^*(X)\to h^*(P^m(\Omega X))\text{ は }h^*h\text{-}modules\text{ の間}\\ \text{の }split\ mono\end{array}\right\}$

(c) $\mathrm{Awgt}(X;h)=\mathrm{Min}\left\{m\ge 0\,\middle|\, \begin{array}{l}(e^X_m)_*:h^*(X)\to h^*(P^m(\Omega X))\text{ は }h^*h\text{-}algebras\text{ の間}\\ \text{の }split\ mono\end{array}\right\}$

(2) *(a)* $\mathrm{wgt}(X)=\mathrm{Max}\,\{\mathrm{wgt}(X;h)\,|\,h\text{ は乗法的なコホモロジー論}\}$

(b) $\mathrm{Mwgt}(X)=\mathrm{Max}\,\{\mathrm{Mwgt}(X;h)\,|\,h\text{ は乗法的なコホモロジー論}\}$

(c) $\mathrm{Awgt}(X)=\mathrm{Max}\,\{\mathrm{Awgt}(X;h)\,|\,h\text{ は乗法的なコホモロジー論}\}$

(3) *(a)* $\mathrm{wgt}(X;p)=\mathrm{Max}\,\{\mathrm{wgt}(X;h)\,|\,h\text{ は乗法的な }p\text{-}local\text{ コホモロジー論}\}$

(b) $\mathrm{Mwgt}(X;p)=\mathrm{Max}\,\{\mathrm{Mwgt}(X;h)\,|\,h\text{ は乗法的な }p\text{-}local\text{ コホモロジー論}\}$

(c) $\mathrm{Awgt}(X;p)=\mathrm{Max}\,\{\mathrm{Awgt}(X;h)\,|\,h\text{ は乗法的な }p\text{-}local\text{ コホモロジー論}\}$

特に h が R 係数の常コホモロジーのとき、cup-length のときと同様に、$\mathrm{wgt}(X;h)$, $\mathrm{Mwgt}(X;h)$, $\mathrm{Awgt}(X;h)$ を各々$\mathrm{wgt}(X;R)$, $\mathrm{Mwgt}(X;R)$, $\mathrm{Awgt}(X;R)$ で表すことがある。

定理 4.2 $\mathrm{cup}(X;h)\le\mathrm{wgt}(X;h)\le\mathrm{Mwgt}(X;h)\le\mathrm{Awgt}(X;h)\le\mathrm{cat}(X)$ が成立する。

さて Rudyak と Strom は Fadell-Husseini [8] の与えた位相不変量 category weight をホモトピー不変量となるように再定義し、L-S の猫を近似計算する仕組みを与えた：

定義 4.3 (Rudyak [51, 52], Strom [63]) $u\in\tilde h^*(X)$ に対して

$$\mathrm{wgt}(u;h)=\mathrm{Min}\,\{m\ge 0\,|\,(e^X_m)_*(u)\ne 0\}\quad\text{と定義する（}h\text{ は乗法的コホモロジー論）。}$$

定理 4.4 (Rudyak [51, 52], Strom [63]) h を乗法的なコホモロジー論とする。

(1) $\mathrm{wgt}(u+v;h)\ge\mathrm{Min}\{\mathrm{wgt}(u;h),\mathrm{wgt}(v;h)\}$ が成立する。

(2) $\mathrm{wgt}(uv;h)\ge\mathrm{wgt}(u;h)+\mathrm{wgt}(v;h)$ が成立する。

(3) $\mathrm{wgt}(X;h)=\mathrm{Max}\{\mathrm{wgt}(u;h)\,|\,u\in\tilde h^*(X)\}$ が成立する。

定義 4.5 $\{(E_r^{**}(X;h), d_r) \,|\, r \geq 1\}$ を $X \simeq P^\infty(\Omega X)$ の *filtration* $\{P^m(\Omega X) \,|\, m \geq 0\}$ から定まり、$h^*(X)$ に収束する *Rothenberg-Steenrod* 型の *spectral sequence* とする。

定理 4.6 (Whitehead [70], Ginsburg [18], McCleary [46]) X を単連結とする。

(1) $h^*(\Omega X)$ が h^* 上 *free* ならば、$E_2^{**}(X;h) \cong \mathrm{Cotor}_{h^*(\Omega X)}^{*,*}(h^*, h^*)$

(2) $d_r : E_r^{s,t}(X;h) \to E_r^{s+r,t-r+1}(X;h)$ であり、$H(E_r^{*,*}(X;h), d_r) \cong E_{r+1}^{*,*}(X;h)$

(3) $E_\infty^{*,*}(X;h) \cong E_0 h^*(X)$, $\quad E_\infty^{s,t}(X;h) \cong F_s h^{s+t}(X)/F_{s+1}h^{s+t}(X)$
$$F_m h^n(X) = \mathrm{Ker}\left\{(e_m^X)_* : h^n(X) \to h^n(P^m(\Omega X))\right\}$$

(4) *(Whitehead)* $r > \mathrm{cat}(X)$ ならば $E_r^{s,t}(X;h) \cong E_\infty^{s,t}(X;h)$ である。

(5) *(Ginsburg)* $s > \mathrm{cat}(X)$ ならば $E_\infty^{s,t}(X;h) = 0$ である。

注 4.7 任意の $[u]\ (\neq 0) \in E_\infty^{s,*}(X;h)$, $(u \in \tilde{h}^*(X))$ に対して $\mathrm{wgt}(u;h) = s$ である。

例 4.8 *(1)* $\mathrm{wgt}(L^n(p)) = \mathrm{cat}(L^n(p)) = \dim(L^n(p)) = n$（$p > 1$ は任意）である。

(2) *Symplectic* 多様体 M^{2n} が $\pi_2(M)=0$ をみたせば $\mathrm{wgt}(M) = \mathrm{cat}(M) = 2n$ である。

(3) $\mathrm{wgt}(\mathrm{Sp}(2);\mathbb{Z}/2) = 2 < 3 = \mathrm{Mwgt}(\mathrm{Sp}(2);\mathbb{Z}/2) = \mathrm{cat}(\mathrm{Sp}(2))$ である。

4.2 新しい「安定」な猫たち

最近になって、$\mathrm{cup}(-)$ とは異なる形で安定化された L-S の猫たちが導入された：

定義 4.9 (Rudyak [52]) $r\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\{m{\geq}0 \,|\, \exists(\mathit{stably})\ \sigma : X {\to} P^m(\Omega X)\ \mathit{s.t.}\ e_m^X{\circ}\sigma \sim 1_X\}$.

定義 4.10 (Vandembroucq [68])

$$\mathrm{Qcat}(X) = \mathrm{Min}\{m{\geq}0 \,|\, \exists\sigma : X {\to} (QP)^m(\Omega X)\ \mathit{s.t.}\ (Qe)_m^X{\circ}\sigma \sim 1_X\}$$

ただし、*fibration* $E^{m+1}(\Omega X) \longrightarrow P^m(\Omega X) \xrightarrow{e_m^X} X$ を安定化関手 Q を用いて *fibrewise* に安定化したものが $Q(E^{m+1}(\Omega X)) \longrightarrow (QP)^m(\Omega X) \xrightarrow{(Qe)_m^X} X$ である。

定理 4.11 (Rudyak [52, 53], Vandembroucq [68])

(1) $r\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{cat}(X)$, $\quad r\mathrm{cat}(X{\times}S^n) = r\mathrm{cat}(X) + 1$, $n \geq 1$.

(2) $\mathrm{Qcat}(X) \leq \mathrm{cat}(X)$, $\quad \mathrm{Qcat}(X{\times}S^n) = \mathrm{Qcat}(X) + 1$, $n \geq 1$.

(3) 有理化された空間 X_0 に対しては $\mathrm{wgt}(X_0) = r\mathrm{cat}(X_0) \leq \mathrm{Qcat}(X_0) = \mathrm{cat}(X_0)$ である。

これらの安定化された猫たちと代数的な Toomer 型不変量の関係が次のように与えられる：

定理 4.12 $\mathrm{cup}(X) \leq \mathrm{wgt}(X) = \mathrm{Mwgt}(X) = r\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{Awgt}(X) \leq \mathrm{cat}(X)$.

一般に $\mathrm{cat}(X)$ に対しては、$\mathrm{cup}(X;h)$ より $\mathrm{wgt}(X;h)$、$\mathrm{wgt}(X;h)$ より $\mathrm{Mwgt}(X;h)$、$\mathrm{Mwgt}(X;h)$ より $\mathrm{Awgt}(X;h)$ の方が良い近似を与える（はずである）。

4.3 高次の Hopf 不変量と L-S の猫

こうした代数的不変量は、安定ホモトピー論を経由するものであり、Ganea 予想のような本質的に非安定な場面では十分に機能しない。 その為に、高次の（非）安定 Hopf 不変量を用意する：Berstein-Hilton [2] は R 係数のホモトピー群の元に対して高次の Hopf 不変量

$$H_m^s : \pi_n(X;R) \to \pi_{n+1}(\textstyle\prod^m X, \prod_{m-1}^m X; R), \quad n{\geq}2,\ m{\geq}1$$

を与え、基点以外に二胞体を持つ複体の L-S の猫の値が $H_1 = H_1^s$ によって決定されることを示した。 この高次 Hopf 不変量は ΩX の A_∞ 構造を用いて集合に値を持つ不変量として再定義される：

定義 4.13 (I [27], Stanley [60]) $\sigma : X \to P^m(\Omega X)$ を定理 *3.8* で定まる $\mathrm{cat}(X) \le m$ の構造を与える写像とする。 任意の $f : \Sigma V \to X$ に対して図 2 を考える：($e^X_m{\circ}\Sigma\,\mathrm{ad}(f) = \mathrm{ev}{\circ}\Sigma\,\mathrm{ad}(f) = f = 1_X{\circ}f = e^X_m{\circ}\sigma{\circ}f$ より、点線と中央の平行四辺形を除いてホモトピー可換)

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma V \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\Sigma\,\mathrm{ad}(f)"] \arrow[dddrrr, "f"] \arrow[dddl, dotted, "H^\sigma_m(f)"'] \arrow[dddr, dotted] & & & \\
 & X \arrow[ddr, "\sigma"'] & & & \\
 & & \Sigma\Omega X \arrow[d, hook] \arrow[drr, "\mathrm{ev}"] & & \\
\tilde{E}^{m+1}(\Omega X) \arrow[rr, "p^{\Omega X}_{m+1}"'] & & P^m(\Omega X) \arrow[rr, "e^X_m"'] & & X.
\end{tikzcd}$$

図 2

そこで $\sigma{\circ}f$ と $\Sigma\,\mathrm{ad}(f)$ の差 $d^\sigma_m(f) = \sigma{\circ}f - \Sigma\,\mathrm{ad}(f)$ の持ち上げ $(p^{\Omega X}_{m+1}{\circ}H^\sigma_m(f) = d^\sigma_m(f))$ を $H^\sigma_m(f) \in [\Sigma V, \tilde{E}^{m+1}(\Omega X)] \cong [\Sigma V, \Sigma^m(\bigwedge^{m+1}\Omega X)]$ とし、$\mathcal{H}^\sigma_m(f)=\Sigma^\infty H^\sigma_m(f) \in \{\Sigma^{1-m}V, \bigwedge^{m+1}\Omega X\}$ とする。

定理 4.14 (I [27]) V が *co-Hopf* 空間ならば任意の σ に対して H^σ_m は準同型である。

略証。 $f, g : \Sigma V \to X$ に対してその adjoints を $\mathrm{ad}(f), \mathrm{ad}(g) : V \to \Omega X$ とする：

$$\Sigma\,\mathrm{ad}(f) : \Sigma V \to \Sigma\Omega X, \quad \Sigma\,\mathrm{ad}(g) : \Sigma V \to \Sigma\Omega X, \quad \Sigma\,\mathrm{ad}(f{+_S}g) : \Sigma V \to \Sigma\Omega X.$$

ここで $+_S$ は suspension 構造から定まるホモトピー集合の積を表す。 一方で ΣV と V は、V の co-Hopf 構造に由来する co-Hopf 構造を持ち、これらから定まるホモトピー集合の積を $+_V$ で表せば $\mathrm{ad}(f{+_S}g) \sim \mathrm{ad}(f{+_V}g) \sim \mathrm{ad}(f){+_V}\,\mathrm{ad}(g)$ を得る。 これらの懸垂をとれば次を得る：

$$\Sigma\,\mathrm{ad}(f{+_S}g) \sim \Sigma(\mathrm{ad}(f){+_V}\,\mathrm{ad}(g)) \sim \Sigma\,\mathrm{ad}(f){+_V}\Sigma\,\mathrm{ad}(g)) \sim \Sigma\,\mathrm{ad}(f){+_S}\Sigma\,\mathrm{ad}(g).$$

従って、定義から $H^\sigma_m(f+g) \sim H^\sigma_m(f) + H^\sigma_m(g)$ が成立する。 終り。

命題 4.15 (I [27]) 任意の σ に対して $H^\sigma_m(f{\circ}(\Sigma g)) = H^\sigma_m(f){\circ}(\Sigma g)$ が成立する。

例えば strict unit を持つ A_m 空間 G に対し $X = P^m(G)$ とおけば、標準的な構造写像 $\sigma : P^m(G) \to P^m(\Omega P^m(G))$ に対して $H^\sigma_m : [\Sigma V, P^m(G)] \to [\Sigma V, \tilde{E}^{m+1}(\Omega P^m(G))]$（ここで $\tilde{E}^{m+1}(\Omega P^m(G))$ は $\Omega P^m(G)$ を $m{+}1$ 個 join したもの）が定まる。 通常の Hopf 不変量が Hopf 構造を detect するのと同様に、この高次 Hopf 不変量も A_∞-構造を detect する。

定理 4.16 (I [27]) 球面 S^{n-1} *(*$n = 1, 2, 4, 8$*)* はノルムを保つ（非結合的な）積を持つ $\mathbb{R}$ 代数の単元の全体としての積構造を持つ。 このとき高次 *Hopf* 不変量 $H_m : \pi_{n(m+1)-1}(P^m(S^{n-1})) \to \mathbb{Z}$ が 1 を与える元の存在が S^{n-1} の A_{m+1} 構造の存在と同値である（$n = 8$ かつ $m \ge 2$ を除き存在）。

定義 4.17 (I [27]) 位相空間 X は $\mathrm{cat}(X) = m$ とする。 高次の（非）安定 *Hopf* 不変量は

$$\begin{cases} H_m(\alpha) = \{H^\sigma_m(\alpha) \,|\, \sigma \textit{ is a structure of } \mathrm{cat}(X) = m\} \subseteq [\Sigma V, \tilde{E}^{m+1}(\Omega X)], \\ \mathcal{H}_m(\alpha) = \{\mathcal{H}^\sigma_m(\alpha) \,|\, \sigma \textit{ is a structure of } \mathrm{cat}(X) = m\} \subseteq \{\Sigma V, \tilde{E}^{m+1}(\Omega X)\}. \end{cases}$$

という集合として各々定義される。

命題 4.18 (I [27]) $d\cdot\mathrm{cat}(X)+d-2 \geq \dim(X)$（$X$ は $d-1$ 連結）ならば σ は一意的である。

例 4.19 $X = S^n, \mathbb{C}\mathrm{P}^n, \mathbb{H}\mathrm{P}^n$（各々$n \geq 1$）は上の条件をみたす。従ってこの場合には、高次 *Hopf* 不変量をその *unique element* と同一視することがある。

4.4 微妙な状況の下で必要十分条件を用いる

必要十分性をできるだけ一般的な枠組みで確保する為に、Homology 分解を導入する。

定義 4.20 (Homology 分解) 単連結な位相空間 X の *Cone* 分解 $\{S_i(X) \xrightarrow{f_i} X_i \hookrightarrow X_{i+1}\}$ は、すべての i について $S_i(X)$ が $(H_i(X), i-1)$ 型の *Moore* 空間であるとき、*Homology* 分解と呼ばれる。

ここで単連結な位相空間 X の Homology 分解を一つ固定し、$\{S_i(X) \xrightarrow{f_i} X_i \hookrightarrow X_{i+1}\}$ とする。

命題 4.21 すべての i について $\mathrm{cat}(X_i) \leq \mathrm{cat}(X_{i+1})$ が成立する。

以下の三つの結果は、この Homology 分解を用いつつ、緩い条件の下で高次 Hopf 不変量が L-S の猫の増加を完全にコントロールすること、及び、適当な条件の下で高次 Hopf 不変量の懸垂が Ganea 予想の成否を決定することを意味する：

定理 4.22 (I [27]) $\mathrm{cat}(X_i) = m,\ i \geq 1$ とする。

(1) 「$H_m(f_i) \ni 0 \implies \mathrm{cat}(X_{i+1}) = \mathrm{cat}(X_i)$」が成立する。

(2) $\mathrm{cat}(X_{i+1}) = m+1$ のとき「$\Sigma^n_* H_m(f_i) \ni 0 \implies \mathrm{cat}(X_{i+1}\times S^n) = \mathrm{cat}(X_{i+1})$」が成立する。

定理 4.23 (I [27]) $\mathrm{cat}(X_i) = m,\ i \geq 1$ とする。 $\mathrm{Ext}(H_{i+1}(X), H_2(X)\otimes H_{i+1}(X)) = 0$ または $m \geq 2$ のとき「$\mathrm{cat}(X_{i+1}) = \mathrm{cat}(X_i) \implies H_m(f_i) \ni 0$」が成立する。

定理 4.24 (I [27]) X は $d-1$ 連結かつ $\mathrm{cat}(X_i) = m,\ i \geq 1$ とする。 $\mathrm{cat}(X_{i+1}) = m+1$ かつ $\dim X_i \leq d(m+1) - 2$ のとき「$\mathrm{cat}(X_{i+1}\times S^n) = \mathrm{cat}(X_{i+1}) \implies \Sigma^n_* H_m(f_i) \ni 0$」が成立する。

当初筆者は、定理 4.24 の結論部分において Σ^n_* が必要であることに気づかず、定理 4.24 によって Ganea 予想が肯定的に解決したと思ったのであるが、その誤りに気づき正しい statement を得ると、Ganea 予想が成立し得ないことが逆に確信された。 すなわち、自明でない Hopf 不変量でその iterated suspension が自明となるような写像を探し出せば上記の定理から反例が構成されてしまう。 そしてそれ自体は難しいことではない：

定理 4.25 (I [25]) 位相空間の族 $\{Q_\ell\,;\, \ell{\geq}2 \text{ は素数}\}$ で次をみたすものが存在する：

$$\begin{cases} \mathrm{cat}(Q_2\times S^n) = \mathrm{cat}(Q_2) & \textit{for all } n \geq 1, \\ \mathrm{cat}(Q_\ell\times S^n) = \mathrm{cat}(Q_\ell) & \textit{for all } n \geq 2 \textit{ and } \ell > 2. \end{cases}$$

$\ell = 2$ の場合の略証。　$\sigma \in \pi_{15}(S^8)$ を Hopf 不変量 1 を与える元とすると、$H_1(\sigma) = 1 \in \pi_{15}(\Omega S^8{*}\Omega S^8) \cong \mathbb{Z}$ である。 特に $[\iota_{15}, \iota_{15}] \in \pi_{29}(S^{15})$ は懸垂準同型 $E : \pi_{28}(S^{14}) \to \pi_{29}(S^{15})$ の像に含まれる自明でない元である　(Toda [66])。 問題 4.15 に挙げた事実から $H_1(\sigma\circ[\iota_{15}, \iota_{15}]) = i_*[\iota_{15}, \iota_{15}]$（$i : S^{15} \hookrightarrow \Omega S^8{*}\Omega S^8$ は bottom cell の包含写像）となり、$\Omega S^8{*}\Omega S^8$ は無限個の球面の一点和にホモトピー同値であるから i_* は split mono である。 従って $H_1(\sigma\circ[\iota_{15}, \iota_{15}]) \neq 0$ であり、Berstein-Hilton の定理から $Q_2 = S^8 \cup_{\sigma\circ[\iota_{15},\iota_{15}]} e^{30}$ は $\mathrm{cat}(Q_2) = 2$ をみたす。

一方で Whitehead 積の懸垂は必ず 0 になることから、$\Sigma([\iota_{15}, \iota_{15}]) = 0$ である。 また $Q_2{\times}S^n = Q_2{\times}\{*\} \cup S^8{\times}S^n \cup_{\psi_n} e^{n+30}$ という cell 分割を考えると $\mathrm{cat}(Q_2{\times}\{*\} \cup S^8{\times}S^n) = 2$ であり、ψ_n は $\sigma\circ[\iota_{15}, \iota_{15}]$ と $\iota_n \in \pi_n(S^n)$ の相対 Whitehead 積で与えられる。 従って $\mathrm{cat}(Q_2{\times}S^n) = 3$ となるには、$H_2(\psi_n)$ が 0 を含んではならない。 しかし $H_2(\psi_n) \ni S^{n-1}{*}H_1(\sigma\circ[\iota_{15}, \iota_{15}]) = \pm\Sigma^n[\iota_{15}, \iota_{15}] = 0$（$n \geq 1$）となるので、$\mathrm{cat}(Q_2{\times}S^n) = \mathrm{cat}(Q_2) = 2$（$n \geq 1$）が成立する。 終り。

しかし、もちろん L-S カテゴリーはもともと多様体の上で与えられたものであり、多様体に限定したところで成立するという可能性が残されていた。 これについて調べる為に、Ganea の Problem 4 すなわち球面上の球面束を考えてみると、どうしても 2 次及び 3 次の高次 Hopf 不変量の計算が必要となり、それは Toda bracket の計算と密接な関係にあることが分かる：

$\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ は S^4 上の S^2 束の構造を持つことに注意して、うまく自明でない写像 $\beta : S^q \to S^3$ を選び、$\Sigma\beta : S^{q+1} \to S^4$ を smooth map で近似する。 $E(\beta)$ を $\Sigma\beta$ による $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ の引き戻しとして定義すれば、$E(\beta) = S^2 \cup_{\eta\circ\beta} e^{q+1} \cup_{\psi(\beta)} e^{q+3}$ となる。 これに対して H_3 の計算を自明でない Toda bracket（cf. [66]）を用いて実行することで次の二つの定理を得る。

定理 4.26 (I [27, 28], L-S-V [43]) 単連結な閉多様体 N で次をみたすものが存在する：

$$\mathrm{cat}(N \smallsetminus \{*\}) = \mathrm{cat}(N).$$

定理 4.27 (I [27, 28]) 単連結な閉多様体 M で次の条件をみたすものが存在する：

$$\mathrm{cat}(M{\times}S^n) = \mathrm{cat}(M) \quad \textit{for all } n \geq 2.$$

従って、[47] に挙げられた Problems 642 と 643 は閉多様体に限定しても共に否定的に解決されたことになる。 しかし、これらすべての計算例は次の予想を支持している。

問題 4.28 (I [25]) $n(X) = \mathrm{Max}\{n \mid \mathrm{cat}(X{\times}S^n){=}\mathrm{cat}(X){+}1 \textit{ or } n{=}0\}$ は次をみたすか？

$$\mathrm{cat}(X{\times}S^n) = \begin{cases} \mathrm{cat}(X){+}1 & \textit{for all } n \leq n(X), \\ \mathrm{cat}(X) & \textit{for all } n > n(X). \end{cases}$$

5 付録

5.1 多様体の L-S の猫

(1) $\mathrm{cat}(\mathbb{F}P^n) = n,\ n{\geq}0$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ or $\mathbb{H}$). (2) $\mathrm{cat}(\mathcal{O}P^n) = n,\ 0{\leq}n{\leq}2$.

(3) $\mathrm{cat}(M^2) = \begin{cases} 1,\ \pi_1(M^2) = 0, \\ 2,\ \pi_1(M^2) \neq 0. \end{cases}$ (4) $\mathrm{cat}(M^3) = \begin{cases} 1,\ \pi_1(M^3) = 0, \\ 2,\ \pi_1(M^3) = \text{a non-trivial free group}, \\ 3,\ \text{otherwise}. \end{cases}$

(5) $\mathrm{cat}(S^n) = 1,\ n{\geq}1$. (6) (Krasnosel′skiĭ[40], GG [19]) $\mathrm{cat}(L^n(p)) = n,\ n{\geq}1, p{>}1$.

(7) (Rudyak [51, 52]) Symplectic 多様体 (M^{2n}, ω) が $\omega|_{\pi_2(M)}{=}0$ をみたせば $\mathrm{cat}(M^{2n}) = 2n$.

(8) (Singhof [59], GG [19], I [28]) S^{t+1} 上の S^r 束 E と $Q = E{\smallsetminus}\{pt\} \simeq S^r{\cup_\alpha}e^{t+1}$ の L-S の猫

r	t	α	cat$(Q\times S^n)$	cat(Q)	cat(E)	cat$(E\times S^n)$
r=1	t=0		2	1	2	3
	t=1	$\alpha=\pm 1$	1	0	1	2
		α=0	2	1	2	3
		$\alpha\neq 0, \pm 1$	3	2	3	4
	t>1		2	1	2	3
r>1	$t<r$		2	1	2	3
	$t=r$	$\alpha=\pm 1$	1	0	1	2
		$\alpha\neq\pm 1$	2	1	2	3
	$t>r$	$H_1(\alpha)=0$	2	1	2	3
		$H_1(\alpha)\neq 0$ & $\Sigma^r H_1(\alpha)=0$	3 or 2	2	2	3
		$\Sigma^r H_1(\alpha)\neq 0$			3	3 or 4

(9) (Singhof [57, 58], JS [34], FGST [10], IM [29], IMN [30, 31]) compact 単純 Lie 群の L-S の猫

階数	1		2		3		4		$5\leq n$	
A_n	SU(2)	1	SU(3)	2	SU(4)	3	SU(5)	4	SU(n+1)	n
	PU(2)	3	PU(3)	6	PU(4)	9	PU(5)	12	PU(n+1)	$\leq 3n$
B_n	Spin(3)	1	Spin(5)	3	Spin(7)	5	Spin(9)	?	Spin(2n+1)	?
	SO(3)	3	SO(5)	8	SO(7)	11	SO(9)	20	SO(2n+1)	?
C_n	Sp(1)	1	Sp(2)	3	Sp(3)	5	Sp(4)	?	Sp(n)	?
	PSp(1)	3	PSp(2)	8	PSp(3)	?	PSp(4)	?	PSp(n)	?
D_n					Spin(6)	3	Spin(8)	6	Spin(2n)	?
					SO(6)	9	SO(8)	12	SO(2n)	?
					PSO(6)	9	PSO(8)	18	PSO(2n)	?
例外			$\mathrm{G_2}$	4			$\mathrm{F_4}$	?	$\mathrm{E_n}$	?

(10) (Singhof [57, 58]) 複素 Stiefel 多様体 $W_{n,r} = \mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n-r)$ は $\mathrm{cat}(W_{n,r}) = r$ をみたす。

また、PU(n+1) についての結果は最近の次の結果を用いて得られたものである。

(11) (Kadzisa [36, 37]) $\mathrm{Cat}(\mathrm{U}(n)) = n$ $(= \mathrm{cat}(\mathrm{U}(n)) = \mathrm{cup}(\mathrm{U}(n)))$,

$\mathrm{Cat}(\mathrm{SU}(n)) = n-1$ $(= \mathrm{cat}(\mathrm{SU}(n)) = \mathrm{cup}(\mathrm{SU}(n)))$.

6 謝辞

最後に、本稿の全般にわたり査読者の方々に貴重なご意見を賜りましたことを感謝いたします。

注　釈

1) ホモトピー論では通常 e は Adams e-不変量として、c は Chern 類／数として用いられる。

2) ここでは wgt は Toomer 不変量／カテゴリー weight として、cup は cup-length として用いる。

3) 定義 1.3 の直後に述べる理由で、「閉集合」を「NDR 閉集合」と変更しても多様体などの場合では値は変わらない。

4) Ganea による本来の証明は先に定理 2.3 を証明して、その系として定理 2.2 を得るものである。

5) 付録の表を参照されたい。

6) この結果は [32] に見つかるが、証明は [31] を参照されたい。

7) wgt(−) については §4.1 を参照されたい。

文　献

[1] I. Berstein and T. Ganea, *The category of a map and of a cohomology class*, Fund. Math. **50** (1961/62), 265–279.

[2] I. Berstein and P. J. Hilton, *Category and generalized Hopf invariants*, Illinois. J. Math. **4** (1960), 437–451.

[3] F. E. Browder, *Problems of present day mathematics*, in "Mathematical developments arising from Hilbert problems" (De Kalb, IL, 1974), 35–79, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1976.

[4] O. Cornea, *Cone-length and Lusternik-Schnirelmann category*, Topology **33** (1994), 95–111.

[5] O. Cornea, *Strong LS category equals cone-length*, Topology **34** (1995), 377–381.

[6] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea and D. Tanré, "Lusternik-Schnirelmann category", Mathematical Surveys and Monographs **103**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[7] S. Eilenberg and T. Ganea, *On the Lusternik-Schnirelmann category of abstract groups*, Ann. of Math. (2), **65** (1957), 517–518.

[8] E. Fadell and S. Husseini, *Category weight and Steenrod operations* (Spanish), Bol. Soc. Mat. Mexicana (2), **37** (1992), 151–161.

[9] Y. Felix, S. Halperin and J.-C. Thomas, "Rational Homotopy Theory", Springer Verlag, Berlin, 2001, Graduate Texts in Math. **205**.

[10] L. Fernández-Suárez, A. Gómez-Tato, J. Strom and D. Tanré, *The Lusternik-Schnirelmann category of* Sp(3), Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

[11] A. Floer, *Cuplength estimates on Lagrangian intersections*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 335–356.

[12] R. H. Fox, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, Ann. of Math. (2) **42**, (1941), 333–370.

[13] K. Fukaya and K. Ono, *Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant*, Topology **38** (1999), 933–1048.

[14] T. Ganea, *Lusternik-Schnirelmann category and strong category*, Illinois. J. Math. **11** (1967), 417–427.

[15] T. Ganea, *Cogroups and suspensions*, Invent. Math. **9** (1970), 185–197.

[16] T. Ganea, *Some problems on numerical homotopy invariants*, In: "Symposium on Algebraic Topology", 23–30, Lecture Notes in Math. **249**, Springer Verlag, Berlin, 1971.

[17] W.J. Gilbert, *Some examples for weak category and conilpotency*, Illinois J. Math. **12** (1968), 421-432.

[18] M. Ginsburg, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, Ann. of Math. (2), **77** (1963), 538–551.

[19] J. C. Gómez-Larrañaga and F. González-Acuña, *Lusternik-Schnirelmann category of 3-manifolds*, Topology **31** (1992), 791–800.

[20] K. A. Hardie, *A note on fibrations and category*, Michigan Math. J. **17**, (1970), 351–352.

[21] H. W. Henn, *On almost rational co-H-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **87**, (1983), 164–168.

[22] K. Hess, *A proof of Ganea's Conjecture for Rational Spaces*, Topology **30** (1991), 205–214.

[23] H. Hofer, *Lusternik-Schnirelman-theory for Lagrangian intersections*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **5** (1988), 465–499.

[24] J. R. Hubbuck and N. Iwase, *A p-complete version of the Ganea conjecture on co-H-spaces*, In: "Lusternik-Schnirelmann category and related topics" (South Hadley, MA, 2001), 127–133, Contemp. Math. **316**, 2003.

[25] N. Iwase, *Ganea's conjecture on Lusternik-Schnirelmann category*, Bull. London Math. Soc. **30** (1998), 623–634.

[26] N. Iwase, *Co-H-spaces and the Ganea conjecture*, Topology **40** (2001), 223–234.

[27] N. Iwase, *A_∞-method in Lusternik-Schnirelmann category*, Topology **41** (2002), 695–723.

[28] N. Iwase, *Lusternik-Schnirelmann category of a sphere-bundle over a sphere*, Topology **42** (2003), 701–713.

[29] N. Iwase and M. Mimura, *L-S categories of simply-connected compact simple Lie groups of low rank*, In: "Algebraic Topology: Categorical Decomposition Techniques", (Isle of Skye, 2001), 199–212, *Progr. Math.*, 215, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.

[30] N. Iwase, M. Mimura and T. Nishimoto, *On the cellular decomposition and the Lusternik-Schnirelmann category of Spin*(7), Topology Appl. **133** (2003), 1–14.

[31] N. Iwase, M. Mimura and T. Nishimoto, *L-S categories of non-simply-connected compact simple Lie groups*, preprint, 2003.

[32] I. M. James, *On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann*, Topology **17** (1978), 331-348.

[33] I. M. James, *Lusternik-Schnirelmann Category*, In: "Handbook of algebraic topology", 1293-1310, North Holland, Amsterdam, 1995.

[34] I. James and W. Singhof, *On the category of fiber bundles, Lie groups, and Frobenius maps*, In: "Higher homotopy structures in topology and mathematical physics" (Poughkeepsie, NY, 1996), 177–189, Contemp. Math. **227**, 1999.

[35] B. Jessup, *Rational L-S category and a conjecture of Ganea*, Trans. Amer. Math. Soc. **317** (1990), 655–660.

[36] H. Kadzisa, Cone-decompositions of the unitary groups, preprint, 2003.

[37] H. Kadzisa, Cone-decompositions of the special unitary groups, preprint, 2003.

[38] K. Komatsu, *On links whose complements have the Lusternik-Schnirelmann category one*, Hiroshima Math. J. **24** (1994), 473–483.

[39] K. Komatsu and T. Matumoto, *Knot-link theory and Lusternik-Schnirelmann category*, In: "Algebra and topology 1992" (Taejŏn), 211–216, Korea Adv. Inst. Sci. Tech., Taejŏn, 1992.

[40] M. A. Krasnosel′skiĭ, *On special coverings of a finite-dimensional sphere* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 103 (1955), 961–964.

[41] G. Liu and G. Tian, *Floer homology and Arnold conjecture*, J. Differential Geom. **49** (1998), 1–74.

[42] L. Lusternik and L. Schnirelmann, "Méthodes Topologiques dans les Problèmes Variationnels", Hermann, Paris, 1934.

[43] P. Lambrechts, D. Stanley and L. Vandembroucq, *Embedding up to homotopy of two-cones into Euclidean space*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 3973–4013.

[44] T. Matumoto, *Lusternik-Schnirelmann category and knot complement*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **37** (1990), 103–107.

[45] T. Matumoto, *Lusternik-Schnirelmann category and knot complement II*, Topology **34** (1995), 177–184.

[46] J. McCleary, "A User's Guide to Spectral Sequences", Math. Lec. Ser. 12, Publish or Perish Inc., Wilmington Delaware (1985).

[47] J. van Mill and G. M. Reed, "Open problems in topology", edited by J. van Mill and G.M. Reed, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.

[48] 三村護, "ホップ空間", 紀伊国屋書店, 1986.

[49] J. Oprea and Y. Rudyak, *On the Lusternik-Schnirelmann category of symplectic manifolds and the Arnold conjecture*, Math. Z. **230** (1999), 673–678.

[50] J. Oprea and Y. Rudyak, *Detecting elements and Lusternik-Schnirelmann category of* 3-*manifolds*, In: "Lusternik-Schnirelmann category and related topics" (South Hadley, MA, 2001), 181–191, Contemp. Math. **316**, 2003.

[51] Y. B. Rudyak, *On the Ganea conjecture for manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2511–2512.

[52] Y. B. Rudyak, *On category weight and its applications*, Topology **38** (1999), 37–55.

[53] Y. Rudyak, *On analytical applications of stable homotopy (the Arnold conjecture, critical points)*, Math. Z. **230** (1999), 659–672.

[54] S. Saito, *Notes on Co-H-spaces*, J. Fac. Sci. Shinshu U. **6** (1971), 101–106.

[55] M. Sakai, *A proof of the homotopy push-out and pull-back lemma*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 2461–2466.

[56] P. A. Schweitzer, *Secondary cohomology operations induced by the diagonal mapping*, Topology **3** (1965), 337–355.

[57] W. Singhof, *On the Lusternik-Schnirelmann category of Lie groups*, Math. Z. **145** (1975), 111–116.

[58] W. Singhof, *On the Lusternik-Schnirelmann category of Lie groups II*, Math. Z. **151** (1976), 143–148.

[59] W. Singhof, *Minimal coverings of manifolds with balls*, Manuscripta Math. **29** (1979), 385–415.

[60] D. Stanley, *Spaces with Lusternik-Schnirelmann category n and cone length $n+1$*, Topology **39** (2000), 985–1019.

[61] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces, I & II*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 275–292; 293–312.

[62] J. Strom, *Two special cases of Ganea's conjecture*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 679–688.

[63] J. Strom, *Essential category weight and phantom maps*, In: "Cohomological methods in homotopy theory" (Bellaterra, 1998), 409–415, Progr. Math., 196, Birkhäuser, Basel, 2001.

[64] F. Takens, *The minimal number of critical points of a function on a compact manifold and the Lusternik-Schnirelman category*, Invent. Math. **6** (1968), 197–244.

[65] F. Takens, *The Lusternik-Schnirelman categories of a product space*, Compositio Math. **22** (1970), 175–180.

[66] H. Toda, "Composition methods in homotopy groups of spheres", Princeton U. Press, Princeton N.J., Ann. of math. studies **49**, 1962.

[67] G. Toomer, *Lusternik-Schnirelmann category and the Moore spectral sequence*, Math. Z. **138** (1974), 123–143.

[68] L. Vandembroucq, *Fibrewise suspension and Lusternik-Schnirelmann category*, Topology **41** (2002), 1239–1258.

[69] K. Varadarajan, *On fibrations and category*, Math. Z. **88** (1965), 267–273.

[70] G. W. Whitehead, *The homology suspension*, In: "Colloque de topologie algébrique, Louvain, 1956", Georges Thone, Liége; 89–95, Masson & Cie, Paris, 1957.

[71] G. W. Whitehead, "Elements of Homotopy Theory", Springer Verlag, Berlin, 1978, Graduate Texts in Mathematics **61**.

(2003 年 11 月 6 日提出)
(いわせ　のりお・九州大学大学院数理学研究院)