

粘土はいくつ？

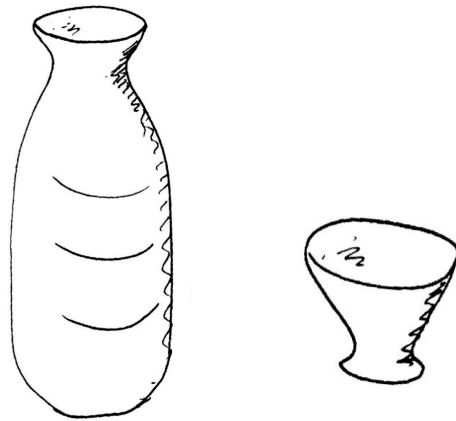
岩瀬 則夫

1 はじめに

焼き物の制作に使われる粘土は、こねて固められた塊から



各々があるいは延ばされ、あるいはすぼめられて



制作者の思い通りの形に仕上げられます。

しかし取手をつけるにはどうすれば良いので
しょう？

例えば次のような図形に仕上げるには



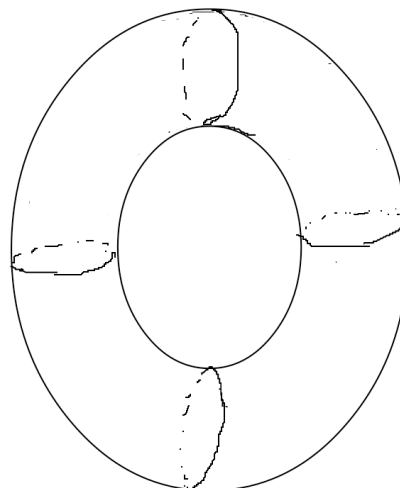
別の粘土の塊を「くっつける」といった操作を行わねばなりません。

それでは、粘土が3つ以上必要になる形にはどんなものがあるのでしょうか？

2 複雑な図形

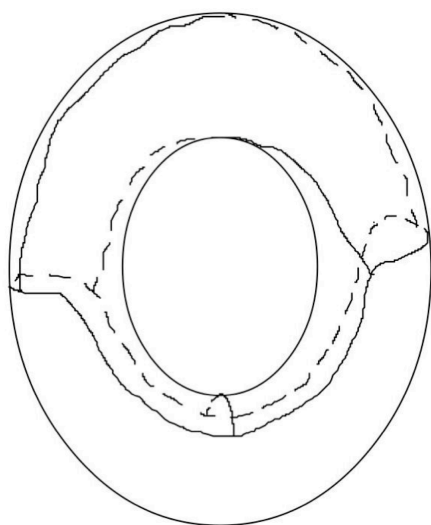
数学では浮輪の形（内部は空洞）をした図形をトーラスと呼びます：

トーラスを粘土で作るには、非常に薄く展びる粘土が必要です。 そのような薄い粘土… これはもう円盤の様なシートですから一枚、二枚、と数えますと…を何枚使ってトーラスが覆われるかを考えます。ここで注意したいのは、自分自身と繋がってしまったシートはいかにもとが円盤状のシートであったとしても、それは既に円盤



では無いことです。 すなわち、円盤状のシートが自分自身と交わらないように注意して貼り付けねばなりません。

答えの一つは次の絵で与えられて、トーラスは三枚の円盤で覆われるこ



とになります。この三枚というのは、実はトーラスを覆うのには必要十分な枚数になります。ただし円盤の取り方は無限に沢山ありますので、自分のオリジナルを考えるのも一興かもしれません。もしかしたら、円盤の取り方が見えてくるかもしれません。

ではもっと複雑な図形ではどうでしょう？

問題 2.1 では二人乗りの浮輪ではどうでしょう？

問題 2.2 また自然数 N に対して N 人乗りの浮輪ではどうでしょう？

実は答えはどれも同じです。

本稿で解説を試みているのは、ユークリッド以来の歴史のある幾何学の一員に数えられる位相幾何学におけるテーマの一つです。位相幾何学は20世紀になってから発展した比較的新しい分野で、柔らかな考え方をその特徴とします。

実は「変形」という概念は様々な場所に現れてくるものです。ここでは図形の「変形」としては、連続的なもの、すなわち切ったり貼ったりといった道具を使わねばならないような操作をしないものを考えています：

変形で変わらない性質こそが図形の本質を表す。

というように考えてはいけませんか？

3 ボール数

さて「ボール」あるいは「 n -ボール」という言葉で、 n 次元空間の中の半径が1の球体を表すことにし、記号で B あるいは B^n と表します。

$$B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

従って、1-ボールは長さが2の閉区間 $[-1, 1]$ となり、2-ボールは半径1の円盤 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ になります。

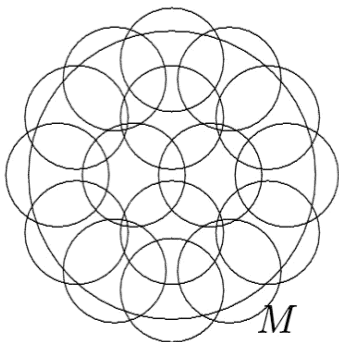
さて与えられた図形 M が m 個のパーツにわけられて各々のパーツがボールを变形してできているとしましょう。図形 M がそのような m 個のパーツに分けられるということは、次の二点が成り立つことになります：

- (1) ボールの m 個の異なる埋め込みで図形 M が覆われ、
- (2) さらに各々のパーツが内部を共有しない

ここで技術的な理由で問題を単純化する為に、多くの場合に本質的でない事が分かっている条件 (2) を外して集合の記号を採用すれば、次の定義に至ります：

$$\text{定義 3.1 } \text{Ball}(M) = \text{Min} \left\{ m \geq 1 \mid M = \bigcup_{i=1}^m F_i \text{ 各 } F_i \text{ はボールの埋め込み} \right\}$$

それでは「ボール数」は上の意味で図形の本質を表すのでしょうか？ それ



は全くその通りです。ボール数が決定できれば、ポアンカレ予想も簡単に解けたかもしれません。ですが、残念ながらこのボール数の定義では自明な場合以外に決定する事はできそうにもありません。分かっていることを一つだけ挙げます：

事実 3.2 任意の図形 M に対して $\text{Ball}(M) \leq \langle M \text{ の次元} \rangle + 1$ が成立する。

4 L-S の猫 (L-S カテゴリ数)

今から70年以上前に、L. Lusternik と L. Schnirelmann によって考え出された量は、ボール数の定義を少し弱めたものでした：

定義 4.1 (1) 図形 M の部分図形 $F \subset M$ の「埋め込みかた」を M の中で連続的に変形して、 M の中のいくらでも小さい範囲に押し込めるとき、 F を「 M の中で猫的」であると表現する。

(2) 図形 F が F 自身の中で猫的であるとき、 F を「可縮」であると表現する。

例 4.2 (1) 例えば任意のボールは直径をどんどん縮めてもボールの中に収まっていますから、これは可縮だとわかります。

(2) 一方でキャンバスに描かれた猫も、キャンバス全体を縮小することで、キャンバスの中でいくらでも狭い範囲に押し込めてしまうことができます。ということは、キャンバスに描かれた猫はキャンバスの中で猫的です。

(3) すると輪の形をした図形も、キャンバスの中で猫的ですが、これは可縮ではありません。なぜなら、輪の直径を半分まで縮めてしまうと、もとの輪の中に入らなくなってしまうからです。

各々の図形 M に対して一つずつ、数 $\text{cat}(M)$ が与えられました：

$$\text{定義 4.3 } \text{cat}(M) = \text{Min} \left\{ m \geq 1 \mid M = \bigcup_{i=1}^m F_i, \text{ 図形 } F_i \text{ は } M \text{ の中で猫的} \right\} - 1$$

実は元々の定義には -1 はついていませんでしたが、ここでは最近の慣例に従って 1 を減じます。さて単純で分かりやすい定義は、往々にして実質的な計算ができなかつたりします。この定義の問題点は、見つけ出した $F_i, 1 \leq i \leq m$ がどれだけ良い評価を与えるのか知る手段が与えられていないことです。そのためこの定義からは、実際には $\text{cat}(M) \leq \text{Ball}(M) - 1$ くらいしかわかりません。

5 L-S の猫の値が小さい時

L-S の猫の値はいつ 0 になりますか？

定義に従って考えてみましょう。 $\text{cat}(M) = 0$ だということは、

$$\text{Min} \left\{ m \geq 1 \left| M = \bigcup_{i=1}^m F_i, \text{ 図形 } F_i \text{ は } M \text{ の中で猫的} \right. \right\} = 1$$

であり、うまく M の部分図形 F を選ぶと二条件「 $M = F$ 」と「 F は M の中で猫的」が同時に成立するという事です。言い換えれば、 M 自身が M の中で猫的であることになり、 M が可縮であることを意味します。逆に M が可縮であれば、 $\text{cat}(M) = 0$ は上の推論を逆に辿れば明らかでしょう。

事実 5.1 M が可縮であることと $\text{cat}(M) = 0$ となることは同値である。特に n -ボール B^n は $\text{cat}(B^n) = 0$ を満たす。

L-S の猫の値はいつ 1 になりますか？

さて地球の表面は、例えば福岡市箱崎6丁目くらいに限定すれば平らだと思って何も問題がありません。このような具合に、一般に図形の中のどの場所でもそこに近い狭い範囲を見た限りでは n 次元ユークリッド空間と見分けがつかず、しかも図形が有限の大きさを持っているとき、数学ではこの図形を n -次元閉多様体あるいは単純に閉多様体と呼びます。

例 5.2 ボール B^{n+1} の表面を S^n で表すと、 S^n は n -次元閉多様体である。

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

事実 5.3 $\text{cat}(M) = 1$ を満たす n -次元閉多様体は $M = S^n$ に限る。 ($n \neq 3$)

もっとも、最近舞い込んできたポアンカレ予想の解決のニュースを信じることにすれば、上の付帯条件 ($n \neq 3$) は必要ありません。

6 計算できないものを決められるの？

思い出してください。 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ の極限值はどうやって求めたでしょうか？

普通にはそのまま極限を取ろうにも無理がありますから、ここは

$$-|x| \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|, \quad x \neq 0$$

という不等号に注目して、極限をとれば

$$-\lim_{x \rightarrow 0} |x| \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x|$$

が得られます。 両端の値が共に 0 であることから、

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

と「決定できた」のでした。

一般には上からどうやって評価するの？

まず、定義から

$$\text{cat}(M) \leq \text{Ball}(M) - 1 \leq \langle M \text{ の次元} \rangle$$

が分かります。 ただしもう少し詳しい話をするのなら、Morse 関数や Cell 分割といったものについての話をしなければなりません。

一般に下からはどうやって評価するの？

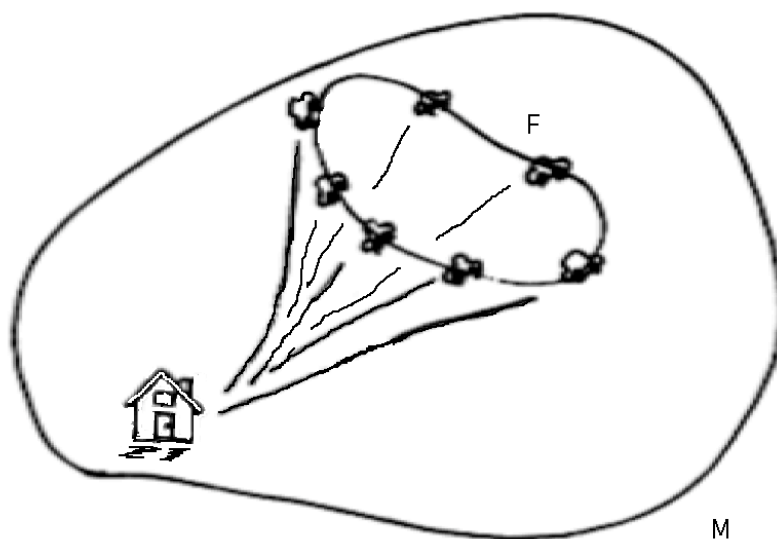
古典的には、「コホモロジー環のベキ零指数」と言われるものが下からの評価を与えることがよく知られていました。ところが最近の L-S の猫についての研究の成果の多くが、数学の他の分野でも注目されることの増えてきた A_∞ -構造との深い関連から生まれてきています。そこで、小論ではこの A_∞ -構造についての解説を試みたいと思います。

7 変形と道の移動

ボール数とか L-S カテゴリ数などを測ろうとすると、図形の「変形」というものをどう捉えるかが問題になります。

図形 F が何か大きな図形 M のなかでいくらでも小さな領域に押し込めるとしましょう。このとき F を極限まで縮めてしまうと、最終的には（全てが同時に） M の中のある一点にまで縮んでしまいます。この極限となる点をここでは「家」と呼ぶことにします。

もう少し詳しく見る為に、ここで F の点に注目してみましょう。すると F の点はこの変形に際して少しずつ動いていって、一定時間後には「家」に到達する事がわかります。この一定時間は決まっていさえすれば何でも構わないのですが、ここでは「1時間」であったとしましょう。



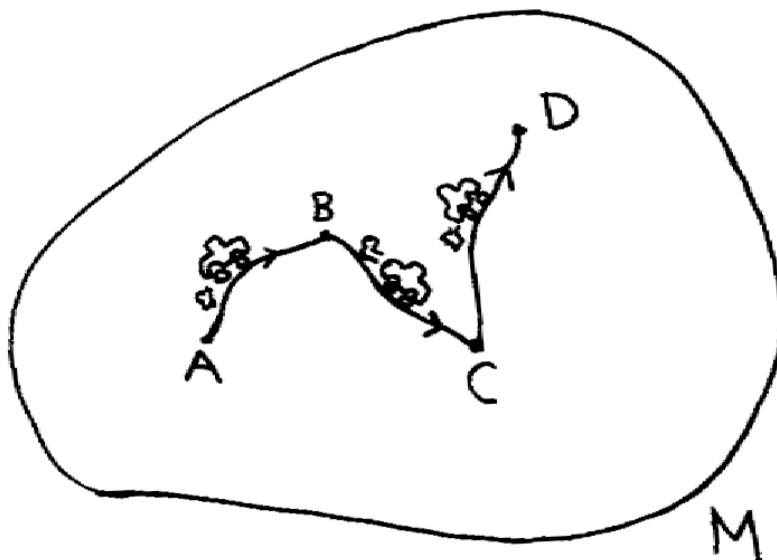
見方を逆にすると、図形 M の中での上のような（猫的な）図形 F というのは、「家」から円陣を組んで走る車の一団が1時間後にとり囲んでいる陣地のような図形なんだと考えても良さそうです。

注 7.1 L-S カテゴリー数はそういった障地いくつで図形 M が覆えるかという数の最小値 (引く 1) になります。

さて上の様な車の一台一台は、 F の変形を一つ与えるごとに、定まった行程を一時間で走るようになります。 実はその様に、図形 M の上で「定まった行程を走る車で一時間の移動」を全て考えることから自然に、 A_∞ -構造とループ空間の概念へと導かれていきます。

8 A_∞ -構造

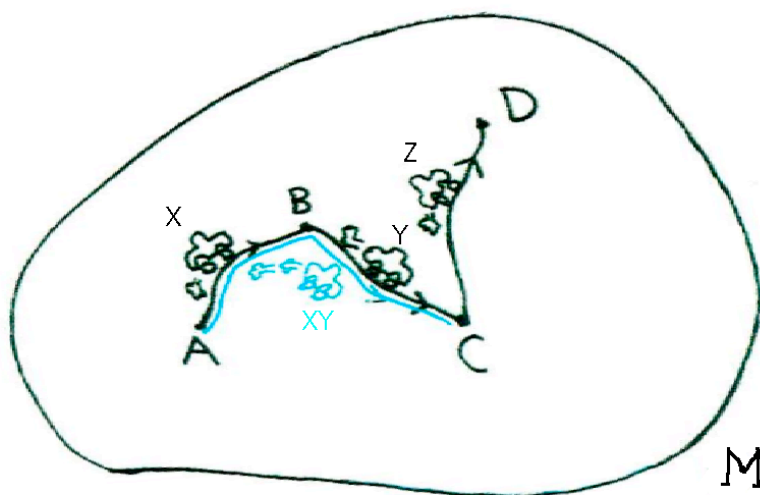
何かの「ずれ」を許容する理論を考えるとき、それがばらばらに分解してしまわないだけの強さを要請するのは自然でしょう。 ここで解説を試みている A_∞ -構造もまたその様な「ずれ」を許容するものであり、ずれに対する十分な「強さ」の要請が無限の階層構造を持っていることを「 ∞ 」の記号が示しています。 それでは「 A 」というのは何を意味しているのでしょうか？ それは結合性 (Associativity) の頭文字だと通常は理解されています。



さて「定まった行程を走る車で一時間の移動」というのを考えてみます：

例えば A 地点から B 地点まであるルートに沿って車で移動する - とかいうと、何だか何かの試験問題みたいですが、もっと簡単です。

ここで「定まった行程を走る車で一時間の移動」では長すぎるので、これを単純に「1 移動」と称することにします。 さて、A 地点から B 地点までの「1 移動」と B 地点から C 地点までの「1 移動」は片方の終点ともう片方の始点が一致しているので、結合することができます。 注意しなければならないのは時間の制約があることです。 ですから車は結合したルートを二倍のスピードで走らなければなりません。

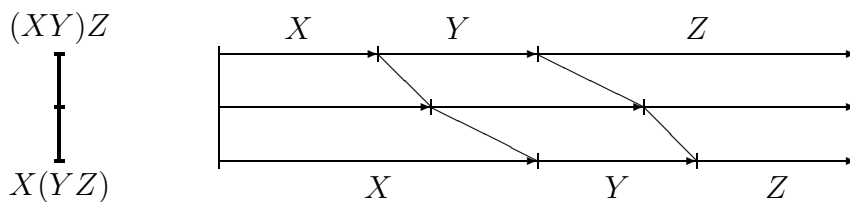


では三つの「1 移動」の結合を考えて見てください： A 地点から B 地点までの「1 移動」X と B 地点から C 地点までの「1 移動」Y と C 地点から D 地点までの「1 移動」Z を結合しましょう。 ところがそれには、どの二つを先に結合するかで 2 種類の「1 移動」が結果として得られることになります！

問題 8.1 A 地点の出発時刻を 8 : 0 0 とすると、B 地点と C 地点の通過時刻を 2 種類の「1 移動」についてそれぞれ求めなさい。

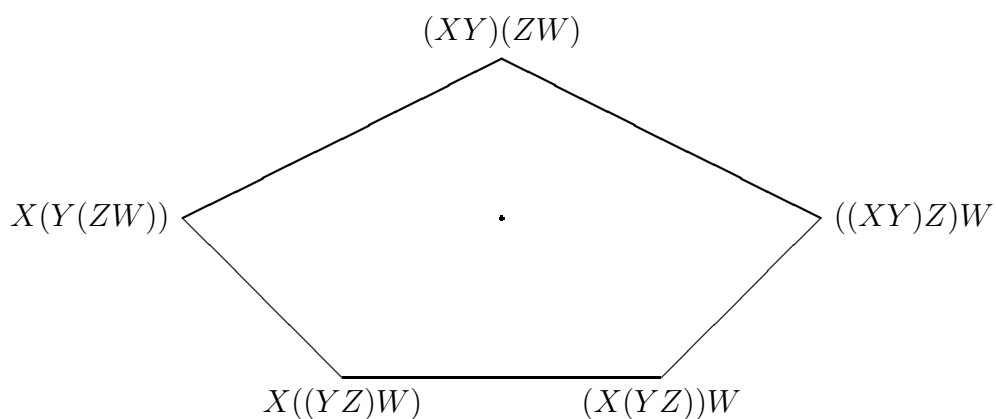
一つ一つの「1 移動」を考えても多くの情報は期待できませんが、このような「1 移動」の全体を考えることでまた違ったものが見えてきたりします。

上のような「ずれ」を許容しようというのですが、この場合にはしかし、統制することが可能です。 実は「1移動」の全体は、巨大な図形を形作ると考えることができます。 その巨大図形の中で三つの「1移動」を結合してできた二つの「1移動」は、二つの点とみなすことができ、それら二つの点を結ぶ道をつることができるのです。



二つの「1移動」の結合を A_2 -形式あるいは A_2 -構造などと呼び、三つの「1移動」の結合として得られる二つの「1移動」を結ぶ「道」を A_3 -形式あるいは A_3 -構造などと呼びます。

さらに四つの「1移動」の結合を考えるとそれは五種類あることが分かります。 その五種類は、「1移動」全体の作る巨大図形の中で五つのルートで結合する事ができ、これらは合わさって五角形をつくります。



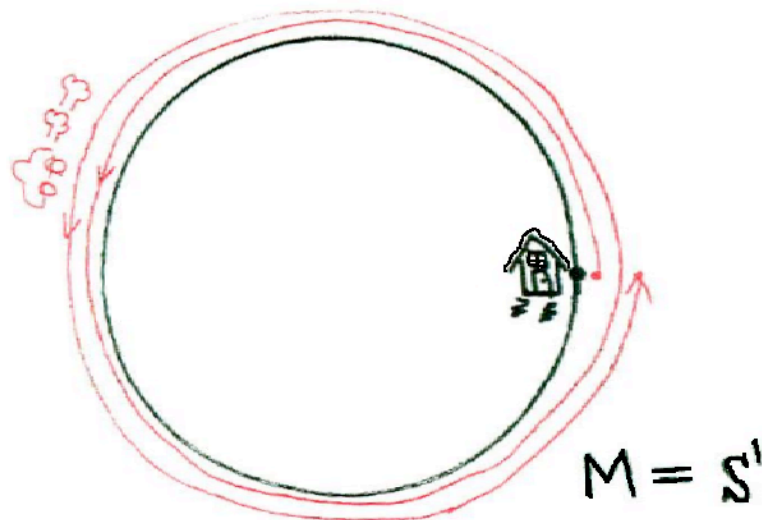
しかもこの五角形を埋め尽くすように、結合の仕方を与えてやることができます。 ということは、四つの「1移動」の5種類の結合を結ぶ五角形が得られ、この五角形を A_4 -形式あるいは A_4 -構造などと呼びます。

定理 8.2 図形 M 中の「家」から出て「家」に戻ってくる「1 移動」の全体を $\Omega(M)$ で表すと、 $\Omega(M)$ は A_∞ -構造を持ちます。

ここで現れた、図形 M 中の「家」から出て「家」に戻ってくる「1 移動」の全体 $\Omega(M)$ を、ここでは図形 M の ループ空間 と呼びます。

9 $M = S^1$ (円周) の場合 I

基本的でしかも自明でない例として $M = S^1$ (円周) の場合を取り上げたいと思います。



円周に対する $\Omega(S^1)$ は何でしょうか？ とにかく家に戻って来なければなりませんので、何度回ったかだけが問題です。数学では左回りを基準にしますので、左回りに n 度回ったとき正の整数 n を対応させ、右回りに n 度回ったとき負の整数 $-n$ を対応させ、全然回らない移動には 0 を対応させると、結局

$$\Omega(S^1) \simeq \{i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots\} = \mathbb{Z}, \quad (\text{大体同じ})$$

とすることができます。 どういう意味で「大体同じ」なのかと言いますと、自然数 n を「定速走行で左回りに n 度回る 1 移動」とみなすなどすれば

$$\mathbb{Z} \subseteq \Omega(S^1)$$

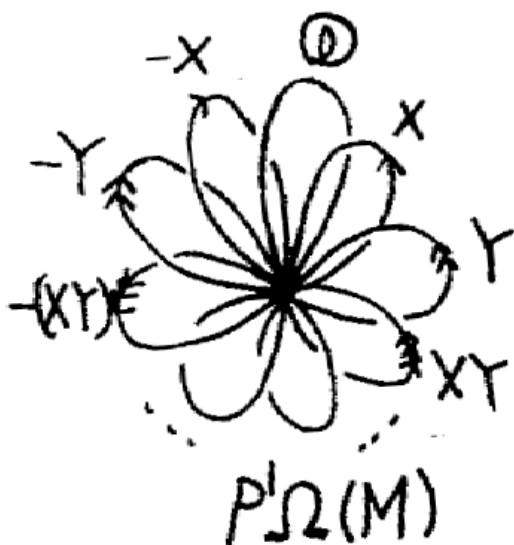
であり、スピードを調節してやることで定速走行に近づけていくと、 $\Omega(S^1)$ を少しずつ \mathbb{Z} に ($\Omega(S^1)$ の中で) 変形する事ができるのです！ これは、 $\Omega(S^1)$ が本質的には \mathbb{Z} と同一視できる (ホモトピー同値である) ことを意味します。

10 A_∞ -構造に随伴する「射影直線」と「射影平面」

図形 M の上の「1 移動」の全体 $\Omega(M)$ は A_∞ -構造を持っていました。 これを使って図形 M を近似していく方法を考えます。

まず $P^0\Omega(M)$ を M の「家」一点だけからなる図形とすると、 $P^0\Omega(M)$ は M の第 0 次の近似を与えます。

[射影直線] 次の様なワイヤでできた花の形を考えます： ただし、その花びらを作る輪の一つ一つに M の上の「1 移動」の名前の書いてある札を貼り付けておきます。



こうしてできた図形を $P^1\Omega(M)$ で表し、 $\Omega(M)$ の「射影直線」と呼びますと、「射影直線」は M の第 1 次の近似を与えるものになります。

もう少し近似の精度を上げましょう。

〔射影平面〕 X, Y という二つの 1 移動の結合が XY という 1 移動だったとき、`射影直線`に次のように三角形の帆を貼り付けます。この操作を繰り返していくと、最後に沢山の帆が張られた図形ができ上がります。こうしてできた図形を $P^2\Omega(M)$ で表

し、 $\Omega(M)$ の`射影平面`と呼びますと、`射影平面`は M の第 2 次の近似を与えるものになります。



… 実は次に現れるべき`射影空間` $P^3\Omega(M)$ は $\Omega(M)$ の A_3 -構造を本格的に用いるものになるのですが、扱う図形の複雑さが私の力を遥かに越えて、うまく説明ができそうにありません… そこで残念ながら`射影空間`については割愛します。

これらの図形はもとの図形 M の中に絵を描くように書いてやることができます：

- (1) M の「1 移動」 X のラベルのついたワイヤの花びらを書くときは、ワイヤの花びらがちょうど円周と同じであることに気づけば、「1 移動」 X が M の中で家から出て家に戻る一筆書きの順路を与えることが分かるでしょう。
- (2) X, Y というラベルのついた二つのワイヤの花びらと XY のラベルのついたワイヤの花びらを繋ぐ帆に対しては、上の書き方は全く同じ絵を描くことになりますので、帆の部分をペタンと畳んでから XY というラベルにそって絵を描けば良いのです。

さて第7節でL-Sカテゴリ数と A_∞ -構造との示唆的な関連を見ることはできましたが、実際に T. Ganea の議論から次の事実に到達します：

事実 10.1 図形 M に対して、次の二つの条件は同値である。 ($m \geq 0$)

- (1) $\text{cat}(M) \leq m$ が成立する。
- (2) $P^m\Omega(M)$ の中に、図形 M の上にちょうど M 自身を描くような (M と同じ形の) 図形が入っている。

注 10.2 この節で解説した「射影平面」は古典的な意味の射影平面ではありません。ただし、記号 C_2 で2を法とした整数の合同類としますと、 C_2 はちょうど二つの要素 --- 0 の合同類 $[0]$ と 1 の合同類 $[1]$ --- からなることがわかります。

$$C_2 = \{[0], [1]\}, \quad \begin{aligned} [0] + [0] &= [0], & [0] + [1] &= [1] \\ [1] + [0] &= [1], & [1] + [1] &= [0]. \end{aligned}$$

この C_2 は整数の全体から遺伝してきた足し算をもち、もちろんそれは結合的になりますから、まさに A_∞ -構造を持つことになります。そこで $\Omega(M)$ に対する $P^1\Omega(M)$ や $P^2\Omega(M)$ と同様に、 C_2 に対しても P^1C_2 や P^2C_2 を定めると、 P^2C_2 はいわゆる (実) 射影平面と本質的には同じものになります。

11 $M = S^1$ (円周) の場合 II

既に分かっていることを書いてみましょう： まず $\Omega(S^1)$ は、 \mathbb{Z} と同一視できます。すると $P^1\Omega(S^1)$ は、整数のラベルをつけたワイヤでできた花びらを括ってできた図形になっています。

例えば正の整数 n のラベルのついたワイヤの花びらは、円周 S^1 を時計と反対の向きに n 度回りますし、負の整数 n のラベルのついたワイヤの花びらは、円周

S^1 を時計と同じ向きに n 度回りますし、0 のラベルのついたワイヤの花びらは、円周 S^1 の家から一步も踏み出さないことになります。



そうです。 そのようなワイヤの花びらの一つとして、1 のラベルのついたものがあるはず。 このワイヤの花びらを上の書き方で描けば、それはちょうど円周 S^1 を描くことになります。

このことは事実 10.1 を用いれば $\text{cat}(S^1) \leq 1$ を意味し、 $\text{cat}(S^1) = 0$ または $\text{cat}(S^1) = 1$ となります。 もし $\text{cat}(S^1) = 0$ だったとすると、事実 10.1 を用いれば S^1 が「家」一点に変形できてしまうこととなりますが、そんなことは円周をどこかで切ってしまう限り不可能です。 というわけで、 $\text{cat}(S^1) \neq 0$ がわかりますから、 $\text{cat}(S^1) = 1$ となるわけです。

なんだか、簡単に分かることを最も難しく解いたみたいですが、それは円周という図形が簡単だからで、複雑な図形を考察しようとする、この考えかたがシステムティックかつ有効な方法を与えることがわかります。

最後に、事実 10.1 からより計算可能でしかも強力な評価法が得られていることを指摘して、筆を置くことにします。 どうもありがとうございました。

12 三人乗りの浮輪



13 メキシコの壺

