Lusternik–Schnirelmann カテゴリ数

岩瀬 則夫

土器の制作に使われる粘土は、 これて固められた塊からあるいは延ばされあるいはすぼめられて、 制作者の思い通りの形に仕上げられる。　しかし取手はどうであろうか？　これは別の小さな粘土の塊を「くっつける」という操作を行わねばならない。　あるいは注ぎ口はどうであろうか？　これは「穴を開ける」か、 注ぎ口の下部を作った後にその上部にやはり別の粘土を「くっつける」といった操作を行わねばならない。

このように土器の制作は「延ばし」たり「すぼめ」たりといった連続的な変形を基に、 取手や注ぎ口を付けるなどの形態的な変化が別の粘土の塊を「くっつける」という操作によって与えられると見なされる。　では、 作り上げたい造形物に対して、 製作者は始めに粘土の塊を最少でいくつ用意すれば良いのであろうか？　誤解を恐れずに言えば、 $\langle$粘土の塊の最少数$\rangle - 1$ に対応する数学的な量が L(usternik)–S(chnirelmann) カテゴリ数である。

L–S カテゴリ数は歴史的には C^∞–関数の特異点の個数を下から評価する量として与えられ、一方では Arnold 予想との関連が指摘され、また一方では結び目の複雑さを測る道具となり、他方では A_∞–構造に付随したホップ不変量が決定的な場面で現れるという、単純ながら興味深い位相（ホモトピー）不変量である。

しかしその単純な定義からは、L–S カテゴリ数を計算する手順は見えてこない。　その辺りの事情はちょうど極限 $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} x\sin(1/x)$ が計算で求めるのは難しいが、上下に挟み込むことで 0 と決定できるのと似ている。　そしてすぐに分かるのは、 L–S カテゴリ数の上限が空間の $\langle$次元$\rangle$ で与えられることであり、下限が空間のコホモロジー環の $\langle$cup length$\rangle$ で与えられることである…

「category」と聞いてまず思い浮かべるものは何でしょう。

やはりいわゆる「圏」ではないでしょうか。対象だとか射だとかを持ち、小さいとか n が付いたりして、抽象論を展開するときに使われる例のあれです。

歴史的にどちらが先なのか、詳しく調べてみたわけでは無いのですが、むしろ圏の概念の方が後のような気がします。もちろん比較しているのは、今回の主題である Lusternik–Schnirelmann の「category」です。こちらは 0 を含めた意味での自然数に値を持つ、詰まる所は、ただの数です。この点を強調しようと、今回の講演タイトルには「カテゴリ数」というように「数」を特につけています。ただ他の皆さんが「カテゴリー」と書かれていますので、これは少し「早まったかな」と反省していますが、今回はこのままで許して下さい。

この数は、いかなる位相空間 X に対しても定義可能で、記号で「$\mathrm{cat}(X)$」と表されます。しかし、この二人のロシア人の名前は、長い上にどうにも発音し難いのが困りもので、LS cat とか L–S cat とかに略してしまうのが普通です。さらに L–S cat は一種類しかないわけではなくて、似たような定義の不変量（L–S cat はホモトピー不変量です）が沢山あります。

1　ボール数

立体図形 Ω を穴の無い粘土の塊を繋ぎ合わせてつくりましょう。ただし、ルールがあって自分自身と繋ぎ合わせるのは反則です。

どうしてでしょうか？

自分自身と張り合わせるのを許したら、それは始めから穴の空いた立体とかを使って良いことにするのとちっとも変わらないからです。さて、それでは

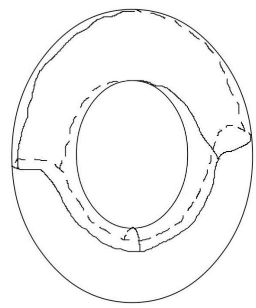
いったい何個あれば立体図形 Ω の形を作れるでしょうか？

もう少し数学的に考えましょう。「穴の無い粘土の塊」というのは、位相的にはボールと位相同形な図形と言うことになります。

定義 1.1　（境界つきの）n 次元多様体 M をボールと位相同形な部分空間の族 $\{F_i \subseteq M\,;\, 1 \leq i \leq m\}$ で覆うことができるとき、そのような覆い方を全て考えます。そして、それらの m の最小値を $\mathrm{Ball}(M) \geq 1$ で表し、「ボール数」と呼びます。もし有限個で覆う事ができないなら、$\mathrm{Ball}(M) = \infty$ とします。

さて、ボールによる被覆というとすぐ思いつくのは、ハンドル分解ではないでしょうか。そうすると、L–S の猫の値はハンドルの数で上から抑えられる事になります。ただ、これは少し大き過ぎるようです。

例. 2 次元トーラス T^2 を考えてみましょう。標準的な Morse 関数は 4 つの臨界点をもち、従ってこれから得られるハンドル分解は 0–ハンドル一つ、1–ハンドル二つ、2–ハンドル一つの計 4 つになります。しかし、トーラスは 3 つのボールによって覆う事ができます！



ボール数 Ball(M) は M の位相不変量になる

しかし残念ながらボール数は、計算で求めることはとても期待できません。問題点は明らかで、この定義では、なんらかの代数的な計算式などとても期待できず、上からの評価が与えられるだけで、下からの評価は見えてきません。実は L. Lusternik と L. Schnirelmann は、より扱いやすく、しかも全ての位相空間に対して定義できる形式での定式化を採用したのです。

2 Lusternik–Schnirelmann の猫

ボールの持つ性質として、「可縮である」という性質があります：つまり、ボールはいくらでも小さい領域に押し込めてやれるという性質を持っています。この性質で「ボールと位相同形である」という性質を置き換えると、全ての多面体に対してボール数に近いものが定式化できるようになります。

定義 2.1 (Lusternik–Schnirelmann) 空間 X の部分集合 A が「categorical」とは、A をいくらでも小さい領域に X の中で押し込むことができることです。

この「categorical」という言葉も「圏論的」という言葉とかぶってしまっていますので、ここでは「猫的である」と表現します。

定義 2.2 (Lusternik–Schnirelmann) 多面体 X が猫的な開集合からなる族 $\{A_i \subseteq X\,;\, 0 \leq i \leq m\}$ で覆うことができるとき、そのような覆い方を全て考えます。そして、それらの m の最小値を $\mathrm{cat}(X) \geq 0$ で表し、「L–S の猫」と呼びます。ただしもし有限個で覆う事ができないなら、$\mathrm{cat}(X) = \infty$ とします。

この不変量（L–S の猫）は定義からホモトピー不変量であり、G. Whitehead による同値な定義を持つなど、安定な概念であることが分かっています。

定義 2.3 (Whitehead) 基点つき多面体 X の対角線写像 $\Delta_{m+1} : X \to \prod^{m+1} X$ を変形して、像が部分集合 $\{(x_0, \cdots, x_m) \in \prod^{m+1} X \,;\, \exists_i\ x_i = * \text{ for } 0 \le i \le m\}$（fat wedge と呼ばれます）に押し込められるような十分大きな m が存在する場合を考えます。 それらの m の最小値を $\mathrm{cat}(X) \ge 0$ で表し、「L–S の猫」と呼びます。ただしもし有限の m が取れないなら、$\mathrm{cat}(X) = \infty$ とします。

注. Whitehead の定義では、空間 X が $\mathrm{cat}(X) = 1$ を満たすことは、ちょうど X が co–H 空間であることと、定義から同じになります： 対角線写像 $\Delta : X \to X \times X$ が 1 点和 $X \vee X$ に押し込められる。

実はこの二つの定義は、一般に同値であることが証明できません。 多面体や多様体といったある程度良い性質を仮定しないと一致しないのかもしれません。 さて Lusternik と Schnirelmann の与えた定理は次の様に述べられます。

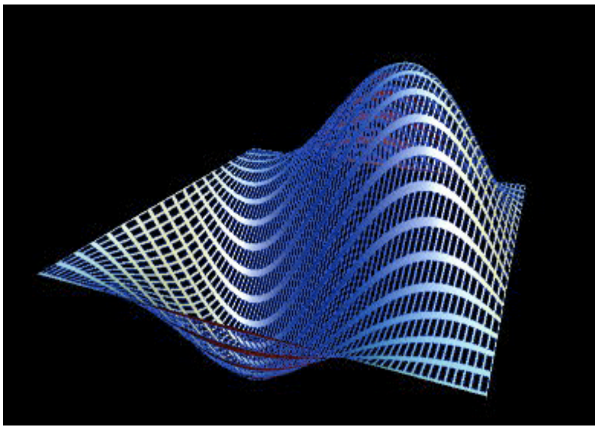
定理 2.4 (Lusternik–Schnirelmann) 閉多様体 M 上で定義された C^∞–実関数の停留点は、少なくとも $\mathrm{cat}(M) + 1$ 個以上ある。

これの事実は Lusternik と Schnirelmann が L–S の猫を導入するに至った動機として知られていますが、松元先生が証明をしてくださるとのことですので期待しております。 さて次の事実が分かっています。

定理 2.5 (Takens) 閉多様体 M 上で定義された C^∞–実関数を全て考えるとき、その停留点の個数の最小値を $\mathrm{Crit}(M)$ とすると、次の不等式が成立する：

$$\mathrm{cat}(M) \le \mathrm{Ball}(M) - 1 \le \mathrm{Crit}(M) - 1 \le \mathrm{Dim}(M).$$

例. また 2 次元トーラス T^2 を考えてみましょう。 全ての臨界点で非退化な C^∞–関数ですと、*Morse* 関数と同じですから、どうしても臨界点は 4 点以上あることになります。 しかし、*Hessian* が退化するような関数をも考えると、臨界点が 3 個のものが作れます：



（*Cornea-Lupton-Oprea-Tanré* の L–S の猫の教科書から取ってきました。）
従って $\mathrm{Crit}(T^2) \leq 3$ となり、次の不等式にうまくはまります。

$$\mathrm{cat}(T^2) \leq \mathrm{Ball}(T^2) - 1 \leq \mathrm{Crit}(T^2) - 1 \leq \mathrm{Dim}(T^2) = 2$$

3　上からの古典的な評価

定義から L–S の猫を計算で導き出すというのは、よほど単純な空間でない限りまず不可能です。実際 L–S の猫の定義からは、何らかの被覆が与えられた時にその枚数（-1）で上から抑えられることは分かりますが、それがベストであるという保証が定義から得られる見込みが期待できないものです。

ではこれ以後、多面体は連結なもののみ考える事とし、一般の多面体 X に対して上から評価することを考えてみましょう。

事実 3.1 多面体 X に対して不等式 $\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{Dim}(X)$ が成立する。

証明: 多面体 X は有限次元として良いから $0 \leq \mathrm{Dim}(X) < \infty$ であり、

$$X_n = \bigcup \{|\sigma^q|\,;\, \sigma^q \text{ は } X \text{ の } q\text{-単体で、} q \leq n\}, \qquad 0 \leq n \leq \mathrm{Dim}(X)$$

とおくと $X = X_{\mathrm{Dim}(X)}$ が成立します。さて、$X_n \smallsetminus X_{n-1}$ は n-単体の内部の集まりだから、可縮な空間の集まりという意味で X の中で猫的である。従って覆うのに必要な部分集合の個数は高々 1 しか増えないから

$$\mathrm{cat}(X_n) \leq \mathrm{cat}(X_{n-1}) + 1, \qquad 0 \leq n \leq \mathrm{Dim}(X)$$

であるので $\mathrm{cat}(X_n) \le n$ が全ての n で成立します。従って、$\mathrm{cat}(X) = \mathrm{cat}(X_{\mathrm{Dim}(X)}) \le \mathrm{Dim}(X)$ を得る。 終り.

しかし、ここに問題が出てきます。この「上からの評価」は本当に L–S の猫に対するものなのでしょうか？ これを考察する前に、一つ準備をします。連結多面体 X の部分空間 A の中に基点「$*$」をとり、X に $[0,1] \times A$ を $[0,1] \times A \ni (1,a)$ と $a \in A \subseteq X$ を同一視する事で貼り付けます。さらに $[0,1] \times *$ と $0 \times A$ を 1 点に潰して帽子のような図形 $X \cup CA$ を作ります。

定義 3.2 多面体 X に対して Fox–Ganea が次の不変量を与えました。

(Fox の強い猫) X が可縮な開集合からなる族 $\{A_i \subseteq X\,;\, 0 \le i \le m\}$ で覆うことができるとき、そのような覆い方を全て考えます。そして、それらの m の最小値を $\mathrm{gCat}(X) \ge 0$ で表し、「幾何的な猫」と呼びます。ただしもし有限個で覆う事ができないなら、$\mathrm{gCat}(X) = \infty$ とします。

(Ganea の強い猫) $\mathrm{Cat}(X) = \mathrm{Min}\,\{m \ge 0\,;\, \exists_{Y \simeq X} \text{ such that } \mathrm{gCat}(Y) = m\}$

(Ganea の Cone length) X の（長さ m の）Cone 分解とは、多面体の増加列 $\{X_i\,;\, 0 \le i \le m\}$（$X_i \supseteq X_{i-1}, 1 \le i \le m$）で次を満たすものです。

$X \simeq X_m,\ X_0 = CA_0,\ X_i = X_{i-1} \cup CA_i$ （A_i は X_m の閉部分集合）

X が有限長 m の Cone 分解を持つとき、そのような分解の全てを考えます。そして、それらの m の最小値を $\mathrm{Cl}(X) \ge 0$ で表し、「Ganea の cone length」と呼びます。ただしもし有限長の Cone 分解を持たないなら、$\mathrm{Cl}(X) = \infty$ とします。

$\mathrm{Cl}(X)$ と $\mathrm{Cat}(X)$ の関係については Ganea 自身が次の命題を証明しました。

命題 3.3 (Ganea) $\mathrm{cat}(X) \le \mathrm{Cat}(X) = \mathrm{Cl}(X) \le \mathrm{Dim}(X)$

命題 3.4 (Ganea) 単連結な多面体 X に対して不等式 $\mathrm{Cat}(X) \le \dfrac{\mathrm{Dim}(X)}{2}$ が成立する。さらに X が m–連結ならば $\mathrm{Cat}(X) \le \dfrac{\mathrm{Dim}(X)}{m+1}$ が成立する。

それでは、このような上からの評価は L–S の猫に対しては意味が薄いのでしょうか？ この問に対しても、上の等式 $\mathrm{Cat}(X) = \mathrm{Cl}(X)$ を用いて、やはり Ganea が次の命題を証明しました。

命題 3.5 (Ganea) $\mathrm{Cat}(X) - 1 \le \mathrm{cat}(X) \le \mathrm{Cat}(X)$

すなわち、Ganea の強い猫は L–S の猫と高々 1 しか違わないのです。

4　下からの古典的な評価

それでは、次に下からの評価をコホモロジーを使って与えてみましょう：まず多面体 X から自然に定まる鎖複体 $(C_*(X), \partial)$から、ホモロジー群 $H_*(X)$ が

$$H_q(X) = \frac{\ker \partial : C_q(X) \to C_{q-1}(X)}{\mathrm{im}\, \partial : C_{q+1}(X) \to C_q(X)}$$

により与えられます。さらに、環 R に係数を持つコホモロジー群 $H^*(X;R)$ が $C^*(X;R) = \mathrm{Hom}(C_*(X);R)$ と $\delta = \partial^* : C^*(X;R) \to C^{*+1}(X;R)$ により与えられる余鎖複体 $(C^*(X;R), \delta)$ を用いて

$$H^q(X;R) = \frac{\ker \delta : C^q(X;R) \to C^{q+1}(X;R)}{\mathrm{im}\, \delta : C^{q-1}(X;R) \to C^q(X;R)}$$

により与えられます。特に n 次元閉多様体 M に対しては、M 上の微分形式の全体から作られる余鎖複体 $(\Lambda^*(M), d)$ から定まる De Rham コホモロジー群

$$H^q_{DR}(M) = \frac{\ker d : \Lambda^q(M) \to \Lambda^{q+1}(M)}{\mathrm{im}\, d : \Lambda^{q-1}(M) \to \Lambda^q(M)}$$

は、係数を $R = \mathbb{R}$（実数全体）とする通常のコホモロジー群と同一視できます：

$$H^*_{DR}(M) \cong H^*(M;\mathbb{R})$$

ここでもし $\mathrm{cat}(M) \le m$ とすると、M は高々 $m+1$ 枚の猫的な開集合 $\{A_i\,;\, 0 \le i \le m\}$ で覆い尽くせます。すると包含写像 $a_i : A_i \hookrightarrow M$ がコホモロジーに誘導する準同型は A_i が猫的であることから可換図式

$$\begin{tikzcd}
H^q_{DR}(M) \arrow[rr, "a_i^*"] \arrow[dr] & & H^q_{DR}(A_i) \\
& H^q_{DR}(B^n_\varepsilon) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

B^n_ε は n 次元 ε ボール

を誘導するので、$H^q_{DR}(B^n_\varepsilon) = 0$ より a_i^* は自明な準同型になります：

$$a_i^* = 0 : H^q_{DR}(M) \longrightarrow H^q_{DR}(A_i), \quad q > 0.$$

従って任意の $u \in H^q_{DR}(M)$ は、A_i の上で（少し狭めないといけませんが）$\omega_i|_{A_i} = 0$ を満たすように代表元 $\omega_i \in u$ を取る事ができます。そうすると

事実 4.1 任意に $m+1$ 個の元 $u^{(i)} \in H^*_{DR}(M)$ $(0 \le i \le m)$ を与えるとき、$u^{(i)}$ の代表元 ω_i として $\omega_i|_{A_i} = 0$ を満たすようにとってくれば明らかに $\omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m = 0$ だから、$u^{(0)} \cdot u^{(1)} \cdot \cdots \cdot u^{(m)} = 0 \in H^*_{DR}(M)$ を満たす。

例. もう一度 2 次元トーラス T^2 に戻って考えてみましょう。

$$H^*_{DR}(T^2) = \mathbb{R}\{1\} \oplus \mathbb{R}\{\mu, \lambda\} \oplus \mathbb{R}\{\mu \cdot \lambda\}, \quad \mu, \lambda \in H^1_{DR}(T^2)$$

ただし $\mu \cdot \lambda = -\lambda \cdot \mu$ なので、この環はいわゆる外積代数 $H^*_{DR}(T^2) = \Lambda(\mu, \lambda)$ になります。とにかく $\mu \cdot \lambda \neq 0$ より、$\mathrm{cup}(T^2) = 2$ となり、次を得ます。

$$2 = \mathrm{cup}(T^2) \leq \mathrm{cat}(T^2) \leq \mathrm{Ball}(T^2) - 1 \leq \mathrm{Crit}(T^2) - 1 \leq \mathrm{Dim}(T^2) = 2$$

すなわち、これらの不等号は全て等号に置き換えられることが分かりました。

さて、簡約型の乗法的一般コホモロジー（乗法的コホモロジー） $h^*(X)$ には De Rham コホモロジーの積に対応する積構造が自然に導入され、上の事実と同様な性質を満たします。

事実 4.2 うまく m 個の元 $u^{(i)} \in h^*(X)$ $(1 \leq i \leq m)$ を選ぶとき、$0 \neq u^{(1)} \cdot \cdots \cdot u^{(m)} \in h^*(X)$ を満たすようできるなら、$\mathrm{cat}(X) \geq m$ が成立する。

このように零にならないように積を作るとき、用いる元の可能な最大個数を $\mathrm{cup}(X; h)$ などと表し X の（乗法的コホモロジー h についての）cup-length と呼びます： 特に $h^*(X) = \tilde{H}^*(X; R)$ のとき、これを $\mathrm{cup}_R(X) = \mathrm{cup}(X; R)$ などと表し X の（係数 R の）cup-length と呼ぶことがあります。さらに

$$\mathrm{cup}(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{cup}(X; h)\,|h \text{ は乗法的コホモロジー全てを動く}\}$$

と定めると、次の等式が得られます：

$$\mathrm{cup}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0\,;\, * \underset{\text{stably}}{\simeq} \bar{\Delta}_{m+1} : X \overset{\Delta_{m+1}}{\to} \prod^{m+1} X \overset{q_{m+1}}{\to} \overset{m+1}{\wedge} X \right\}$$

ただし、q_{m+1} は、積空間の中の fat wedge の部分を 1 点に潰す写像です。最後に Whitehead の挙げた「弱い猫」も紹介します。

$$\mathrm{wcat}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0\,;\, * \simeq \bar{\Delta}_{m+1} : X \overset{\Delta_{m+1}}{\to} \prod^{m+1} X \overset{q_{m+1}}{\to} \overset{m+1}{\wedge} X \right\}$$

以上をまとめると、次の不等式が古典的には得られていました。

$$\mathrm{cup}(X; h) \leq \mathrm{cup}(X) \leq \mathrm{wcat}(X) \leq \mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{Cat}(X) \leq \mathrm{Dim}(X)$$

ただし、この中で現実的に計算可能なのは $\mathrm{cup}(X; R)$ くらいかもしれません。

5　様々な空間に対する L–S の猫の値

空間が単純ですと L–S の猫の値を決める事は難しくない場合があります。

例. L–S の猫が 0 になるにはその空間が可縮であることが必要十分です。

例. L–S の猫が 1 になるにはその空間が co-H 空間であることが必要十分です。 空間が閉多様体なら、それは球面にホモトピー同値になります。

例. n 次元 torus T^n は $\mathrm{Dim}(T^n) = \mathrm{cat}(T^n) = \mathrm{cup}(T^n; \mathbb{Z}) = n$ を満たす。

例. 高次元球面 $S^{n_1}, \cdots, S^{n_r}$ の直積 $X = S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_r}$ は次を満たす。

$$\mathrm{Dim}(X) = \mathrm{cat}(X) = \mathrm{cup}(X; \mathbb{Z}) = r$$

例. n 次元実（複素、四元数）射影空間 $\mathbb{R}P^n$ （$\mathbb{C}P^n, \mathbb{H}P^n$）は次を満たす。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dim}(\mathbb{R}P^n) &= \mathrm{cat}(\mathbb{R}P^n) = \mathrm{cup}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = n \\
\mathrm{Dim}(\mathbb{C}P^n) &= \mathrm{cat}(\mathbb{C}P^n) = \mathrm{cup}(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) = n \\
\mathrm{Dim}(\mathbb{H}P^n) &= \mathrm{cat}(\mathbb{H}P^n) = \mathrm{cup}(\mathbb{H}P^n; \mathbb{Z}) = n
\end{aligned}$$

しかし例えば lens 空間を取ってさえ、これらの評価は十分ではありません：

事実 5.1 $L^n(p) = S^{2n+1}/(\mathbb{Z}/p)$ （$\mathbb{Z}/p$ は位数 $p > 2$ の巡回群）のとき、

$$H^*(L^n(p); \mathbb{Z}/p) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}/p}(x) \otimes \mathbb{Z}/p[y]/(y^{n+1}),\ \beta(x) = y,$$

ただし、$x \in H^1(L^n(p); \mathbb{Z}/p), y \in H^2(L^n(p); \mathbb{Z}/p)$ であり、$xy^n \neq 0$ となるので

$$\mathrm{Dim}(L^n(p)) = 2n + 1, \quad \mathrm{cup}(L^n(p); \mathbb{Z}/p) = n + 1.$$

さて、80'年代にホモトピー論に画期的な成果をもたらした Miller の定理から Zabrodsky らによってその重要性が指摘され、現在も活発に研究される「有限個の次元を除き高次のホモトピー群が全て消えている空間」（有限 Postnikov piece）は、（Eckman–Hilton の意味で）ちょうど有限複体の双対的な概念となります。 これ以後、π としては有限生成な群の場合しか考えないことにします。

定義 5.2 連結な空間 X が type (π, n) の Eilenberg–MacLane 複体（$K(\pi, n)$ と表す）であるとは、群 π と自然数 n に対して $\forall_{q \neq n} \pi_q(X) = 0$ かつ $\pi_n(X) = \pi$ が成立することです。 特に Eilenberg–MacLane 複体は有限 Postnikov piece です。

事実 5.3 n が 2 以上かつ π がアーベル群のとき、$\mathrm{Dim}(K(\pi,n))=\infty$ であるが、L-S の猫も $\mathrm{cat}(K(\pi,n))=\infty$ を満たす。

そして、幾つかの問題が残されました。

問題 5.4 (1) 閉多様体 M から 1 点を抜いてしまうと、ホモトピー的な次元が下がるのと同様に、L-S の猫の値も減るのでしょうか？

(2) 閉多様体 M は、どんな次元の球面との直積を取っても L-S の猫の値が 1 だけ増えるのでしょうか？

(3) Ganea の強い猫ではなく、L-S の猫を上から評価する不変量は無いのでしょうか？

(4) L-S の猫ではなく、Ganea の強い猫を下から評価する不変量は無いのでしょうか？

(5) 高次元ホモトピー群がどれか残っている有限 Postnikov piece の L-S の猫の値は無限大でしょうか？

(6) 群 π は $\mathrm{cd}(\pi)=\mathrm{cat}(B\pi)=\mathrm{gd}(\pi)$ （$B\pi=K(\pi,1)$） を満たすでしょうか？ただし $\mathrm{cd}(\pi)$ は π のコホモロジー次元で、$\mathrm{gd}(\pi)=\mathrm{Dim}(B\pi)$ です。

始めの二つは古くからの問題でしたが、前世紀の終わりに解決できました。

三つ目は高次 Hopf 不変量を用いてなんとか作れたと思っています。

四つ目は通常のホモトピー論の手法ではできそうに無いようですので、例えば simple homotopy theory で何か不変量が作れないかとかの妄想を抱いています。

五つ目は Serre 予想の拡張のつもりですが、意外に簡単な事かもしれません。

この最後の問題に対する肯定的な解答が Eilenberg-Ganea の予想と呼ばれ、今も未解決のままだと思います。自分の感じでは $\mathrm{cat}(BG)=\mathrm{cd}(G)$ かつ $\mathrm{Cat}(BG)=\mathrm{gd}(G)$ であってもおかしく無い気がします。もしかしたら $\mathrm{cat}(BG)=2<3=\mathrm{Cat}(BG)$ となることがあるのでしょうか。この Eilenberg-Ganea の予想と背反するという、Whitehead の予想が正しいのかもしれませんが、とにかく、わかりません。

以上です。

岩瀬 則夫 （いわせ のりお）
九州大学大学院数理学研究院

Lusternik–Schnirelmann カテゴリ数と A_∞ 構造

岩瀬 則夫

古典的なホモトピー論の手法を適用するだけでL–Sカテゴリ数が決定できる空間は期待されるほど多くはなく、例えば n 次元トーラス $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \approx S^1\times(n\text{ 個})\times S^1$ の L–S カテゴリ数は n であるとすぐに決定できるが、lens 空間の L–S カテゴリ数の決定でさえ実は難しい。 さらに空間 X の L–S カテゴリ数 $\mathrm{cat}(X)$ がどういう場合に増えるかすら問題であり、例えば等式 $\mathrm{cat}(X)\times S^n = \mathrm{cat}(X)+1$ が成立するかどうかも３０年近く未解決であった。

この講演ではL–Sカテゴリ数のホモトピー論的な側面に注目し、1997 年以後に得られたいくつかの計算可能な不変量を A_∞–構造との関連を見ながら紹介したい。 それらはまず上からの評価を与える $\langle$高次ホップ不変量$\rangle$ であり、また下からの評価を与える Rudyak, Strom の $\langle$category weight$\rangle$ およびその改良版である $\langle$module weight$\rangle$ である。 実はそのような新しい不変量の登場する過程で、期待されていた等式 $\mathrm{cat}(X\times S^n) = \mathrm{cat}(X)+1$ が成立しない閉多様体 X の例があることが３次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^3$ を用いて見いだされている。

「分類空間」って何でしょう。

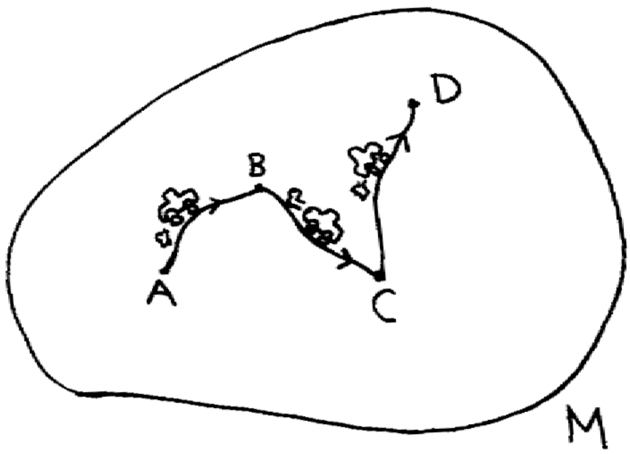
Milnor によって、位相群の持つ重要な性質がその分類空間のホモトピー論的な性質として中に閉じこめられていることが明らかになっています。 ただし Milnor の構成法は、位相を弱位相に取っておかないとホモトピー群とかの性質をうまく導き出せませんので、気をつけないといけません。

これを、逆に考えたいのです。 すると分類空間のホモトピー論的性質は、Lie 群などの位相群の群構造に反映していることになります。 それなら、与えられた多面体のホモトピー論的性質がその群構造に反映するような位相群はあるのでしょうか？ やはり Milnor によれば、答は YES です。

単連結多面体は、何らかの位相群の分類空間となります。

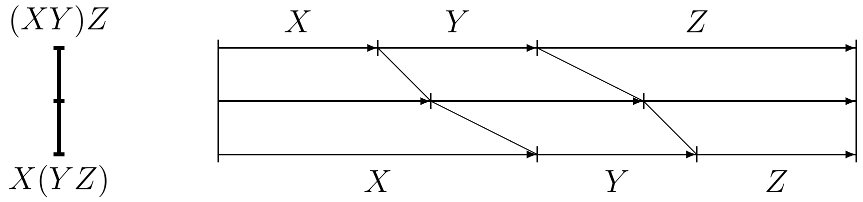
これをうまく用いることができれば、L–S の猫というホモトピー不変量を「位相群」の群構造の言葉で理解することができるかもしれません。

ただし、その証明のために Milnor の構成した巨大な「位相群」は、通常我々の設定する有限性の条件を、当然ながら満たしません。 ホモトピー論的には、この「位相群」は与えられた単連結多面体 X 上に描かれた（始点と終点が基点に固定された）ループ全体の作る位相空間（ループ空間 $\Omega(X)$）のホモトピー型を持ち、さらに Toda の standard path の空間 $\omega(X)$ とホモトピー同値になります。

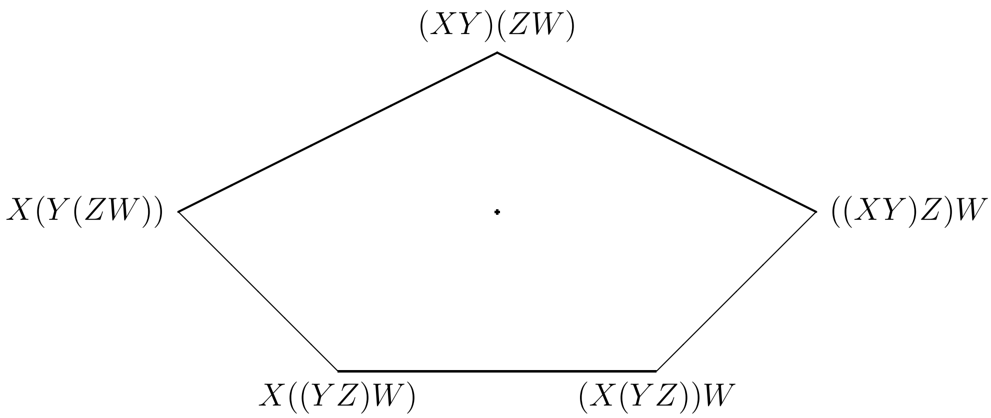


従ってループ空間は位相群にホモトピー同値な空間として、位相群の構造をずらした形での自然な二項演算（ループの結合）を持つことになります。 しかしこのループの結合は単位元も持たず、結合性も成立しないなど、一見する

と余り興味深い性質は無さそうです。それにも関わらずこのループ空間は、ホモトピー単位元を持ち、ホモトピー結合性を満たします。



さらにそれだけでなく、より高次の構造まで持ちます。



従ってループ空間は位相群の構造をずらした形での自然な A_∞–構造を持つことが分かります。この m 番目の構造を与えるセルは次のように与えられます：

$$K(m) = \{(t_1, \cdots, t_m)\,;\, \forall_k\ 0 \leq t_k \leq k - 1 - \textstyle\sum_{i=1}^{k-1} t_i\}$$

1　ループ空間の A_∞–構造

連結多面体 X の部分空間 A の中に基点「$*$」をとり、$*$ から出て A の中にやってくる道の全体を $\Omega(X, A)$ で表します。道 $u \in \Omega(X, A)$ は始点は $u(0) = *$ となり、終点は $u(1) \in A$ を満たしますから、写像（path–fibration）

$$p : \Omega(X, A) \to A, \quad p(u) = u(1)$$

が得られます。この写像は各点 $a \in A$ での fibre が同じホモトピー型 $\Omega(X)$ を持つだけでなく、ファイバー束と同様に「Homotopy Lifting Property」を満

たしますので、ホモトピー論的にはファイバー束と同様に扱う事ができます。またこれを双対的に捉えたものが cofibration です。

注. $\Omega(X,X)$ は path の長さを一様に短くしていくと、全てが同時に 1 点にまでつぶれてしまいますから、空間自体が可縮になります。

さて、1963 年に Stasheff が次の定理を証明しました。

定理 1.1 (Stasheff) 多面体 X に対して、そのループ空間 $\Omega(X)$ の A_∞-構造から空間の増大列 $\{P^m(\Omega(X))\}$（射影空間）と写像の列 $\{e^X_m : P^m(\Omega(X)) \to X\}$ が構成され、$e^X_\infty : P^\infty(\Omega(X)) \simeq X$ はホモトピー同値写像となる。

このとき、path-fibration $p : \Omega(X,X) \to X$ を射影空間 $P^m(\Omega(X))$ に引き戻した fibration を $p_m : E^{m+1}\Omega(X) \to P^m(\Omega(X))$ と書かせて下さい。さて、Stasheff の論文の 4 年後 1967 年に Ganea が次の結果を発表しました。

定理 1.2 (Ganea) 空間 X に対して自然な空間列 $\{G_m(X); 0 \le m \le \infty\}$（Ganea 空間）と写像の列 $\{g^X_m : G_m(X) \to X\}$ が構成され、$g^X_\infty : G_\infty(X) \simeq X$ はホモトピー同値写像となる。さらに、$\mathrm{cat}(X) \le m$ となるには $g^X_m \circ s = \mathrm{id}_X$ を満たす写像 $s : X \to G_m(X)$ が存在することが必要十分である。

この Ganea 空間は、基本的に L-S の猫の original の定義に基づき、fibration と cofibraiton を用いて帰納的に構成（Ganea の fibre-cofibre 構成）されましたが、既存の空間との関係は与えられていませんでした。多分一般の空間だと成立しないのでしょうが、とにかく、Whitehead の定義を用いて構成し直すと、Stasheff の射影空間との関係が分かります。

事実 1.3 $\mathrm{cat}(X) \le m$ となるには $e^X_m \circ \sigma = \mathrm{id}_X$ を満たす写像 $\sigma : X \to P^m(\Omega(X))$ が存在することが必要十分である。

この証明のポイントは、Stasheff による A_∞-構造の普遍性で、L-S の猫の定義としては、Whitehead の定義を採用しなければなりません。

多分、これを見つけたのが L-S の猫を考え始めた動機であると言っていいと思います。私はそれまで、Stasheff の射影空間のホモトピー論的な性質を調べて、A_m-構造や A_∞-構造の研究をしていましたので、よその家にいると思っていた猫が、気がついたら自分の家に住み着いていたという様な感じです。でも猫は気が向いたらまたどこかに行ってしまうかもしれません。

2 高次 Hopf 不変量

高次 Hopf 不変量を使って L-S の猫の値がいつ増えるのかを判定する条件を導き出します。まず、高次 Hopf 不変量の定義を与えましょう。

命題 2.1 (Berstein–Hilton) $\mathrm{cat}(X) \le m$ のとき、Whitehead の定義から対角線写像の compression $s : X \to \overset{m+1}{\mathrm{T}} X$ (fat wedge) を取ると、次の写像（高次 Hopf 不変量）が存在します。

$$H_m^s : \pi_q(X; R) \to \pi_{q+1}(\prod^{m+1} X, \overset{m+1}{\mathrm{T}} X; R),\ q \ge 2 \text{ かつ } R \text{ はアーベル群}$$

定理 2.2 (Berstein–Hilton) $f : S^q \to S^r$ のとき、$Q = S^r \cup_f e^{q+1}$ とおくと、$\mathrm{cat}(Q) = 2$ となるには $H_1^s(f) \neq 0$ であることが必要十分です。

これは L-S の猫の Whitehead の定義に依存していますので、射影空間を使うものに全面的に書き換えて、次を得ます。

命題 2.3 $\mathrm{cat}(X) \le m$ のとき、次の集合値の高次 Hopf 不変量が定義できます。

$$H_m : [\Sigma V, X] \to 2^{[\Sigma V, E^{m+1}(\Omega(X))]}$$

ただし、$E^{m+1}(\Omega(X))$ は $m{+}1$ 個の $\Omega(X)$ の join とホモトピー同値な空間です。

定理 2.4 多面体 X が $\mathrm{cat}(X) = m \ge 1$ かつ $(d{-}1)$ 連結 $(d \ge 2)$ で条件「$\mathrm{Dim}(X) \le d\,\mathrm{cat}(X){+}d{-}2$」を満たすとき $W = X \cup_\alpha D^{e+1}$ $(e \ge d)$ とします。

(1) 「$\mathrm{cat}(W) = \mathrm{cat}(X){+}1$」となるには「$H_m(\alpha) \not\ni 0$」が必要十分です。

(2) また $\mathrm{cat}(W) = \mathrm{cat}(X){+}1$ とするとき、「$n \ge 1$ に対して $\mathrm{cat}(W{\times}S^n) = \mathrm{cat}(W){+}1$」となるには「$\Sigma_*^n H_m(\alpha) \not\ni 0$」が必要十分です。

この結果から次の結果を得るのはむしろ簡単なことです。

定理 2.5 CW 複体の族 $\{Q(\ell);\, \ell{\ge}2 \text{ は素数}\}$ で次を満たすものが存在します。

$$\begin{cases} \mathrm{cat}(Q(2){\times}S^n) = \mathrm{cat}(Q(2)) & \text{for all } n \ge 1, \\ \mathrm{cat}(Q(\ell){\times}S^n) = \mathrm{cat}(Q(\ell)) & \text{for all } n \ge 2 \text{ and } \ell > 2. \end{cases}$$

略証: $\sigma_8 \in \pi_{15}(S^8)$ と $\eta_2 \in \pi_3(S^2)$ を Hopf 不変量 1 を与える元とすると、$H_1(\sigma_8) = 1 \in \pi_{15}(\Omega(S^8){*}\Omega(S^8)) \cong \mathbb{Z}$ と $H_1(\eta_2) = 1 \in \pi_3(\Omega(S^2){*}\Omega(S^2)) \cong \mathbb{Z}$ が成立します。

特に $[\iota_{15}, \iota_{15}] \in \pi_{29}(S^{15})$ は懸垂準同型 $E\colon \pi_{28}(S^{14}) \to \pi_{29}(S^{15})$ の像に含まれる自明でない元ですが、それ自体が Whitehead 積なので、懸垂は自明になるという事実に着目して $Q(2) = S^8 \cup_{\sigma_8\circ[\iota_{15},\iota_{15}]} e^{30}$ とおきます。同様に $\pi_{4\ell-3}(S^3) \cong \mathbb{Z}/\ell\{\alpha_1^2(3)\}$ の二重懸垂が自明になるという事実に着目して $Q(\ell) = S^2 \cup_{\eta_2\circ\alpha_1^2(3)} e^{4\ell-2}$ とおきます。

球面のホモトピー群についての Toda の結果を単純に当てはめるだけで $\mathrm{cat}(Q(2){\times}S^n) = \mathrm{cat}(Q(2)) = 2$ $(n \geq 1)$ と $\mathrm{cat}(Q(\ell){\times}S^n) = \mathrm{cat}(Q(\ell)) = 2$ $(n \geq 2)$ が成立が分かります。 終り.

しかし Ganea の予想が注目されたのは、多様体に対する興味からでしたので、この観点からこの結果は不十分なものと言わざるを得ません。

実はこの時点で Ganea の予想は成立しえないという強い予見を持ちましたので、上の複体から多様体を作ることを考えました。そこで $Q(\beta) = S^2 \cup_{\eta\beta} e^{q+1}$, $\beta \in \pi_q(S^3)$ とおくと、自然な写像 $Q(\beta) \to \mathbb{C}P^2$ が構成できます。

$$\begin{tikzcd}
Q(\beta) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}P^2 \arrow[d] \\
S^{q+1} \arrow[r, "\Sigma\beta"] & S^4
\end{tikzcd}$$

ここで以前に階数が 3 以下の一般 Whitehead 空間の分類を行ったとき、何故か $\mathbb{C}P^3 = S^7/U(1)$ が現れたことを思い出して 、次の図式を考えてみました：

$$\begin{tikzcd}
Q(\beta) \arrow[r, hook] \arrow[dr] & E(\beta) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}P^3 \arrow[d] & \mathbb{C}P^2 \arrow[l, hook'] \arrow[dl] \\
& S^{q+1} \arrow[r, "\Sigma\beta"] & S^4 &
\end{tikzcd}$$

ただし、$E(\beta)$ は $\mathbb{C}P^3$ の $\Sigma\beta$ による引き戻しです。詳細は省きますが、結果的にはこの $E(\beta)$ の中に Ganea 予想の多様体としての反例が見つかりました。

実は現在、この高次 Hopf 不変量を Ganea の cone 分解と結びつけて上から直接 L–S の猫を評価する不変量を構成しつつあります。

3　Toomer 型不変量

Rudyak や Strom の原典では、少し違った形で定義されていたのですが、Stasheff の射影空間を用いて次のような計算可能な不変量が与えられます。

定義 3.1　(1) h を乗法的なコホモロジー論とします。

i) $\mathrm{wgt}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, (e_m^X)_* : h^*(X) \to h^*(P^m(\Omega(X)))\ \text{は単射}\right\}$

ii) $\mathrm{Mwgt}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, \begin{array}{l} (e_m^X)_* : h^*(X) \to h^*(P^m(\Omega(X)))\ \text{は}\ h^*h\text{-} \\ \text{modules の間の split mono} \end{array}\right\}$

(2)　i) $\mathrm{wgt}(X) = \mathrm{Max}\left\{\mathrm{wgt}(X;h) \,|\, h\ \text{は乗法的コホモロジー}\right\}$

ii) $\mathrm{Mwgt}(X) = \mathrm{Max}\left\{\mathrm{Mwgt}(X;h) \,|\, h\ \text{は乗法的コホモロジー}\right\}$

ただし $\mathrm{wgt}(X;h)$ は、h が通常のコホモロジー $\tilde{H}^*$ の場合に、Rudyak と Strom によって独立に与えられたものです。また、結局 $\mathrm{Mwgt}(X,h)$ はこの二人の category weight に Steenrod 代数の作用を含めて考えたものといえるでしょう。さて、この定義から次は明らかです。

定理 3.2　$\mathrm{cup}(X;h) \leq \mathrm{wgt}(X;h) \leq \mathrm{Mwgt}(X;h) \leq \mathrm{cat}(X)$

むしろ Rudyak と Strom は Fadell–Husseini (1992) の与えた位相不変量 category weight をホモトピー不変量となるように再定義したものです。

定義 3.3 (Rudyak 1997, Strom 1998)　$u \in \tilde{h}^*(X)$ に対して

$$\mathrm{wgt}(u;h) = \mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, (e_m^X)_*(u) \neq 0\right\}\ (h\ \text{は乗法的コホモロジー})$$

これにより L–S の猫の下からの評価を計算する仕組みを与えたところに大きな意味があります。

定理 3.4 (Rudyak, Strom)　h を乗法的コホモロジーとします。

(1)　$\underline{uv \neq 0}$ in $h^*(X) \implies \mathrm{wgt}(u;h) + \mathrm{wgt}(v;h) \leq \mathrm{wgt}(uv;h)$

(2)　$\mathrm{wgt}(X;h) = \mathrm{Max}\{\mathrm{wgt}(u;h) \,|\, u \in \tilde{h}^*(X)\}$

この category weight を Spectral Sequence の観点から捉えてみましょう。

定義 3.5 $\{(E_r^{**}(X;h), d_r) \,|\, r \geq 1\}$ を単連結な多面体 X にホモトピー同値な $P^\infty(\Omega(X))$ の filtration $\{P^m(\Omega(X)) \,|\, m \geq 0\}$ に付随し、 $h^*(X)$ に収束する Rothenberg–Steenrod 型の spectral sequence とします。

このとき次が成立します。

定理 3.6 (G. W. Whitehead, Ginsburg, McCleary)

(1) $h^*(\Omega(X))$ が h^* 上 free ならば $E_2^{**}(X;h) \cong \mathrm{Cotor}^{*,*}_{h^*(\Omega X)}(h^*, h^*)$

(2) $d_r : E_r^{s,t}(X;h) \to E_r^{s+r,t-r+1}(X;h)$, $H(E_r^{*,*}(X;h), d_r) \cong E_{r+1}^{*,*}(X;h)$

(3) $E_\infty^{*,*}(X;h) \cong E_0 h^*(X)$, $E_\infty^{s,t}(X;h) \cong F_s h^{s+t}(X)/F_{s+1}h^{s+t}(X)$,
$F_m h^n(X) = \ker\left\{(e_m^X)_* : h^n(X) \to h^n(P^m(\Omega(X)))\right\}$

(4) (Whitehead) $r > \mathrm{cat}(X) \implies E_r^{s,t}(X;h) \cong E_\infty^{s,t}(X;h)$

(5) (Ginsburg) $s > \mathrm{cat}(X) \implies E_\infty^{s,t}(X;h) = 0$

注. 任意の $u \in h^*(X)$ に対し「$[u] \neq 0$ in $E_\infty^{s,*}(X;h) \implies \mathrm{wgt}(u;h) = s$」

例 3.7 (1) $\mathrm{wgt}(L^n(p)) = \mathrm{cat}(L^n(p)) = \mathrm{Dim}(L^n(p)) = 2n+1$ $(p > 1)$

(2) Symplectic 多様体 M に対し「$\pi_2(M){=}0 \implies \mathrm{wgt}(M) = \mathrm{cat}(M) = 2n$」

(3) $\mathrm{cup}(\mathrm{Sp}(2);\mathbb{Z}/2) = 2 < 3 = \mathrm{cup}(\mathrm{Sp}(2);\widetilde{KO}) = \mathrm{cat}(\mathrm{Sp}(2)) = \mathrm{Cat}(\mathrm{Sp}(2))$

(4) $\mathrm{wgt}(\mathrm{Sp}(2);\mathbb{Z}/2) = 2 < 3 = \mathrm{Mwgt}(\mathrm{Sp}(2);\mathbb{Z}/2) = \mathrm{cat}(\mathrm{Sp}(2))$

(5) $\mathrm{wgt}(\mathrm{Spin}(9);\mathbb{Z}/2) = 6 < 8 = \mathrm{Mwgt}(\mathrm{Spin}(9);\mathbb{Z}/2) = \mathrm{cat}(\mathrm{Spin}(9))$
$8 = \mathrm{cat}(\mathrm{Spin}(9)) \leq \mathrm{Cat}(\mathrm{Spin}(9)) \leq 9$ (Kono-I)

(1) の証明： $\Omega(L^n(p)) \simeq \mathbb{Z}/p \times \Omega(S^{2n+1})$ ですので、$P^1(\Omega(S^{2n+1})) = \Sigma(\Omega(S^{2n+1})) \simeq \Sigma\mathbb{Z}/p \vee (\text{higher cell in dim} \geq 2n+1)$ と表せます。 従って

$$H^*(P^1(\Omega(S^{2n+1}))) = 0, \text{ if } 1 < * < 2n+1$$

がわかります。 従って $y \in H^2(L^n(p);\mathbb{Z}/p)$ に対しては

$$y|_{P^1(\Omega(S^{2n+1}))} = 0, \quad \mathrm{wgt}(y) \geq 2$$

となります。同様に $\mathrm{wgt}(x) \geq 1$ となりますので、定理 3.4 から $\mathrm{wgt}(xy^n) \geq 1 + n \times 2 = 2n+1$ が得られます。従って

$$2n+1 \leq \mathrm{wgt}(xy^n) \leq \mathrm{wgt}(L^n(p)) \leq \mathrm{cat}(L^n(p)) \leq \mathrm{Dim}(L^n(p)) = 2n+1$$

が成立し、$\mathrm{cat}(L^n(p)) = 2n+1$ が得られます。

(5) の不等式が意味するのは、Spin(9) の L–S の猫の値が Cat(Spin(9)) により決定されたのでは無いことです。この決定には、少し前にでてきた Ganea の cone 分解と高次 Hopf 不変量を組み合わせることで、元々は Fox がその存在を証明していた categorical sequence を具体的に構成することで得られる不変量「categorical length」を本質的には使っています。

実は現在、この考え方を更に推し進めて、Steenrod 代数よりむしろ E_∞–ホモトピー代数に焦点をあて、その作用と可換になる準同型を捉えることでより強い不変量を構成する事を考えています。あわよくば、L–S の猫の値に一致するようなものが欲しいところですが、それはちょっと無理かもしれません。

その方法としては、$\Omega(X)$ の $\mathbb{Z}/p$–係数の鎖複体に E_∞–余代数の構造を入れ、$\Omega(X)$ の A_∞–構造を用いて E_∞–余代数の圏において射影空間のモデルを構成することで L–S の猫を特徴づけることを考えています。

このやり方で問題となるのは、A_∞–構造を与える準同型がそのままでは E_∞–余代数の構造とは可換にならないことです。実際、A_∞–構造を与える準同型は次数を変えてしまいますので、E_∞–余代数の写像にはなりません。

$$\mu_m : A \otimes \cdots (m\ \text{個}) \cdots \otimes A \to A, \quad \deg \mu_m = m-2$$

そこで考えているのは、A_∞–構造の定義を変更してうまく E_∞–余代数の圏に合わせることです。実はもう 1 点問題があって、それは基点をどのように考えるかです。ただし、E_∞–余代数の構造を忘れたときに、元の A_∞–構造と同値にならないとお話にならないことになります。

ですが、他にもっと良い方法があるかもしれません。とにかく、全然できていませんので、何かできそうでしたら私にも教えて下さると嬉しいです。

以上です。

岩瀬 則夫 （いわせ のりお）
九州大学大学院数理学研究院