微分空間の基礎

岩瀬 則夫

九州大学 数理学研究院

令和五年度 秋

内容

背　景

多様体 M は局所的に Euclid 空間 E と（微分）同相になっているものとして定義される：

$$h_\alpha : M \supset U_\alpha \xrightarrow{\text{微分同相}} V_\alpha \subset E, \quad \{U_\alpha\} \text{ は } M \text{ の開被覆で、} V_\alpha \text{ は } E \text{ の開集合}$$

その微分構造の実体は、滑らかな写像 $P_\alpha = h_\alpha^{-1} : V_\alpha \to M$ を通して各開集合 V_α 上にある。

K. T. Chen / J. M. Souriau はユークリッド空間の開集合からの写像をパラメータ付けと呼び、プロットと呼ぶ特別なパラメータ付けが多様体の微分構造を決定することを見い出した。

プロットとは多様体に微分構造を定める局所的な微分同相から「同相」を外した滑らかなパラメータ付けであり、彼らはこれを用いて非常に一般的な枠組みで微分構造を定式化した。

この微分構造を用いた微分ホモトピー論が如何に展開されるかを解説する。

その為には Euclid 空間内の開集合と滑らかな写像の圏に開被覆の族を付属させる必要がある。

背　景

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\text{Chen '73} \arrow[d, hook, shift right=2] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & & & \\
\text{Chen '75a} \arrow[u, two heads, shift right=2] \arrow[r, two heads, shift right=2] \arrow[r, phantom, "\top"] & \text{Chen '75b} \arrow[l, hook', shift right=2] \arrow[r, two heads, shift right=2] \arrow[r, phantom, "\top"] & \text{Smith '66} \arrow[l, hook', shift right=2] \arrow[r, hook, shift left=2] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[d, two heads] & \text{Sikorski '71} \arrow[l, two heads, shift left=2] \\
\text{Chen '77} \arrow[r, two heads] & \text{Souriau '80} \arrow[l, hook', shift right=3, "\sharp"'] \arrow[l, hook, shift left=3, "\flat"] \arrow[r, two heads, shift right=2] \arrow[r, phantom, "\top"] & \text{Frölicher '82} \arrow[l, hook', shift right=2] \arrow[u, hook, shift left=4] \arrow[u, hook', shift right=4] &
\end{tikzcd}
$$

(by A. Stacey)

準　備

圏と関手（集合の圏）

本稿では集合論の公理系としてクラスの概念を持つ NBG を採用する。始めに次の圏を考える。

例（集合の圏）. ❶（対象）:=（集合全体）⋯ クラス　❷（射）:=（写像全体）⋯ クラス

❸
1. （始終域）写像 $f : A \to B$ に対して、A を f の始域と呼び、B を f の終域と呼ぶ。
2. （恒等射）集合 A の恒等写像 $\mathbb{1}_A : A \to A$ を恒等射と呼ぶ。
3. （合成）二つの写像 f, g を取ると、f の終域と g の始域が一致するなら、f, g は合成可能で、合成写像 $g \circ f$ は f の始域から g の終域への射である。

$$g \circ f \ : \ A \xrightarrow{\ f\ } B \xrightarrow{\ g\ } C$$

記号 1.1.1. 圏 C の対象全体を $\mathrm{Obj}(\mathsf{C})$ または $\mathcal{O}_{\mathsf{C}}$、射全体を $\mathrm{Mor}(\mathsf{C})$ または $\mathcal{M}_{\mathsf{C}}$ で表す。また、射 f の始域を $\mathrm{S}_{\mathsf{C}}(f)$、終域を $\mathrm{T}_{\mathsf{C}}(f)$ で表し、対象 A の恒等射を $\mathrm{I}_{\mathsf{C}}(A)$ で表す。さらに、射 f, g の合成射を $C_{\mathsf{C}}(f, g) = g \circ f$ で表し、組 $(\mathrm{S}_{\mathsf{C}}, \mathrm{T}_{\mathsf{C}}, \mathrm{I}_{\mathsf{C}}, \mathrm{C}_{\mathsf{C}})$ を 圏 $\mathsf{C} = (\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathcal{M}_{\mathsf{C}})$ の構造 と呼ぶ。

用語. 圏 C の反対圏 $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} = (\mathcal{O}_{\mathsf{C}}, \mathcal{M}_{\mathsf{C}})$ を $S_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} = T_{\mathsf{C}}$, $T_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} = S_{\mathsf{C}}$, $\mathrm{C}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}(g, f) = \mathrm{C}_{\mathsf{C}}(f, g)$ で定める。

圏と関手（ユークリッド立方体圏）

集合 X に対して $X^{-1} = \emptyset$ と考える。$\mathbb{R}^n$, $n \geq -1$ と滑らかな写像からなる圏 $\underline{\mathbb{R}}$ を定める。

定義 1.1.2. ⓪ $\eta : \mathbb{R}^{-1} = \emptyset \to \{*\} = \mathbb{R}^0$：自明（かつ滑らか）な写像

① $\eta_i^{\pm} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \overset{\text{定義}}{\iff} \eta_i^{\pm}(t_1, \dots, t_n) = (t'_1, \dots, t'_{n+1}),\quad t'_\ell = \begin{cases} t_\ell, & \ell < i \\ \pm 1, & \ell = i \\ t_{\ell-1}, & \ell > i \end{cases}$ （複合同順）

② $\varepsilon_j : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n \overset{\text{定義}}{\iff} \varepsilon_j(t_1, \dots, t_{n+1}) = (t'_1, \dots, t'_n),\quad t'_\ell = \begin{cases} t_\ell, & \ell < j \\ t_{\ell+1}, & \ell \geq j \end{cases}$

$\{\mathbb{R}^n\}_{n \geq -1}$ を対象、$\eta, \eta_i^{\pm}, \varepsilon_j$ の合成で表せる C^∞ 写像全体を射とする圏を $\underline{\mathbb{R}}$ とする。

課題 1.1.3. 関係式 $\varepsilon_i \circ \eta_i^{\pm} = \mathbb{1}$ と $\varepsilon_j \circ \eta_i^{\pm} = \begin{cases} \eta_i^{\pm} \circ \varepsilon_{j-1}, & i < j \\ \eta_{i-1}^{\pm} \circ \varepsilon_j, & i > j \end{cases}$ （複合同順）を示せ。

課題 1.1.4. 関係式 $\eta_j^{\epsilon'} \circ \eta_i^{\epsilon} = \begin{cases} \eta_i^{\epsilon} \circ \eta_{j-1}^{\epsilon'} & i < j \\ \eta_{i+1}^{\epsilon} \circ \eta_j^{\epsilon'} & i \geq j \end{cases}$ （ϵ, ϵ' は $+$ または $-$）を示せ。

圏と関手（関手と自然変換）

定義 1.1.5. 圏 C，D に対して、次を満たす二つの対応 $\mathcal{F}_{\mathcal{O}} : \mathcal{O}_{\mathsf{C}} \to \mathcal{O}_{\mathsf{D}}$，$\mathcal{F}_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}_{\mathsf{C}} \to \mathcal{M}_{\mathsf{D}}$ の組 $(\mathcal{F}_{\mathcal{O}}, \mathcal{F}_{\mathcal{M}})$ を C から D への（共変）関手 と呼び、$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_{\mathcal{O}}, \mathcal{F}_{\mathcal{M}}) : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ で表す。

1. $\forall_{A\in\mathcal{O}_{\mathsf{C}}}\ \ \mathcal{F}_{\mathcal{M}}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_{\mathcal{F}_{\mathcal{O}}(A)}$
2. $\forall_{f\in\mathcal{M}_{\mathsf{C}}}\ \ f : A \to B \overset{\text{ならば}}{\Longrightarrow} \mathcal{F}_{\mathcal{M}}(f) : \mathcal{F}_{\mathcal{O}}(A) \to \mathcal{F}_{\mathcal{O}}(B)$
3. $\forall_{f,g\in\mathcal{M}_{\mathsf{C}}}\ \ f : A \to B \ \&\ g : B \to C \overset{\text{ならば}}{\Longrightarrow} \mathcal{F}_{\mathcal{M}}(g\circ f) = \mathcal{F}_{\mathcal{M}}(g)\circ\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(f)$

用語. $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}_{\mathsf{C}}$ と $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}_{\mathsf{C}}$ が圏 C の構造で圏 C′ をなすとき、C′ を C の部分圏と呼ぶ。

課題 1.1.6. 圏 D の部分圏 C に対して、包含 $\mathcal{O}_{\mathsf{C}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathsf{D}}$，$\mathcal{M}_{\mathsf{C}} \hookrightarrow \mathcal{M}_{\mathsf{D}}$ が関手を定めることを示せ。

定義 1.1.7. 関手 $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ に対して、写像 $\Phi : \mathcal{O}_{\mathsf{C}} \to \mathcal{M}_{\mathsf{D}}$ が $\mathcal{F}$ から $\mathcal{G}$ への 自然変換（$\Phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$）であるとは、次の二条件が成立することである。以下、$\Phi(A) = \Phi_A$ と表す。

1. $\forall_{A\in\mathcal{O}_{\mathsf{C}}}\ \ \Phi_A : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{G}(A)$
2. $\forall_{f\in\mathcal{M}_{\mathsf{C}}}\ \ f : A \to B \overset{\text{ならば}}{\Longrightarrow} \Phi_B\circ\mathcal{F}(f) = \mathcal{G}(f)\circ\Phi_A$

定義 1.1.8. 関手 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ の間の自然変換 $\Phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が 自然同値 であるとは、$\forall_{A\in\mathrm{Obj}(\mathsf{C})}$ $\Psi_A\circ\Phi_A = \mathbb{1}_{\mathcal{F}(A)}\ \&\ \Phi_A\circ\Psi_A = \mathbb{1}_{\mathcal{G}(A)}$ を満たす自然変換 $\Psi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ が存在することである。

圏と関手（図式と極限）

用語. 小圏から圏 C への関手を 圏 C の図式 と呼ぶ。

定義 1.1.9. ❶ 始対象を持たない小圏 $\mathbf{\Lambda}$ に始対象（0 とする）を付加した小圏を $\mathcal{F}\mathbf{\Lambda}$ とする。

❷ 終対象を持たない小圏 $\mathbf{\Lambda}$ に終対象（1 とする）を付加した小圏を $\mathcal{C}\mathbf{\Lambda}$ とする。

定義 1.1.10. 圏 C の図式 $\mathcal{J} : \mathbf{\Lambda} \to \mathsf{C}$ を拡張した図式 $\widehat{\mathcal{J}} : \mathcal{F}\mathbf{\Lambda} \to \mathsf{C}$ が次の性質を満たすとき、$\widehat{\mathcal{J}}(\emptyset)$ を $\mathcal{J}$ の極限 と呼び、$\lim \mathcal{J}$ あるいは $\displaystyle\lim_{\alpha\in\mathrm{Obj}(\mathbf{\Lambda})} \mathcal{J}(\alpha)$ などと表す。

❶ 図式 $\mathcal{J}$ を拡張した任意の図式 $\mathcal{H} : \mathcal{F}\mathbf{\Lambda} \to \mathsf{C}$ に対して、$h(\alpha) = \mathbb{1}$（$\forall_\alpha\ \alpha \neq 0$）を満たす自然変換 $h : \mathcal{H} \to \widehat{\mathcal{J}}$ がただ一つだけ存在する。

定義 1.1.11. 圏 C の図式 $\mathcal{J} : \mathbf{\Lambda} \to \mathsf{C}$ を拡張した図式 $\widehat{\mathcal{J}} : \mathcal{C}\mathbf{\Lambda} \to \mathsf{C}$ が次の性質を満たすとき、$\widehat{\mathcal{J}}(1)$ を $\mathcal{J}$ の余極限 と呼び、$\operatorname{colim} \mathcal{J}$ あるいは $\displaystyle\operatorname*{colim}_{\alpha\in\mathrm{Obj}(\mathbf{\Lambda})} \mathcal{J}(\alpha)$ などと表す。

❶ 図式 $\mathcal{J}$ を拡張した任意の図式 $\mathcal{K} : \mathcal{C}\mathbf{\Lambda} \to \mathsf{C}$ に対して、$k(\alpha) = \mathbb{1}$（$\forall_\alpha\ \alpha \neq 1$）を満たす自然変換 $k : \widehat{\mathcal{J}} \to \mathcal{K}$ がただ一つだけ存在する。

圏と関手（随伴）

例 1.1.12. 群の構造を忘れる忘却関手 $\mathcal{F}$: Group → Set と、集合から生成される自由群をとる生成関手 $\mathcal{G}$: Set → Group の関係を調べる：まず群 H と集合 A を任意に固定する。

1. 写像 $f : A \to \mathcal{F}(H)$ は H の群構造を使って準同型 $\hat{f} : \mathcal{G}(A) \to H$ に拡張できる。
2. 準同型 $\varphi : \mathcal{G}(A) \to H$ は生成元の集合 A での値で一意的に決定される。

これにより自然な全単射 $\mathcal{M}_{\mathsf{Set}}(A, \mathcal{F}(H)) \cong \mathcal{M}_{\mathsf{Group}}(\mathcal{G}(A), H)$ が定まる。

定義 1.1.13. 関手 $\mathcal{F}$: C → D, $\mathcal{G}$: D → C に次の自然な全単射が付随するとき、$\mathcal{F}$ を（$\mathcal{G}$ の）右随伴、また $\mathcal{G}$ を（$\mathcal{F}$ の）左随伴と呼ぶ。さらにこの関係を $\mathcal{G} \dashv \mathcal{F}$ で表す。

$$\mathcal{M}_{\mathsf{D}}(X, \mathcal{F}(Y)) \cong \mathcal{M}_{\mathsf{C}}(\mathcal{G}(X), Y)$$

定理 1.1.14. 左随伴関手は colim（順極限）を保ち、右随伴関手は lim（逆極限）を保つ。

記号. $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$ が常に $\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{G}(X)$ と $\mathcal{G}(f)|_{\mathcal{F}(X)} = \mathcal{F}(f)$ を満たすとき、$\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ と表す。

準　備（微分圏）

S 背　景

1 準　備　—　圏と関手, **微分圏**, 基本性質

2 基　礎　—　微分多様体, 基本群, ホモトピー

3 不変量　—　ホモロジー, 交代代数, de Rham 理論

4 完全性　—　M-V 完全列, 滑らかな複体, de Rham 再び

F 付　録

微分圏（C^r 構造）

任意次元の Euclid 空間の開集合とその間の C^r 写像全体のなす圏を Open_r とし、Euclid 空間の開集合 U の開被覆全体を $\mathrm{Cov}(U)$ で表す。以下、X, Y を集合、$f : X \to Y$ を写像とする。

反変関手 $\mathcal{W}_X$，$\mathcal{K}_X : \mathsf{Open}_r^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ を次で定める。ただし、$\varphi : V \to U$ は Open_r の射である。

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}_X(U) = \{ P : U \to X \}, && \mathcal{W}_X(\varphi) : \mathcal{W}_X(U) \ni P \mapsto P \circ \varphi \in \mathcal{W}_X(V) \\ &\mathcal{K}_X(U) = \{ P : U \to X \mid P \text{ は局所定値} \}, && \mathcal{K}_X(\varphi) : \mathcal{K}_X(U) \ni P \mapsto P \circ \varphi \in \mathcal{K}_X(V) \end{aligned}$$

ここで、すぐ分かるように $\mathcal{K}_X(U) \subset \mathcal{W}_X(U)$ であり、$\mathcal{K}_X(\varphi)$ は $\mathcal{W}_X(\varphi)$ の制限である。

さらに、写像 f から誘導される二つの自然変換（同じ記号を使う）を次で定める。

$$\begin{aligned} f_\sharp : \mathcal{W}_X \to \mathcal{W}_Y \quad &\Longleftrightarrow \quad f_\sharp(U) : \mathcal{W}_X(U) \ni P \mapsto f \circ P \in \mathcal{W}_Y(U) \\ f_\sharp : \mathcal{K}_X \to \mathcal{K}_Y \quad &\Longleftrightarrow \quad f_\sharp(U) : \mathcal{K}_X(U) \ni P \mapsto f \circ P \in \mathcal{K}_Y(U) \end{aligned}$$

ここで、紛れの無い場合に、$f_\sharp(U)$ の U を省いて $f_\sharp$ の形で表すことがあるかもしれない。

また、一般に $\mathcal{W}_X(U)$ の元 $P : U \to X$ を X 上の **パラメータ付け** と呼ぶ。

微分圏（C^r 構造）

任意次元の Euclid 空間の開集合とその間の C^r 写像全体のなす圏を Open_r とし、Euclid 空間の開集合 U の開被覆全体を $\mathrm{Cov}(U)$ で表す。以下、X, Y を集合、$f : X \to Y$ を写像とする。

定義 1.2.1. 集合 X と次の三条件を満たす組 $(X, \mathcal{D}_X)$ を C^r 空間（$r=\infty$ なら“微分空間”、$r=0$ なら“連続空間”）と呼び、$\mathcal{D}_X(U)$ の要素を（X の）プロット と呼ぶ。

1. $\mathcal{D}_X : \mathsf{Open}_r^{op} \to \mathsf{Set}$ は反変関手である。
2. $\mathcal{K}_X \subset \mathcal{D}_X \subset \mathcal{W}_X$
3. 任意の $U \in \mathrm{Obj}(\mathsf{Open}_r)$ と $P \in \mathcal{W}_X(U)$ に対して、次の《局所性》が成立する。

$$P \in \mathcal{D}_X(U) \overset{\text{同値}}{\iff} \exists_{\{U_\alpha\} \in \mathrm{Cov}(U)}\ \forall_\alpha\ P|_{U_\alpha} \in \mathcal{D}_X(U_\alpha)$$

定義 1.2.2. 写像 f が任意の $U \in \mathrm{Obj}(\mathsf{Open}_r)$ に対して $f_\sharp(\mathcal{D}_X(U)) \subset \mathcal{D}_Y(U)$（$f_\sharp : \mathcal{W}_X \to \mathcal{W}_Y$）を満たすとき、$f$ を C^r（$r=\infty$ なら“なめらか”、$r=0$ なら“連続”）であるという。

定義 1.2.3.（I-Zemmour）C^r 空間 $X = (X, \mathcal{D}_X)$ には位相空間 $\mathcal{T}^r(X) = (X, \mathcal{O}^r_X)$ が付随する。

ただし、任意の $A \subset X$ に対して、$A \in \mathcal{O}^r_X \overset{\text{同値}}{\iff} \forall_{U \in \mathrm{Obj}(\mathsf{Open}_r)}\ \forall_{P \in \mathcal{D}_X(U)}\ P^{-1}(A)$ は U の開集合

微分圏（引き戻しと押し出し）

さて、集合 X, Y の間の一意な関係 $f: X \rightsquigarrow Y$ が与えられているとする。

定義 1.2.4. ❶ $(Y, \mathcal{D}_Y)$ が C^r 空間のとき、次の $f^*\mathcal{D}_Y$ を関係 f による引き戻しと呼ぶ：

$$\forall_{U \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Open}_r)} \forall_{P \in \mathcal{W}_X(U)}\ P \in (f^*\mathcal{D}_Y)(U) \overset{\text{同値}}{\iff} \exists_{\{U_\alpha\} \in \mathrm{Cov}(U)}\ \forall_\alpha \begin{cases} P|_{U_\alpha} = \mathrm{const.}\ \text{または} \\ f \circ P|_{U_\alpha} \in \mathcal{D}_Y(U) \end{cases}$$

❷ $(X, \mathcal{D}_X)$ が C^r 空間のとき、次の $f_*\mathcal{D}_X$ を関係 f による押し出しと呼ぶ：

$$\forall_{U \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Open}_r)} \forall_{Q \in \mathcal{W}_Y(U)}\ Q \in (f_*\mathcal{D}_X)(U) \overset{\text{同値}}{\iff} \exists_{\{U_\alpha\} \in \mathrm{Cov}(U)}\ \forall_\alpha \begin{cases} Q|_{U_\alpha} = \mathrm{const.}\ \text{または} \\ \exists_{P_\alpha \in \mathcal{D}_X(U_\alpha)}\ Q|_{U_\alpha} = f \circ P_\alpha \end{cases}$$

課題 1.2.5. $f: X \to Y$ が写像で $(Y, \mathcal{D}_Y)$ が C^r 空間のとき、次を示せ。

$$\forall_{U \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Open}_r)} \forall_{P \in \mathcal{W}_X(U)}\ P \in (f^*\mathcal{D}_Y)(U) \overset{\text{同値}}{\iff} f \circ P \in \mathcal{D}_Y(U)$$

注. f が写像であるならば、上記のいずれの構成でも、f は C^r 写像である。また、C^r 空間の部分集合には引き戻しで部分 C^r 構造が、商集合には押し出しで商 C^r 構造が入る。

微分圏（入射と潜射）

$X = (X, \mathcal{D}_X)$, $Y = (Y, \mathcal{D}_Y)$ を C^r 空間、$f : X \to Y$ を C^r 写像（$f_\sharp \mathcal{D}_X \subset \mathcal{D}_Y$）とする。

定義 1.2.6. ① f は引き戻し $\overset{\text{とは}}{\iff}$ $\mathcal{D}_X = f^* \mathcal{D}_Y$ ② f は押し出し $\overset{\text{とは}}{\iff}$ $f_* \mathcal{D}_X = \mathcal{D}_Y$

③ f は入射（induction）$\overset{\text{とは}}{\iff}$ f は単射かつ引き戻し

④ f は潜射（subduction）$\overset{\text{とは}}{\iff}$ f は全射かつ押し出し

用語. ① f は位相的埋込 $\overset{\text{とは}}{\iff}$ f は単射で、$\mathcal{T}^r(X)$ は $\mathcal{T}^r(Y)$ の部分位相空間

② f は位相的等化 $\overset{\text{とは}}{\iff}$ f は全射で、$\mathcal{T}^r(Y)$ は $\mathcal{T}^r(X)$ の f による等化位相空間と同相

定義 1.2.7. ① f が埋込である $\overset{\text{とは}}{\iff}$ f は引き戻しで、かつ位相的埋込である

② f が等化である $\overset{\text{とは}}{\iff}$ f は押し出しで、かつ位相的等化である

課題 1.2.8. 次を示しなさい。

① f は埋込 $\overset{\text{ならば}}{\Longrightarrow}$ f は入射（induction）② f は等化 $\overset{\text{同値}}{\iff}$ f は潜射（subduction）

微分圏（普遍性）

集合 Z, X, Y, W の間の集合論的な写像 $g : Z \to X$, $f : X \to Y$, $h : Y \to W$ を考える。

補題 1.2.9. ❶ $(Y, \mathcal{D}_Y)$, $(Z, \mathcal{D}_Z)$ が C^r 空間のとき、$(X, f^*\mathcal{D}_Y)$ に対して次は同値である。

❶ $f \circ g$ は C^r 写像である。 ❷ g は C^r 写像である。

❷ $(X, \mathcal{D}_X)$, $(W, \mathcal{D}_W)$ が C^r 空間のとき、$(Y, f_*\mathcal{D}_X)$ に対して次は同値である。

❶ $h \circ f$ は C^r 写像である。 ❷ h は C^r 写像である。

定理 1.2.10. ❶ f を C^r 写像 $f : (X, f^*\mathcal{D}_Y) \to (Y, \mathcal{D}_Y)$ とみなすとき、$\phi : (Z, \mathcal{D}_Z) \to (Y, \mathcal{D}_Y)$ が C^r 空間の間の C^r 写像でありかつ集合論的な写像として適当な $g : Z \to X$ により合成写像 $f \circ g$ の形に表せるならば、$g : (Z, \mathcal{D}_Z) \to (X, f^*\mathcal{D}_Y)$ は C^r 写像である。

❷ f を C^r 写像 $f : (X, \mathcal{D}_X) \to (Y, f_*\mathcal{D}_X)$ とみなすとき、$\phi : (X, \mathcal{D}_X) \to (W, \mathcal{D}_W)$ が C^r 空間の間の C^r 写像でありかつ集合論的な写像として適当な $g : Y \to Z$ により合成写像 $g \circ f$ の形に表せるならば、$g : (Y, f_*\mathcal{D}_X) \to (Z, \mathcal{D}_Z)$ は C^r 写像である。

準　備（基本性質）

S 背　景

1 準　備　—　圏と関手, 微分圏, 基本性質

2 基　礎　—　微分多様体, 基本群, ホモトピー

3 不変量　—　ホモロジー, 交代代数, de Rham 理論

4 完全性　—　M-V 完全列, 滑らかな複体, de Rham 再び

F 付　録

基本性質（直積、直和と写像空間）

定義 1.3.1. C^r 空間族 $\{(X_\alpha,\mathcal{D}_\alpha)\}$ の C^r 直積空間 $\prod_\alpha X_\alpha$ の C^r 構造 $\mathcal{D}$：

$$P\in\mathcal{D}(U) \overset{\text{定義}}{\iff} \forall_\alpha\ \exists_{P_\alpha\in\mathcal{D}_\alpha(U)}\ \mathrm{pr}_\alpha\circ P=P_\alpha : U\to X_\alpha$$

定義 1.3.2. C^r 空間族 $\{(X_\alpha,\mathcal{D}_\alpha)\}$ の C^r 直和空間 $\coprod_\alpha X_\alpha$ の C^r 構造 $\mathcal{D}$：

$$P\in\mathcal{D}(U) \overset{\text{定義}}{\iff} \exists_{\{U_\beta\}\in\mathrm{Cov}(U)}\ \exists_{\{P_{\alpha,\beta}\in\mathcal{D}_\alpha(U_\beta)\}}\ P|_{U_\beta}=\mathrm{in}_\alpha\circ P_{\alpha,\beta}$$

注. $\{X_\alpha=(X_\alpha,\mathcal{D}_\alpha)\}$ を C^r 空間族とする。

1. $\lim\limits_\alpha X_\alpha$ は C^r 直積空間 $\prod_\alpha X_\alpha$ の引き戻しによる部分 C^r 構造由来の普遍性をもつ。
2. $\operatorname*{colim}\limits_\alpha X_\alpha$ は C^r 直和空間 $\coprod_\alpha X_\alpha$ の押し出しによる商 C^r 構造由来の普遍性をもつ。

定義 1.3.3. C^r 空間 $X=(X,\mathcal{D}_X)$, $Y=(Y,\mathcal{D}_Y)$ に対して、$M:=C^r(X,Y)$ の C^r 構造 $\mathcal{D}_M$：

$$P\in\mathcal{D}_M(U) \overset{\text{定義}}{\iff} \left\{\begin{array}{c}(P\text{ の随伴写像を }\mathrm{ad}\,P : U\times X\to Y\text{ とすると})\\ \forall_{Q\in\mathcal{D}_X(V)}\ (\mathrm{ad}\,P)\circ(\mathbb{1}\times Q)\in\mathcal{D}_Y(U\times V)\end{array}\right\},\quad U\in\mathrm{Obj}(\mathsf{Open}_r)$$

基本性質（双対性 I）

定理 1.3.4. $Z = (Z, \mathcal{D}_Z)$ を C^r 空間とする。f が押し出しならば、次の ϕ は引き戻しである。

$$\phi = f^* : C^r(Y, Z) \to C^r(X, Z) \overset{\text{定義}}{\iff} \phi(g) = g \circ f$$

特に f が潜射（subduction）ならば ϕ は入射（induction）である。

証明: $M = C^r(Y, Z)$, $N = C^r(X, Z)$ と置く。定義から $\mathcal{D}_M$, $\phi^*\mathcal{D}_N$ は次を満たす：

$$P \in \mathcal{D}_M \overset{\text{同値}}{\iff} \forall_{Q \in \mathcal{D}_Y(V)} \ \mathrm{ad}\, P \circ (\mathbb{1} \times Q) \in \mathcal{D}_Z(U \times V)$$

$$P \in \phi^*\mathcal{D}_N \overset{\text{同値}}{\iff} \phi \circ P \in \mathcal{D}_N \overset{\text{同値}}{\iff} \forall_{Q \in \mathcal{D}_X(V)} \ \mathrm{ad}\, P \circ (\mathbb{1} \times (f \circ Q)) \in \mathcal{D}_Z(U \times V)$$

まず f が C^r 写像より上の第二式にある $f \circ Q$ は $\mathcal{D}_Y(V)$ に属し、$\mathcal{D}_M \subset \phi^*\mathcal{D}_N$ が分かる。逆に $P \in \phi^*\mathcal{D}_N(U)$（$\phi \circ P \in \mathcal{D}_N(U)$）とする。任意の $Q \in \mathcal{D}_X(V)$ に対して V の開被覆 $\{V_\alpha\}$ で $Q|_{V_\alpha}$ が const. でなければ、式 $Q|_{V_\alpha} = f \circ Q_\alpha$ を満たす X 上のプロット $Q_\alpha : V_\alpha \to X$ がとれ、

$$\mathrm{ad}\,(\phi \circ P) \circ (\mathbb{1} \times Q)|_{U \times V_\alpha} = \begin{cases} \text{const. または} \\ \mathrm{ad}\, P \circ (\mathbb{1} \times (f \circ Q_\alpha)) \end{cases}$$

は Z 上のプロットであり、$\{U \times V_\alpha\}$ は $U \times V$ の開被覆なので $\mathrm{ad}\,(\phi \circ P) \circ (\mathbb{1} \times Q)$ も Z 上のプロットである。したがって $P \in \mathcal{D}_M$ なので $\phi^*\mathcal{D}_N \subset \mathcal{D}_M$ より $\phi^*\mathcal{D}_N = \mathcal{D}_M$ を得る。 □

基本性質（デカルト閉圏）

定義 1.3.5. C^r 空間の間の C^r 写像が C^r 同相 である $\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ 逆写像が C^r 写像として存在する。

定理 1.3.6. C^r 空間 X, Y, Z に対して、次は C^r 同相である。

$$\Phi : C^r(Z \times X, Y) \approx C^r(Z, C^r(X, Y))$$

ただし、Φ は $(\Phi(f)(z))(x) = f(z, x)$（$(z, x) \in Z \times X$）で与えられる。

課題 1.3.7. 定理 1.3.6 に証明を与えよ。

注. 定理 1.3.6 の C^r 同相は自然変換を与える。また上の様な自然同型（指数法則と呼ぶ）が存在する圏は デカルト閉圏 と呼ばれる。次が成立する。

用語. C^r 空間と C^r 写像のなす圏を C^r-Class で表す。$r = 0$ ならば連続圏と呼び Cont で表す。

定理 1.3.8. 圏 C^r-Class は完備（lim で閉）かつ余完備（colim で閉）なデカルト閉圏である。

注. 微分多様体の圏や位相空間の圏では上記の性質の成立は期待できない。

基本性質（双対性 II）

定理 1.3.9. $\{(X_\alpha, \mathcal{D}_\alpha)\}$ を C^r 空間族とすると、任意の C^r 空間 Y に対して次が成立する。

$$\mathcal{M}_{C^r\text{-Class}}(\textstyle\coprod_\alpha X_\alpha, Y) \cong \prod_\beta \mathcal{M}_{C^r\text{-Class}}(X_\beta, Y)$$

証明: $\Phi : \mathcal{M}_{C^r\text{-Class}}(\coprod_\alpha X_\alpha, Y) \to \prod_\beta \mathcal{M}_{C^r\text{-Class}}(X_\beta, Y)$ を次の Φ_β で定まる C^r 写像とする：

$$\Phi_\beta : \mathcal{M}_{C^r\text{-Class}}(\textstyle\coprod_\alpha X_\alpha, Y) \to \mathcal{M}_{C^r\text{-Class}}(X_\beta, Y) \overset{\text{同値}}{\iff} \Phi_\beta(f) = f|_{X_\beta}$$

さらに $\Psi : \prod_\beta \mathcal{M}_{C^r\text{-Class}}(X_\beta, Y) \to \mathcal{M}_{C^r\text{-Class}}(\coprod_\alpha X_\alpha, Y)$ を次の C^r 写像の随伴写像とする：

$$\mathrm{ad}\,\Psi : \textstyle\coprod_\alpha X_\alpha \times \prod_\beta \mathcal{M}_{C^r\text{-Class}}(X_\beta, Y) \to Y \overset{\text{同値}}{\iff} \mathrm{ad}\,\Psi|_{X_\alpha \times \prod_\beta \mathcal{M}_{C^r\text{-Class}}(X_\beta, Y)}(\mathbb{x}_\alpha, \{f_\beta\}) = f_\alpha(\mathbb{x}_\alpha)$$

上記の Φ と Ψ が互いに逆写像となるから、共に C^r 同相である。 $\square$

極限との関係では、より一般に次が成立する。

課題 1.3.10. C^r 空間の図式 $\mathcal{J} : \mathbf{\Lambda} \to C^r\text{-Class}$ と C^r 空間 Y に対して次を証明しなさい。

$$\mathcal{M}_{C^r\text{-Class}}(\operatorname*{colim}_{\alpha \in \mathrm{Obj}(\mathbf{\Lambda})} X_\alpha, Y) \cong \lim_{\alpha \in \mathrm{Obj}(\mathbf{\Lambda})} \mathcal{M}_{C^r\text{-Class}}(X_\alpha, Y) \qquad \text{（ただし } X_\alpha = \mathcal{J}(\alpha) \text{ である）}$$

基本性質（連続と位相）

位相空間と連続写像のなす圏を Top で表す。以下の記法は主として島川らに従っている。

C^r 空間 $X=(X,\mathcal{D})$ に対して $\mathcal{O}^r_X=\{A\subset X \mid \forall_{P\in\mathcal{D}(U)}\ P^{-1}(A)$ は U の開集合$\}$ とすると、$\mathcal{T}^r(X):=(X,\mathcal{O}^r_X)$ は位相空間となり、これにより関手 $\mathcal{T}^r: C^r\text{-Class}\to \mathsf{Top}$ が定まる。

位相空間 $(Y,\mathcal{O})$ と開集合 $U\subset\mathbb{E}$ に対して $\mathcal{D}^r_Y(U)$ を U から Y への連続写像全体とすると、$\mathcal{D}^r(Y):=(Y,\mathcal{D}^r_Y)$ は C^r 空間となり、これにより関手 $\mathcal{D}^r:\mathsf{Top}\to C^r\text{-Class}$ が定まる。

定理 1.3.11. (P. I-Zemmour, K. Shimakawa et al, N. Izumida) $\mathcal{T}^r$ は $\mathcal{D}^r$ に左随伴する。

証明: C^r 空間 $X=(X,\mathcal{D})$ と位相空間 $Y=(Y,\mathcal{O})$ に対して、$f:X\to\mathcal{D}^r(Y)=(Y,\mathcal{D}^r_Y)$ が C^r $\overset{\text{同値}}{\iff}$ $\forall_{P\in\mathcal{D}(U)}\ f\circ P\in\mathcal{D}^r_Y(U)$ $\overset{\text{同値}}{\iff}$ $\forall_{P\in\mathcal{D}(U)}\ \forall_{A\in\mathcal{O}}\ (f\circ P)^{-1}(A)=P^{-1}(f^{-1}(A))$ is open in U $\overset{\text{同値}}{\iff}$ $\forall_{A\in\mathcal{O}}\ f^{-1}(A)\in\mathcal{O}^r_X$ $\overset{\text{同値}}{\iff}$ $f:\mathcal{T}^r(X)=(X,\mathcal{O}^r_X)\to Y$ が連続 $\cdots$ となる。 $\square$

注. (K. Shimakawa さんのグループ) 関手 $\mathcal{T}^\infty\circ\mathcal{D}^\infty:\mathsf{Top}\to\mathsf{Top}$ の像となる位相空間全体のなす圏 NGTop は（圏 Cont の充満部分圏として）完備かつ余完備なデカルト閉圏となる。

基　礎（微分多様体）

微分多様体

以後 $r=\infty$ とし、『C^∞』と『微分』を区別しないで用いる。また圏 C^∞-Class を 微分圏 と呼び、あるいは Diffeology と表すことがある。同様に C^∞ 写像を 滑らかな写像 と呼ぶことがある。

$\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$、$\mathbb{R}^d = (\mathbb{R})^d$（$d \geq 0$)、$\mathbb{R}^d_+ = (\mathbb{R}_+)^d$（$d \geq 0$)、$\mathbb{H}^d = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d-1}$（$d \geq 1$）とおく。

定義 2.1.1. $\mathbb{R}^d$（$d \geq 0$）の開集合と微分同相な開集合による被覆をもつ微分空間を（微分）多様体 と呼ぶ。

定義 2.1.2. $\mathbb{H}^d$（$d \geq 1$）の開集合と微分同相な開集合による被覆をもつ微分空間を 境界付き微分多様体 と呼ぶ。微分多様体に微分同相なものを除く場合が多い。

定義 2.1.3. $\mathbb{R}^d_+$（$d \geq 1$）の開集合と微分同相な開集合による被覆をもつ微分空間を 角付き微分多様体 と呼ぶ。（境界付き）微分多様体に微分同相なものを除く場合が多い。

用語. 閉曲面など、コンパクトかつ境界のない微分多様体を（微分）閉多様体と呼ぶ。

例 2.1.4. 円板は境界つき微分多様体であり、（超）立方体や単体は角つき微分多様体である。

微分多様体（生成族）

定義 2.1.5. 微分空間 X への写像の族 $\mathcal{F}=\{f_\alpha : F_\alpha \to X\}_{\alpha\in\Lambda}$ から決まる写像

$$f : \textstyle\coprod_\alpha F_\alpha \to X \overset{\text{定義}}{\iff} f|_{F_\alpha}=f_\alpha : F_\alpha \to X$$

が潜射であるとき、$\mathcal{F}$ を微分構造の 生成族（generating family）と呼ぶ。

課題 2.1.6. 微分空間 X に対して、X 上のプロット全体は生成族を与えることを示せ。

記号 2.1.7. C-Open を $\mathbb{R}^d_+$ の開集合全体を対象とする（微分圏の）充満部分圏とする。

用語 2.1.8. X を微分空間、$\mathcal{F}=\{f_\alpha : F_\alpha \to X\}_{\alpha\in\Lambda}$ を X の生成族とする。

1. $\mathcal{F}$ はユークリッド的 $\overset{\text{とは}}{\iff}$ $\forall_\alpha\ F_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathsf{Open}}$
2. $\mathcal{F}$ は角付きユークリッド的 $\overset{\text{とは}}{\iff}$ $\forall_\alpha\ F_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathsf{C\text{-}Open}}$

課題 2.1.9. 微分多様体、境界付き微分多様体、角付き微分多様体のすべてがその微分構造に角付きユークリッド的な生成族をもつことを示せ。

微分多様体（次元）

定義 2.1.10. 微分空間 X の生成族 $\mathcal{F} = \{ f_\alpha : F_\alpha \to X \}_{\alpha\in\Lambda}$ が角付きユークリッド的のとき $\text{w-dim}\,\mathcal{F} = \sup\{ \dim F_\alpha \mid \alpha \in \Lambda \}$ とし、そうでないとき $\text{w-dim}\,\mathcal{F} = \infty$ とする。

注. I-Zemmour の本の定義では、微分空間 X の生成族 $\mathcal{F} = \{ f_\alpha : F_\alpha \to X \}_{\alpha\in\Lambda}$ がユークリッド的のとき $\dim \mathcal{F} = \sup\{ \dim F_\alpha \mid \alpha \in \Lambda \}$ とし、そうでないとき $\dim \mathcal{F} = \infty$ としている。

課題 2.1.11. ユークリッド的生成族について、上の二つの次元の定義が一致することを示せ。

定義 2.1.12. 微分空間 X に対して、次の様に次元を定める。

1. $\dim X = \inf\{ \dim \mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ は X のユークリッド的生成族$\}$ とする。
2. $\text{w-dim}\,X = \inf\{ \text{w-dim}\,\mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ は X の角付きユークリッド的生成族$\}$ とする。

課題 2.1.13. M を境界なしや境界付きの場合も含めた意味の角付き微分多様体とする。このとき、$\text{w-dim}\,M$ が M の位相的な次元と一致することを示せ。

注. I-Zemmour の次元の定義に従うと、境界付き多様体 M については $\dim M = \infty$ となる。

微分多様体（reflexivity）

$X=(X,\mathcal{D})$ を微分空間とし、$\mathcal{K}^*_X$ を X 上の局所定値な実関数全体、$\mathcal{W}^*_X=\mathcal{M}_{\mathsf{Set}}(X,\mathbb{R})$ とする。

$\mathcal{F}=C^\infty(X,\mathbb{R})$ と定めると $\mathcal{F}\subset\mathcal{W}^*_X$ であり、さらに以下の三条件が成立する。[i]：

1. $\mathcal{K}^*_X\subset\mathcal{F}\subset\mathcal{W}^*_X$ である。
2. $f_1,\dots,f_k\in\mathcal{F},\ \ \varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}) \overset{\text{ならば}}{\Longrightarrow} \varphi\circ(f_1\times\cdots\times f_k)\in\mathcal{F}$
3. $f\in\mathcal{W}^*_X$ であって、条件「$f|_U=g|_U$ かつ $x\in U$」を満たす開集合 $U\subset\mathcal{T}^\infty(X)$ と $g\in\mathcal{F}$ の組 (U,g) の存在が任意の $x\in X$ に対して保証されるならば、$f\in\mathcal{F}$ である。

定義 2.1.14. 次の条件を満たす C^∞ 空間 $(X,\mathcal{D})$ を reflexive であると言う。

$$P\in\mathcal{D}(U) \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \forall_{f\in C^\infty(X,\mathbb{R})}\ f\circ P\in C^\infty(U,\mathbb{R})\ (C^\infty\text{ 関数全体})$$

課題 2.1.15.（境界付き／角付き）多様体が reflexive であることを示せ。

---

i) $\mathcal{W}^*_X$ の部分集合 $\mathcal{F}$ が①〜③を満たすとき、$(X,\mathcal{F})$ は Frölicher 空間と呼ばれる。

基　礎（基本群）

S 背　景

I 準　備　—　圏と関手, 微分圏, 基本性質

2 基　礎　—　微分多様体, **基本群**, ホモトピー

3 不変量　—　ホモロジー, 交代代数, de Rham 理論

4 完全性　—　M-V 完全列, 滑らかな複体, de Rham 再び

F 付　録

基本群

X を微分空間、$A, B \subset X$、$*$ を X の基点とする。

用語. $\mathbb{R}$ から X への滑らかな写像を路と呼ぶ。

定義 2.2.1.（I-Zemmour）X 上の路の全体を $\mathrm{Paths}\,(X) = C^\infty(\mathbb{R}, X)$ で表す。

定義 2.2.2.（I-Zemmour）

1. $\mathrm{Paths}\,(X; A, B) = \{\, u \in \mathrm{Paths}\,(X) \mid u(0) \in A, u(1) \in B \,\}$
2. $\mathrm{Loops}\,(X, A) = \mathrm{Paths}\,(X; A, \{*\})$
3. $\mathrm{Loops}\,(X) = \mathrm{Loops}\,(X, \{*\})$（以後 $\{*\}$ を $*$ で表す）

ところが上記の定義だと路の結合に不都合が生じる。その為 I-Zemmour の教科書では『適宜』結合ができるように路を変形する…。ここでは路を変形しないよう、次の概念を導入する。

用語. $u(t) = a,\ t \le 0$ と $u(t) = b,\ t \ge 1$ を満たす路 u を a から b への路と呼び、$\upsilon(t) = a$, $t < \epsilon$ と $\upsilon(t) = b,\ t > 1-\epsilon$（$\exists_{\epsilon>0}$）を満たす路 υ を a から b への安定路（I-Zemmour）と呼ぶ。

定義 2.2.3. X 上の a から b への路の全体を $\mathcal{P}(X; a, b)$ で表し、$\mathcal{P}(X) = \bigcup_{a,b\in X} \mathcal{P}(X; a, b)$ に $\mathrm{Paths}\,(X)$ の部分微分空間としての（引き戻しによる）微分構造を導入する。

基本群

X を微分空間、$A, B \subset X$、$*$ を X の基点とする。以下、ϖ_0 や $\mathbb{I}_0$ は固有名詞である。

定義 2.2.4. 連続写像 $\varpi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\varpi_0(t) = \max\{0, \min\{t, 1\}\} \in [0,1]$ により定め、その商微分空間を $\mathbb{I}_0 = \mathbb{R}/\varpi_0$ と置くと、射影 $\pi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{I}_0$（$\pi_0(t) = [\varpi_0(t)]$）は潜射である。

定理 2.2.5. $\dim \mathbb{I}_0 = 1$ かつ $\mathcal{T}^\infty(\mathbb{I}_0) = [0,1]$ で、自然な微分同相 $\mathcal{P}(X) \cong C^\infty(\mathbb{I}_0, X)$ が従う。

滑らかな写像 $p_t : \mathcal{P}(X) \to X, t \in \{0, 1\}$ を $p_t(u) = u(t)$ により定める。

定義 2.2.6. ❶ $\mathcal{P}(X; A, B) = p_0^{-1}(A) \cap p_1^{-1}(B)$ ❷ $\mathcal{L}(X, A) = \mathcal{P}(X; A, *)$ ❸ $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X; *)$

定義 2.2.7. $f, g \in C^\infty(X, Y)$ が（滑らかに）ホモトピック $\overset{\text{同値}}{\iff}$ f から g への路がある。

注. 微分圏で（滑らかな意味での）ホモトピー同値、可縮、変位レトラクトなどが定義される。

定理 2.2.8. $\mathcal{P}(X; A, B)$ は $\mathrm{Paths}(X; A, B)$ の変位レトラクトである。特に $\mathcal{L}(X, A)$ は $\mathrm{Loops}(X, A)$ の変位レトラクトで、$\mathcal{L}(X)$ は $\mathrm{Loops}(X)$ の変位レトラクトである。

基本群

X を微分空間、$a, b, c \in X$ を任意の三点とし、また正数 $\varepsilon > 0$ を固定する。

定義 2.2.9. $(f, g) \in \mathcal{P}(X) \times_X \mathcal{P}(X)$（$f(1) = g(0)$）に対して次のように結合を定める：

$$\mu(f,g)(t) = \begin{cases} f(2t), & t \le 1/2 \\ g(2t-1), & t \ge 1/2 \end{cases} \qquad \mu_\varepsilon(f,g)(t) = \begin{cases} f(\frac{2t}{1-\varepsilon}), & t < {}^{1+\varepsilon}/_2 \\ g(\frac{2t-1-\varepsilon}{1-\varepsilon}), & t \ge {}^{1-\varepsilon}/_2 \end{cases}$$

課題 2.2.10. $\mu_\varepsilon : \mathcal{P}(X) \times_X \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ はうまく定義された C^∞ 写像であることを示せ。

補題 2.2.11. X が reflexive ならば $\mu : \mathcal{P}(X) \times_X \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ はうまく定義されている。

略証: まず $\phi : X \to \mathbb{R}$ を任意に与えられた滑らかな関数とすると、$\phi \circ \mu(f, g) = \mu(\phi \circ f, \phi \circ g)$ である。そこで $b = f(1) = g(0)$，$\hat{f}(t) := \phi \circ f \circ h(t)$, $h(t) = (2t)$，$\check{g}(t) := \phi \circ g \circ k(t)$, $k(t) = 2t - 1$ と置くと、$\phi \circ \mu(f, g)(t) = \hat{f}(t) + \check{g}(t) - \phi(b)$ であり、$\hat{f}, \check{g}$ は明らかに滑らかなので、$\phi \circ \mu(f, g)$ も滑らかであり、ϕ は任意なので $\mu(f, g)$ 自体が滑らかである。 □

基本群

X を微分空間、a, b, $c \in X$ を任意の三点とし、また正数 $\varepsilon > 0$ を固定する。

課題 2.2.12. $(\mu_\varepsilon \times \mathbb{1})\circ\mu_\varepsilon \sim (\mathbb{1} \times \mu_\varepsilon)\circ\mu_\varepsilon$（滑らかにホモトピック）である。

定理 2.2.13. X が reflexive ならば $\mu : \mathcal{P}(X) \times_X \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ は C^∞ 写像となる。

略証: μ の随伴 $\mathrm{ad}\,\mu : \mathcal{P}(X) \times_X \mathcal{P}(X) \times \mathbb{I}_0 \to X$ が滑らかであることを示す：任意の滑らかな写像 $P : U \to \mathcal{P}(X) \times_X \mathcal{P}(X)$, $\phi : X \to \mathbb{R}$ に対して、$\phi\circ \mathrm{ad}\,\mu\circ(P \times \mathbb{1})(\mathbb{x}; t) = \mathrm{ad}\,\mu\circ(\phi \times \phi)\circ P(\mathbb{x}); t)$ なので、$b : \mathcal{P}(X) \times_X \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ を $b(f, g) = f(1) = g(0)$ と定め、$\hat{P}(\mathbb{x}, t) = \phi(P_1(\mathbb{x})(h(t)))$, $\check{P}(\mathbb{x}, t) = \phi(P_2(\mathbb{x})(k(t)))$, $P(\mathbb{x}) = (P_1(\mathbb{x}), P_2(\mathbb{x}))$ と置くと、次が成立する。

$$\phi\circ \mathrm{ad}\,\mu\circ(P \times \mathbb{1})(\mathbb{x}; t) = \hat{P}(\mathbb{x}; t) + \check{P}(\mathbb{x}; t) - \phi\circ b\circ P(\mathbb{x})$$

上式中の $\hat{P}$, $\check{P}$ は明らかに滑らかなので $\phi\circ \mathrm{ad}\,\mu\circ(P \times \mathbb{1})$ も滑らかで、P は任意なので $\phi\circ \mathrm{ad}\,\mu$ が滑らかである。ところでさらに ϕ も任意なので $\mathrm{ad}\,\mu$ 自体が滑らかである。 $\square$

定理 2.2.14. X が reflexive ならば $\mu \sim \mu_\varepsilon$（滑らかにホモトピック）である。

基本群

X を微分空間、$a, b, c \in X$ を任意の三点、$* \in X$ を基点とし、また正の実数 $\varepsilon \ll 1$ を固定する。

定義 2.2.15.（連結成分）$\pi_0(X) = X/\sim$ ただし、$a \sim b \overset{\text{とは}}{\iff}$『$a$ から b への路がある』

定義 2.2.16.（基本群）$\pi_1(X) = \pi_0(\mathcal{L}(X)) = \pi_0(\mathrm{Loops}(X))$

定理 2.2.17. X が reflexive ならば $\mu : \mathcal{L}(X, A) \times \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X, A)$ は滑らかな写像となる。一般には $\mu_\varepsilon : \mathcal{L}(X, A) \times \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X, A)$ が滑らかな写像である。

系 2.2.17.1. X が reflexive ならば $\mu_* : \pi_1(X, A) \times \pi_1(X) \to \pi_1(X, A)$ が（一般の X に対しては $\mu_{\varepsilon *} : \pi_1(X, A) \times \pi_1(X) \to \pi_1(X, A)$ が）$\pi_1(X)$ の $\pi_1(X, A)$ への右作用を与える。

課題 2.2.18. X が reflexive ならば $\mu_* = \mu_{\varepsilon *}$ であることを証明せよ。

課題 2.2.19. $\mu_{\varepsilon *}(* \cdot g) = j_*(g)$ を示せ。ただし $j : X \hookrightarrow (X, A)$ は標準的な包含写像である。

基　礎（ホモトピー）

S 背　景

I 準　備　—　圏と関手, 微分圏, 基本性質

2 基　礎　—　微分多様体, 基本群, ホモトピー

3 不変量　—　ホモロジー, 交代代数, de Rham 理論

4 完全性　—　M-V 完全列, 滑らかな複体, de Rham 再び

F 付　録

ホモトピー（多重ループ空間）

(X, A) を微分空間の対とし、$*$ を共通の基点とする。微分空間の高次ホモトピー群を定義する。

定義. ❶ $\mathrm{Loops}_n(X) = \begin{cases} X, & n = 0, \\ \mathrm{Loops}_{n-1}(\mathrm{Loops}(X)), & n > 0. \end{cases}$ ❷ $\mathcal{L}^n(X) = \begin{cases} X, & n = 0, \\ \mathcal{L}^{n-1}(\mathcal{L}(X)), & n > 0. \end{cases}$

課題 2.3.1. $\mathcal{L}^n(X)$ が $\mathrm{Loops}_n(X)$ の変位レトラクトであることを示せ。

定義 2.3.2. （n 次ホモトピー群）$\pi_n(X) = \pi_0(\mathcal{L}^n(X)) = \pi_0(\mathrm{Loops}_n(X))$

注. 一般の場合に、群の積構造は μ ではなく、μ_ε で与える。

次に対のホモトピー群を定義する。

定義 2.3.3. $\mathcal{L}^n(X, A) = \mathcal{L}^{n-1}(\mathcal{L}(X, A))$，$\pi_n(X, A) = \pi_0(\mathcal{L}^n(X, A))$（$n \geq 1$）と定義する。

注. Shimakawa らは上記とは異なる定義を採用しており、実際に群としても異なる例がある。

ホモトピー（長完全列）

(X, A) を微分空間の対とし、$*$ を共通の基点とする。

定理 2.3.4. 次の系列は完全列である。この完全列をホモトピー長完全列と呼ぶ。

$$\cdots \to \pi_{n+1}(A) \xrightarrow{i_*} \pi_{n+1}(X) \xrightarrow{j_*} \pi_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \pi_n(A) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X) \to \cdots$$

ここで低い次数では次の意味の完全性を、それ以外では可換群の圏での完全性を意味する。

1. $\pi_2(X)$，$\pi_2(X, A)$，$\pi_1(A)$ では、「群の圏での完全性」
2. $\pi_1(X)$ では、「$j_*(x) = j_*(y) \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} x^{-1}y \in \operatorname{Im} i_*$」
3. $\pi_1(X, A)$ では、「$\partial_*(x) = \partial_*(y) \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \exists_{g \in \pi_1(X)}\, x \cdot g = y$」
4. $\pi_0(A)$ では、「$j_*^{-1}(*) = \operatorname{Im} i_*$」ただし、$*$ は定値閉路の同値類である。

注. ループ空間の作用は μ ではなく、μ_ε で考える。それ以外については連続の場合と証明も含めて全く同様である。したがって、reflexive ならば連続の場合と全く同様の証明となる。

ホモトピー（ホモトピー構成）

X, Y, Z を微分空間、$f : X \to Y$，$g : X \to Z$，$h : Y \to X$，$k : Z \to X$ を滑らかな写像とする。またこの節では以後、空間は基点 $*$ を持ち、写像は基点を保つとする。

定義 2.3.5. $\mathcal{I}(f, g) = (Y \amalg X \times \mathbb{R} \amalg Z)/\sim$（同値関係 $\sim$ は次の関係から生成される）とする。

1. $(x, t) \sim f(x)$ if $t \leq 0$
2. $(x, t) \sim g(x)$ if $t \geq 1$
3. $(*, t) \sim f(*) \sim g(*)$ for all $t \in \mathbb{R}$

さらに、その微分構造は射影 $\pi_{f,g} : Y \amalg X \times \mathbb{R} \amalg Z \twoheadrightarrow \mathcal{I}(f, g)$ による押し出しにより与える。

注. 射影 $\pi_{f,g}$ は潜射である。また、$\mathcal{I}(f, g)$ を $\mathcal{I}(Y \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} Z)$ と表すことがある。

例 2.3.6. X, Y, Z がすべて一点空間のとき、f, g は自明であり、$\mathcal{I}(f, g) = \mathbb{I}_0$ が成立する。

定義 2.3.7. $\mathcal{T}(h, k) = \{(y, u, z) \in Y \times \mathcal{P}(X) \times Z) \mid h(y) = u(0),\ u(1) = k(z)\}$ とする。さらに、その微分構造は包含写像 $\iota_{h,k} : \mathcal{T}(h, k) \longrightarrow Y \times \mathcal{P}(X) \times Z$ による引き戻しにより与える。

注. 包含写像 $\iota_{h,k}$ は入射である。また、$\mathcal{T}(h, k)$ を $\mathcal{T}(Y \xrightarrow{h} X \xleftarrow{k} Z)$ と表すことがある。

ホモトピー（写像錐と写像繊維）

X, Y, A, B を微分空間、$f : A \to X$，$g : Y \to B$ を滑らかな写像とする。

用語 2.3.8. ❶ $\mathcal{C}(f) = \mathcal{I}(X \overset{f}{\leftarrow} A \to \{*\})$ を f の写像錐（mapping cone）と呼ぶ。

❷ $\mathcal{F}(g) = \mathcal{T}(Y \overset{g}{\to} B \leftarrow \{*\})$ を g の写像繊維（mapping fibre）と呼ぶ。

例 2.3.9. $f : X \to Y$，$g : Y \to X$ に対して、次の空間が付随する。

❶ $\mathcal{I}(f) = \mathcal{I}(X \overset{=}{\leftarrow} X \overset{f}{\to} Y)$ を f の写像柱（mapping cylinder）と呼ぶ。

❷ $\mathcal{T}(g) = \mathcal{T}(X \overset{=}{\to} X \overset{g}{\leftarrow} Y)$ を g の写像跡（mapping track）と呼ぶ。

❸ $\Sigma(X) := \mathcal{I}(* \leftarrow X \to *)$ を X の懸垂空間（suspension space）と呼ぶ。

❹ $\mathcal{L}(X) := \mathcal{T}(* \to X \leftarrow *)$ を X のループ空間（loop space）と呼ぶ。

例 2.3.10. ❶ $X = S^1$ かつ $f = * : S^1 \to *$ のとき、$\mathcal{C}(S^1)$ と D^2 の微分構造は異なる。

❷ $X = S^1$ のとき、$\Sigma(S^1)$ と S^2 の微分構造は異なる。

ホモトピー（滑らかな Puppe 列）

写像 $f : X \to Y$ に対して、繰り返し写像錐を取って写像の列 $\{i_n : C_n \hookrightarrow C_{n+1}\}$ を得る。

$$X \xrightarrow{f} Y \xhookrightarrow{i_0} C_1 \xhookrightarrow{i_1} C_2 \xhookrightarrow{i_2} C_3 \xhookrightarrow{i_3} \cdots \quad (C_0 = Y)$$

この列は Puppe による次の定理から Puppe 列と呼ばれる。

定理 2.3.11. ❶ $C_{3k} \simeq \Sigma^k(Y)$ ❷ $C_{3k+1} \simeq \Sigma^k(\mathcal{C}(f))$ ❸ $C_{3k+2} \simeq \Sigma^{k+1}(X)$ ❹ $i_{3k} \simeq \Sigma^k(i)$

❺ $i_{3k+1} \simeq \Sigma^k(q)$ ❻ $i_{3k+2} \simeq \Sigma^{k+1}(f)$（$i = i_0$ であり、$q : C_1 \twoheadrightarrow C_1/Y = \Sigma(X)$ は射影）

同様に g に対して双対 Puppe 列と呼ばれる写像の列 $\{p_n : F_{n+1} \twoheadrightarrow F_n\}$ を得る。

$$X \xleftarrow{g} Y \overset{p_0}{\twoheadleftarrow} F_1 \overset{p_1}{\twoheadleftarrow} F_2 \overset{p_2}{\twoheadleftarrow} F_3 \overset{p_3}{\twoheadleftarrow} \cdots \quad (F_0 = Y)$$

定理 2.3.12. ❶ $F_{3k} \simeq \mathcal{L}^k(Y)$ ❷ $F_{3k+1} \simeq \mathcal{L}^k(\mathcal{F}(g))$ ❸ $F_{3k+2} \simeq \mathcal{L}^{k+1}(X)$ ❹ $p_{3k} \simeq \mathcal{L}^k(p)$

❺ $p_{3k+1} \simeq \mathcal{L}^k(j)$ ❻ $p_{3k+2} \simeq \mathcal{L}^{k+1}(g)$（$p = p_0$ であり、$j : \mathcal{L}(X) \hookrightarrow F_1$ は包含）

不変量（ホモロジー）

S 背　景

I 準　備　—　圏と関手, 微分圏, 基本性質

2 基　礎　—　微分多様体, 基本群, ホモトピー

3 不変量　—　**ホモロジー**, 交代代数, de Rham 理論

4 完全性　—　M-V 完全列, 滑らかな複体, de Rham 再び

F 付　録

ホモロジー（準備）

R を単位的可換環、G を R-加群、S,T を集合、$\phi : S \to T$ を写像とする。

定義 3.1.1. $\hom(S,G) = G^S$, $S \otimes G = \{ f \in G^S \mid \sharp\{ s \in S \mid f(s) \neq 0 \} < \infty \} \subset \hom(S,G)$ と置く。以後、$f \in S \otimes G$ を形式和 $\sum_{i=1}^{k} g_i{\cdot}s_i$, $g_i = f(s_i)$, $\{ s \in S \mid f(s) \neq 0 \} = \{ s_1, \dots, s_k \}$ の形で表す。

課題 3.1.2. $\hom(S,G)$, $S \otimes G$ に自然な R-加群の構造が入ることを示せ。

定義 3.1.3. $\phi_\sharp : S \otimes G \to T \otimes G$ と $\phi^\sharp : \hom(T,G) \to \hom(S,G)$ を次で定める。

1. $\phi_\sharp(\sum_{i\,:\,\text{有限個}} g_i{\cdot}s_i) = \sum_{i\,:\,\text{有限個}} g_i{\cdot}\phi(s_i)$
2. $\phi^\sharp(f) = f{\circ}\phi$

課題 3.1.4. $f = \sum_{i\,:\,\text{有限個}} g_i{\cdot}s_i$, $g = \phi_\sharp(f)$ と置くと、$g(t) = \sum_{s \in \phi^{-1}(t)} f(s)$ であることを示せ。

用語. 次数付き R-加群 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を $A_* = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ （$\{A^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を $A^* = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A^n$）のように表す。

ホモロジー（滑らかな特異複体 I）

記号. $\varpi_\pm : \mathbb{R} \twoheadrightarrow [-1,1]$ を $\varpi_\pm(t) = \mathrm{sgn}(t)\cdot\varpi_0(|t|)$ により定め、$C^n = \mathbb{I}_\pm^n$, $\mathbb{I}_\pm = \mathbb{R}/\varpi_\pm$ と置く。またこれには潜射 $\pi_\pm : \mathbb{R}^n \to C^n$ が付随する。特に $\mathbb{I}_0 \cong \mathbb{I}_\pm$（微分同相）である。

課題 3.1.5. §1.1 で導入したユークリッド空間の間の滑らかな写像 $\eta, \eta_i^\pm, \varepsilon_j$ が各々微分圏に於ける滑らかな写像 $\eta : C^{-1} \to C^0, \eta_i^\pm : C^n \to C^{n+1}, \varepsilon_j : C^{n+1} \to C^n$ を誘導することを示せ。

上の課題で得られる圏を $\underline{\square}$ で表し、X を微分空間、R を単位的可換環、G を R-加群とする。

定義 3.1.6. $\mathcal{S}_n(X) = C^\infty(C^n, X)$, $\Delta_n(X) = \bigcup_j \varepsilon_j^\sharp(\mathcal{S}_{n-1}(X))$, $\varepsilon_j^\sharp : \mathcal{S}_{n-1}(X) \to \mathcal{S}_n(X)$ と置く。

定義 3.1.7. "滑らかな" 特異（余）鎖複体を次で定義する。ただし $\epsilon' = \frac{1+\epsilon 1}{2}$（$\epsilon = \pm$）とする。

1. $\widetilde{\mathcal{C}}_n(X;G) = \dfrac{\mathcal{S}_n(X) \otimes G}{\Delta_n(X) \otimes G}$
2. $\widetilde{\mathcal{C}}^n(X;G) = \mathrm{Ker}\{\hom(\mathcal{S}_n(X), G) \to \hom(\Delta_n(X), G)\}$
3. $\partial = \sum_{i,\epsilon} (-1)^{i+\epsilon'} \eta^\epsilon_{i\sharp} : \widetilde{\mathcal{C}}_{n+1}(X;G) \to \widetilde{\mathcal{C}}_n(X;G)$, $n \geq 0$, $\partial = \eta_\sharp : \widetilde{\mathcal{C}}_0(X;G) \to \widetilde{\mathcal{C}}_{-1}(X;G)$
4. $\delta = \sum_{i,\epsilon} (-1)^{i+\epsilon'} \eta_i^{\epsilon\sharp} : \widetilde{\mathcal{C}}^n(X;G) \to \widetilde{\mathcal{C}}^{n+1}(X;G)$, $n \geq 0$, $\delta = \eta^\sharp : \widetilde{\mathcal{C}}^{-1}(X;G) \to \widetilde{\mathcal{C}}^0(X;G)$

ホモロジー（滑らかな特異複体 II）

(X, A) を微分空間対、R を単位的可換環、G を R-加群、$i : \mathcal{S}_*(A) \hookrightarrow \mathcal{S}_*(X)$ を包含写像とする。

課題 3.1.8. $\partial : \widetilde{\mathcal{C}}_{n+1}(X;G) \to \widetilde{\mathcal{C}}_n(X;G)$ と $\delta : \widetilde{\mathcal{C}}^n(X;G) \to \widetilde{\mathcal{C}}^{n+1}(X;G)$ が well-defined な R-準同型であり、各々 $\partial\partial = 0$ と $\delta\delta = 0$ を満たすことを示せ。

定義 3.1.9. 非簡約型の "滑らかな" 特異（余）鎖群を次で定義する。

1. $\mathcal{C}_n(X, A; G) = \dfrac{\widetilde{\mathcal{C}}_n(X;G)}{i_*(\widetilde{\mathcal{C}}_n(A;G))}$
2. $\mathcal{C}^n(X, A; G) = \mathrm{Ker}\{\, i^* : \widetilde{\mathcal{C}}^n(X;G) \to \widetilde{\mathcal{C}}^n(A;G)\}$

課題 3.1.10. $\partial : \widetilde{\mathcal{C}}_{n+1}(X;G) \to \widetilde{\mathcal{C}}_n(X;G)$ と $\delta : \widetilde{\mathcal{C}}^n(X;G) \to \widetilde{\mathcal{C}}^{n+1}(X;G)$ は 各々 $\mathcal{C}_*(X, A; G)$, $\mathcal{C}^*(X, A; G)$ 上の準同型を誘導し、さらに $\partial\partial = 0$, $\delta\delta = 0$ を満たすことを示せ。

ここでは $X = (X, \emptyset)$ と考え、$\mathcal{C}_n(X;G) = \mathcal{C}_n(X, \emptyset; G)$, $\mathcal{C}^n(X;G) = \mathcal{C}^n(X, \emptyset; G)$ と置く。

注. $\widetilde{\mathcal{C}}_n(X;G)$ や $\widetilde{\mathcal{C}}^n(X;G)$ を単独で考える場合は $X \neq \emptyset$ と仮定することが多い。

ホモロジー（滑らかな特異ホモロジー）

(X, A) を微分空間対、Y を微分空間、K を位相空間とする。

定義 3.1.11. 以下のように "滑らかな" 特異（コ）ホモロジー群を定義する。

1. $\mathcal{Z}_n(X, A; G) = \mathrm{Ker}\{\partial : \mathcal{C}_n(X, A; G) \to \mathcal{C}_{n-1}(X, A; G)\} \subset \mathcal{C}_n(X, A; G)$
2. $\mathcal{B}_n(X, A; G) = \mathrm{Im}\{\partial : \mathcal{C}_{n+1}(X, A; G) \to \mathcal{C}_n(X, A; G)\} \subset \mathcal{Z}_n(X, A; G) \subset \mathcal{C}_n(X, A; G)$
3. $\mathcal{Z}^n(X, A; G) = \mathrm{Ker}\{\delta : \mathcal{C}^n(X, A; G) \to \mathcal{C}^{n+1}(X, A; G)\} \subset \mathcal{C}^n(X, A; G)$
4. $\mathcal{B}^n(X, A; G) = \mathrm{Im}\{\delta : \mathcal{C}^{n-1}(X, A; G) \to \mathcal{C}^n(X, A; G)\} \subset \mathcal{Z}^n(X, A; G) \subset \mathcal{C}^n(X, A; G)$
5. $\mathcal{H}_n(X, A; G) = \dfrac{\mathcal{Z}_n(X, A; G)}{\mathcal{B}_n(X, A; G)}$
6. $\mathcal{H}^n(X; G) = \dfrac{\mathcal{Z}^n(X, A; G)}{\mathcal{B}^n(X, A; G)}$

注. 随伴性 $\mathcal{T}^\infty \dashv \mathcal{D}^\infty$ から $\mathcal{S}_n(\mathcal{D}^\infty K) = S_n(K)$（連続の意味での特異 n-立方体全体）が従うので、自然な同型 $\mathcal{H}_n(\mathcal{D}^\infty K; G) \cong H_n(K; G)$ と $\mathcal{H}^n(\mathcal{D}^\infty K; G) \cong H^n(K; G)$ が存在する。

注. $\widetilde{\mathcal{C}}_n(X; G)$ と $\widetilde{\mathcal{C}}^n(X; G)$ を用いれば、同様に $\widetilde{\mathcal{H}}_n(X; G)$ と $\widetilde{\mathcal{H}}^n(X; G)$ を定義できる。

ホモロジー（鎖準同型）

(X,A), (Y,B) を微分空間対、$f:X\to Y$ を C^∞ 写像とする。

用語 3.1.12. $f(A)\subset B$ のとき、$f:(X,A)\to(Y,B)$ と表し、これを滑らかな対写像と呼ぶ。

課題 3.1.13. 滑らかな対写像 $f:(X,A)\to(Y,B)$ に対して、$\phi(\sigma)=f\circ\sigma$ により与えた写像 $\phi=f_\sharp:\mathcal{S}_n(X)\to\mathcal{S}_n(Y)$ がうまく定義され、$\phi(\mathcal{S}_n(A))\subset\mathcal{S}_n(B)$ を満たすことを示せ。

以下、$\phi=f_\sharp$ を滑らかな対写像 $f:(X,A)\to(Y,B)$ から課題 3.1.13 で定まる写像とする。

定理 3.1.14. ϕ は準同型 $\phi_\sharp:\mathcal{C}_n(X,A;G)\to\mathcal{C}_n(Y,B;G)$ と $\phi^\sharp:\mathcal{C}^n(Y,B;G)\to\mathcal{C}^n(X,A;G)$ を誘導し、次が成立する。

1. $\partial\circ\phi_\sharp=\phi_\sharp\circ\partial$（従って $\phi_\sharp$ は鎖純同型）
2. $\delta\circ\phi^\sharp=\phi^\sharp\circ\delta$（従って $\phi^\sharp$ は余鎖純同型）

系 3.1.15. $\phi_*:\mathcal{H}_n(X,A;G)\to\mathcal{H}_n(Y,B;G)$ と $\phi^*:\mathcal{H}^n(Y,B;G)\to\mathcal{H}^n(X,A;G)$ が誘導される。

注. 全く同様に $\phi_*:\widetilde{\mathcal{H}}_n(X;G)\to\widetilde{\mathcal{H}}_n(Y;G)$ と $\phi^*:\widetilde{\mathcal{H}}^n(Y;G)\to\widetilde{\mathcal{H}}^n(X;G)$ を定義できる。

不変量（交代代数）

S 背　景

1 準　備　—　圏と関手, 微分圏, 基本性質

2 基　礎　—　微分多様体, 基本群, ホモトピー

3 不変量　—　ホモロジー, **交代代数**, de Rham 理論

4 完全性　—　M-V 完全列, 滑らかな複体, de Rham 再び

F 付　録

交代代数（余接ベクトル）

$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする。$\mathbb{a} \in U$ での接ベクトルとは、U 内に描かれた $\gamma(0) = \mathbb{a}$ を満たす滑らかな曲線 $\mathbb{x} = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$ の $t = 0$ での方向ベクトル $\frac{d\gamma}{dt}(0) = \mathbb{v}$ のことである。特に $\mathbb{a}$ から第 i 軸 x_i に平行かつ正の方向に出る単位ベクトルを $\mathbb{e}_i$ とする。任意の滑らかな写像 $\phi : U \to V$ に対して、合成写像 $\phi\circ\gamma : \mathbb{R} \to V$ は $\phi(\mathbb{a})$ での接ベクトル $\phi_*(\mathbb{v}) = D(\phi)\frac{d\gamma}{dt}(0) = D(\phi)\mathbb{v}$ を定める。

定義 3.2.1. 点 $\mathbb{a} \in U$ での方向微分の全体 $T_{\mathbb{a}}U$ を $\mathbb{a}$ での接空間と呼び、$E = \mathbb{R}\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\} \cong \mathbb{R}^n$（$\mathbb{a}$ によらない表記）で表す。また $TU = U \times E = \bigcup_{\mathbb{a}\in U} T_{\mathbb{a}}U$ で定まる T は共変関手である。

さて、滑らかな関数 $f : U \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{a} \in U$ での接ベクトル $\frac{d\gamma}{dt}(0) = \mathbb{v}$ を実数 $\frac{df\circ\gamma}{dt}(0) = \frac{df}{d\mathbb{x}}(\mathbb{a})\cdot\mathbb{v}$ に写す線形関数を与える。従って、$\frac{df}{d\mathbb{x}}(\mathbb{a}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbb{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbb{a}))$ は余接ベクトルであり、これを $df_{\mathbb{a}}$ または単に df と記す。第 i 座標関数 $x^i : U \to \mathbb{R}$ に対しては、$\frac{d(x^i\circ\gamma)}{dt}(0)$ は $\mathbb{v}$ の第 i 成分を与え、dx^i が第 i 基本ベクトル $\mathbb{e}_i$ の双対 $\mathbb{e}_i^* = \mathbb{e}^i$ に一致するから次の式を得る。

交代代数（交代代数 I）

$U \subset \mathbb{R}^n$，$V \subset \mathbb{R}^m$ を開集合とし、$x^i : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ を第 i 座標への射影（$\ell = n$ 又は m）とする。

$$df_{\mathbb{a}} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbb{a})\cdot dx^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbb{a})\cdot dx^n$$

注. 逆に $\mathbb{v}$ は f の $\mathbb{v}$ 方向の方向微分を与え、基本ベクトル $\mathbb{e}_i$ の二重双対は $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\mathbb{x}=\mathbb{a}}$ である。

また任意の滑らかな写像 $\phi : V \to U$（$\phi(\mathbb{b}) = \mathbb{a}$）は、$y^i = x^i \circ \phi : V \to \mathbb{R}$ により、$\mathbb{a}$ での余接ベクトル dx^i から $\mathbb{b}$ での余接ベクトル $dy^i = \phi^*(dx^i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y^i}{\partial x_j} dx^j$（$1 \leq i \leq n$）を定める。

定義 3.2.2. 点 $\mathbb{a} \in U$ での余接ベクトルの全体 $T^*_{\mathbb{a}}U$ を $E^* = \mathbb{R}\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ と同一視し、$\mathbb{a}$ での余接空間と呼ぶ。また $T^*U = U \times E^* = \bigcup_{\mathbb{a} \in U} T^*_{\mathbb{a}}U$ と定めると T^* は反変関手である。

定義 3.2.3. $\mathrm{Alt}^p(E) = \{ f : \prod^p E \to \mathbb{R}$（多重線形写像）$\mid f$ は交代性をもつ$\}$（$p \geq 1$）と定める。ただし、$\mathrm{Alt}^0(E) = \mathbb{R}$ と考える。このとき、$\mathrm{Alt}^1(E) = E^*$ である。

交代代数（交代代数 II）

$\omega : \prod^{p} E \to \mathbb{R}$, $\eta : \prod^{p} E \to \mathbb{R}$ を多重線形写像とし、$\mathfrak{S}_n$ を $(1, \dots, n)$ の順列の全体とする。

定義 3.2.4. 次の式で $\mathrm{Alt}(\omega) : \prod^{p} E \to \mathbb{R}$ と $\omega{\cdot}\eta : \prod^{p+q} E \to \mathbb{R}$ を定める。

1. $\mathrm{Alt}(\omega)(\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_p) = \dfrac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \mathrm{sgn}(\sigma){\cdot}\omega(\mathbb{a}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbb{a}_{\sigma(p)})$
2. $(\omega{\cdot}\eta)(\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_p, \mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_q) = \omega(\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_p){\cdot}\eta(\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_q)$（$\therefore$ $1{\cdot}\eta = \eta$ かつ $\omega{\cdot}1 = \omega$）

課題 3.2.5. 『$\omega = \mathrm{Alt}(\eta) \overset{\text{ならば}}{\Longrightarrow} \omega \in \mathrm{Alt}^p(E)$』を示せ。

課題 3.2.6. 『$\forall \hat{\omega} : \prod^{p} E \to \mathbb{R}$（多重線形写像） $\hat{\omega} \in \mathrm{Alt}^p(E) \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \hat{\omega} = \mathrm{Alt}(\hat{\omega})$』を示せ。

定義 3.2.7. $\omega \wedge \eta = \dfrac{(p+q)!}{p!{\cdot}q!} \mathrm{Alt}(\omega{\cdot}\eta)$（$\therefore$ $\eta \in \mathrm{Alt}^p(E)$ ならば $1 \wedge \eta = \eta$ かつ $\eta \wedge 1 = \eta$）

定理 3.2.8. $\omega_i \in \mathrm{Alt}^{p_i}(E)$（$i=1,2,3$）のとき、『$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3$』である。

定理 3.2.9.（交代性） $\omega_i \in \mathrm{Alt}^{p_i}(E)$（$i=1,2$）のとき、『$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{p_1 p_2}{\cdot}\omega_2 \wedge \omega_1$』である。

交代代数（交代代数Ⅲ）

用語. 交代性（定理 3.2.9）を満たす多重線形な積を持つ代数を交代代数と呼ぶ。

課題 3.2.10. $\omega_i \in \mathrm{Alt}^1(E)$（$1 \leq i \leq p$）に対して、次を示せ。

1. $\sigma \in \mathfrak{S}_p$（$p$ 次対称群）ならば $\omega_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(p)} = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p$

補題 3.2.11. $\omega_i \in \mathrm{Alt}^1(E)$（$1 \leq i \leq p$）に対して $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p$ とすると、次が成立する。

$$\omega(\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_p) = \det \begin{bmatrix} \omega_1(\mathbb{e}_1) & \omega_1(\mathbb{e}_2) & \cdots & \omega_1(\mathbb{e}_p) \\ \omega_2(\mathbb{e}_1) & \omega_2(\mathbb{e}_2) & \cdots & \omega_2(\mathbb{e}_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_p(\mathbb{e}_1) & \omega_p(\mathbb{e}_2) & \cdots & \omega_p(\mathbb{e}_p) \end{bmatrix}$$

系 3.2.11.1. $\omega_i \in \mathrm{Alt}^1(E)$（$1 \leq i \leq p$）のとき

1. $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \neq 0 \iff \omega_1, \ldots, \omega_p$ は一次独立

$[n] = \{1, \ldots, n\}$ とし、$\mathfrak{M}(p, n) = \{\sigma : [p] \to [n] \mid \sigma$ は順序を保つ単射$\}$ とする。

定理 3.2.12. $\dim \mathrm{Alt}^p(E) = \binom{n}{p}$ かつ $\{dx^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma(p)}\}_{\sigma \in \mathfrak{M}(p,n)}$ が $\mathrm{Alt}^p(E)$ の基底である。

不変量（de Rham 理論）

de Rham 理論（開集合上）

定義 3.3.1. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上の滑らかな写像 $\omega : U \to \mathrm{Alt}^p(E)$，$0 \le p \le n$，を U 上の p 次微分形式と呼び、その全体を $\Lambda^p(U)$ で表す。0 次微分形式は U 上滑らかな関数である。

注. $\mathrm{Alt}^*(E)$ の交代代数の構造が $\Lambda^*(U)$ に遺伝し、後者も交代代数となる。

$U \subset \mathbb{R}^n$，$V \subset \mathbb{R}^m$ を開集合、$\phi : V \to U$ を滑らかな写像、ω を U 上の p 次微分形式とする。

命題 3.3.2. ω は以下の様に表示することができる。

$$\omega(\mathbb{u}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{M}_{p,n}} f_\sigma(\mathbb{u}) \cdot dx^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma(p)}, \qquad f_\sigma \in C^\infty(U, \mathbb{R}),\ \mathbb{u} \in U$$

定義 3.3.3. $y^i = x^i \circ \phi : V \to \mathbb{R}$ と置くと、ω から V 上の p 次微分形式 $\phi^*\omega$ が次で定まる：

$$(\phi^*\omega)(\mathbb{v}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{M}_{p,n}} f_\sigma(\phi(\mathbb{v})) \cdot \sum_{\tau \in \mathfrak{M}_{p,m}} \frac{\partial(y^{\sigma(1)}, \ldots, y^{\sigma(p)})}{\partial(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(p)})} \cdot dx^{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\tau(p)}, \quad \mathbb{v} \in V$$

ここで、$p = 0$ かつ $\omega = \varphi : U \to \mathrm{Alt}^0(E) = \mathbb{R}$ ならば、$\phi^*\varphi = \varphi \circ \phi$ である。

用語. 反変関手 $\Lambda^* : \mathsf{Open}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ をここでは 交代代数関手（固有名詞！）と呼ぶ。

de Rham 理論（微分空間上）

$X=(X,\mathcal{D}_X)$，$Y=(Y,\mathcal{D}_Y)$ を微分空間、$U\subset\mathbb{R}^n$ を開集合とする。

(心). プロット $P:U\to X$ に対して、p 次微分形式 $\omega_P:U\to\mathrm{Alt}^p(E)$ が "自然な形で" 与えられるとき、これを X 上の p 次微分形式と呼んで（単に）ω で表したい。自然とは、対応 $\omega(U):\mathcal{D}_X(U)\ni P\mapsto\omega_P\in\Lambda^p(U)$ が、任意の $\phi:V\to U$ に対して次を満たすことである：

$$\phi^*\omega_P=\omega_{P\circ\phi}\overset{\text{つまり}}{\iff}\Lambda^p(\phi)\circ\omega(U)=\omega(V)\circ\mathcal{D}_X(\phi)$$

注. 以後、紛れのない場合、$\omega(U):\mathcal{D}_X(U)\to\Lambda^p(U)$ を単に ω で表すことがある。

定義 3.3.4. 微分空間 X 上の p 次微分形式とは $\mathcal{D}_X$ から Λ^p への自然変換である。またその全体を $\Omega^p(X)$ で表す。特に $\Omega^0(X)$ は X 上の滑らかな関数の全体である。実際、$\omega\in\Omega^0(X)$ は plot $c_x:\{*\}\to\{x\}\subset X$ に対して $\omega_{c_x}\in\Lambda^0(\{*\})\cong\mathbb{R}$ を満たすので $f(x)=\omega_{c_x}(*)$ と定めれば、自然性から $\forall_P\ f\circ P=\omega_P$ を得る。右辺が常に滑らかであるので、f は滑らかである。

定義 3.3.5. 滑らかな写像 $f:X\to Y$ に対して、$f^*:\Omega^p(Y)\to\Omega^p(X)$ を次で定める。

$$(f^*\omega)_P=\omega_{f\circ P}:U\to\mathrm{Alt}^p(E),\quad\omega\in\Omega^p(Y),\ P\in\mathcal{D}_X(U),\ U\in\mathrm{Obj}(\mathsf{Open})$$

de Rham 理論（外微分 I ）

開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上の滑らかな関数 $f : U \to \mathbb{R}$ は次の式を満たす。

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(ⓐ)\cdot dx^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(ⓐ)\cdot dx^n$$

U 上の p 次微分形式 $\alpha = \sum_{\sigma\in\mathfrak{M}_{p,n}} f_\sigma \cdot dx^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma(p)}$, $f_\sigma \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ をとる。

定義 3.3.6.（外微分）$d\alpha = \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{M}_{p,n}} df_\sigma \wedge dx^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma(p)}$ と定める。

課題 3.3.7. $n = 3$ で $\alpha = p\,dx^1 + q\,dx^2 + r\,dx^3$ のとき、次を示せ。

$$d\alpha = \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} - \frac{\partial q}{\partial x_3}\right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial p}{\partial x_3} - \frac{\partial r}{\partial x_1}\right) dx^3 \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial q}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_2}\right) dx^1 \wedge dx^2$$

課題 3.3.8. $n = 3$ で $\alpha = p\cdot dx^2 \wedge dx^3 + q\cdot dx^3 \wedge dx^1 + r\cdot dx^1 \wedge dx^2$ のとき、次を示せ。

$$d\alpha = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial q}{\partial x_2} + \frac{\partial r}{\partial x_3}\right)\cdot dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

de Rham 理論（外微分 II）

$U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ を開集合、$d : \Lambda^p(U) \ni \alpha \mapsto d\alpha \in \Lambda^{p+1}(U)$ を外微分を与える写像とする。

定理 3.3.9. $d : \Lambda^p(U) \to \Lambda^{p+1}(U)$ は線形写像である。

定理 3.3.10. $\alpha = f \cdot dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ のとき、$d\alpha = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ である。

定理 3.3.11. $\alpha \in \Lambda^p(U)$ に対して $dd\alpha = 0$ が成立する。

定理 3.3.12. $\alpha \in \Lambda^p(U)$, $\beta \in \Lambda^q(U)$ に対して $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$ が成立する。

課題 3.3.13. d は四つの定理（3.3.9 〜 3.3.12）を満たす唯一のものであることを示せ。

定理 3.3.14. 滑らかな写像 $\phi : V \to U$ に対して $\phi^*(d\alpha) = d\phi^*(\alpha)$ が成立する。

$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合、$D \subset U$ を区分的に滑らかな境界を持つ p 次元曲面、$\alpha \in \Lambda^{p-1}(U)$ とする。

定理 3.3.15.（Stokes）$\int_D d\alpha = \int_{\partial D} \alpha$ （$p = 1$ のときは微分積分学の基本定理である）

de Rham 理論（外微分Ⅲ）

$X=(X,\mathcal{D}_X)$，$Y=(Y,\mathcal{D}_Y)$ を微分空間、$U\subset\mathbb{R}^n$ を開集合とし、自然変換 $\omega:\mathcal{D}_X\to\Lambda^p$ を p 次微分形式とする。ここで自然変換 ω の実体は写像 $\omega=\omega(U):\mathcal{D}_X(U)\to\Lambda^p(U)$ である。

定義 3.3.16. $d\omega:\mathcal{D}_X\to\Lambda^{p+1} \overset{\text{定義}}{\iff} (d\omega)(U)=d\circ\omega(U):\mathcal{D}_X(U)\to\Lambda^{p+1}(U)$ と定める。

定理 3.3.17. $d:\Omega^p(X)\to\Omega^{p+1}(X)$ は線形写像である。

定理 3.3.18. $\omega\in\Omega^p(X)$ に対して $d^2\omega\equiv dd\omega=0$ が成立する。

定理 3.3.19. $\omega\in\Omega^p(X)$，$\eta\in\Omega^q(X)$ に対して $d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^p\omega\wedge d\eta$ が成立する。

命題 3.3.20. 滑らかな写像 $f:X\to Y$ は $f^*\circ d=d\circ f^*:\Omega^p(X)\to\Omega^{p+1}(Y)$ を満たす。

定義 3.3.21. $\mathcal{H}^p_{dR}(X)=\dfrac{\mathrm{Ker}\{d:\Omega^p(X)\to\Omega^{p+1}(X)\}}{\mathrm{Im}\{d:\Omega^{p-1}(X)\to\Omega^p(X)\}}$（de Rham コホモロジー）

定理 3.3.22. 滑らかな写像 $f:X\to Y$ は準同型 $f^*:\mathcal{H}^p_{dR}(Y)\to\mathcal{H}^p_{dR}(X)$ を誘導する。

完全性（M-V 完全列）

S 背　景

1 準　備　—　圏と関手, 微分圏, 基本性質

2 基　礎　—　微分多様体, 基本群, ホモトピー

3 不変量　—　ホモロジー, 交代代数, de Rham 理論

4 完全性　—　**M-V 完全列**, 滑らかな複体, de Rham 再び

F 付　録

M-V 完全列（単位の分割）

$K \subset E \cong \mathbb{R}^n$ を図形とし、$\mathcal{U}$ を K の開被覆とする。

定義 4.1.1. 滑らかな関数の族 $\{\rho_U : K \to [0,\infty) \mid U \in \mathcal{U}\}$ が $\mathcal{U}$ に属する単位の分割である

$\overset{\text{とは}}{\Longleftrightarrow}$ ❶ $\operatorname{supp}\rho_U \subset U$ ❷ $\forall_{\mathbb{x}\in K}\ \sharp\{U \mid \rho_U(\mathbb{x}) \neq 0\} < \infty$ ❸ $\sum_U \rho_U(\mathbb{x}) = 1$ （$\mathbb{x} \in K$）

命題 4.1.2. 図形 $K \subset E$ 上に与えられた開被覆 $\mathcal{U}$ に属する単位の分割は常に存在する。

X を微分空間、$\mathcal{U}$ を X の開被覆、M を多様体とする。

定義 4.1.3. $\{\rho^U \in \Omega^0(X) \mid U \in \mathcal{U}\}$ が $\mathcal{U}$ に属する単位の分割である

$\overset{\text{とは}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall_{V\in\mathcal{O}_{\mathsf{Open}}}\ \forall_{P\in\mathcal{D}_X(V)}\ \{\rho^U(P) \mid U \in \mathcal{U}\}$ は $\{P^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ に属する単位の分割である。

課題 4.1.4. 定義 4.1.1の条件①〜③は、任意の U に対して、次の三条件に加えて $\rho^U(P) = f_U \circ P$ を満たす滑らかな関数 $f_U : U \to \mathbb{R}$ が存在することと同値であることを示せ。

❶ $\forall_{U\in\mathcal{U}}\ \operatorname{supp} f_U \subset U$ ❷ $\forall_{x\in X}\ \sharp\{U \in \mathcal{U} \mid f_U(x) \neq 0\} < \infty$ ❸ $\sum_{U\in\mathcal{U}} f_U(x) = 1$ （$x \in X$）

M-V 完全列（de Rham）

滑らかな特異コホモロジーと de Rham コホモロジーは形式的にはよく似ている。この事実は形式上のみに留まるのか、あるいは実質的にも同じなのか、という問いは大変自然である。

定理 4.1.5. $\mathcal{T}^\infty(X)$ の任意の開被覆に対して、X 上でこれに属する単位の分割があるならば、$\mathcal{H}^p_{dR}(X) \cong \mathcal{H}^p(X;\mathbb{R})$ が成立する。

系 4.1.5.1. $\mathcal{H}^p(M;\mathbb{R}) \cong \mathcal{H}^p_{dR}(M)$（いわゆる de Rham の定理）が成立する。

では一般に de Rham の定理は成立するの？ あるいはしないの？

例 4.1.6. トーラス $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ への $\mathbb{R}$ の作用を $t{\cdot}(x,y) = (x{+}t, y + \alpha{\cdot}t)$（$\alpha$ は無理数）で定め、その軌道全体を T_α とすると、$T_\alpha = \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z}^2 + \mathbb{R}{\cdot}(1,\alpha)) = \mathbb{R}/(\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z})$ を得る。この空間を I-Zemmour の irrational torus と呼ぶ。T_α には射影 $\pi : \mathbb{R} \to T_\alpha$ の押し出しとしての微分構造が入り、π は潜射となる。この T_α に対しては de Rham の定理は成立しないことが知られている。

…以下定理 4.1.5 を目指し、順を追って解説する。

M-V 完全列（Mayer-Vietoris）

X を微分空間、$\mathcal{U}$ を位相空間 $\mathcal{T}^\infty(X)$ の開被覆とする。

用語. $\mathcal{U}$ が X の 良い被覆 であるとは、$\mathcal{U}$ に属する単位の分割が存在することである。

さて、包含写像 $i_t : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_t$ と $j_t : U_t \hookrightarrow X, t = 1, 2,$ は次で与えられる鎖準同型 $\Psi : \Omega^p(X) \to \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2)$ と $\Phi : \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \to \Omega^p(U_1 \cap U_2)$ を誘導する：

$$\Psi(\omega) = i_1^*\omega \oplus i_2^*\omega, \qquad \Phi(\eta_1 \oplus \eta_2) = j_1^*\eta_1 - j_2^*\eta_2$$

定理 4.1.7. $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ が X の良い被覆のとき、次の長完全列が得られる。

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^0_{dR}(X) \to \cdots \to \mathcal{H}^p_{dR}(X) &\xrightarrow{\Psi^*} \mathcal{H}^p_{dR}(U_1)\oplus\mathcal{H}^p_{dR}(U_2) \xrightarrow{\Phi^*} \mathcal{H}^p_{dR}(U_1 \cap U_2) \\ \to \mathcal{H}^{p+1}_{dR}(X) &\xrightarrow{\Psi^*} \mathcal{H}^{p+1}_{dR}(U_1)\oplus\mathcal{H}^{p+1}_{dR}(U_2) \xrightarrow{\Phi^*} \mathcal{H}^{p+1}_{dR}(U_1 \cap U_2) \to \cdots\end{aligned}$$

ただし Ψ^* と Φ^* は、Ψ と Φ から de Rham コホモロジーに誘導される準同型である。

$$\Psi^*[\omega] = ([i_1^*\omega], [i_2^*\omega]), \quad \Phi^*([\eta_1], [\eta_2]) = [j_1^*\eta_1 - j_2^*\eta_2]$$

M-V 完全列

定理 4.1.7 の証明: 次が短完全列であることを示せばよい。

$$0 \longrightarrow \Omega^p_{dR}(X) \xrightarrow{\Psi} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \xrightarrow{\Phi} \Omega^p(U_1 \cap U_2) \longrightarrow 0$$

1. $(\mathrm{Ker}\,\Psi = 0)$ X 上の p 次微分形式 $\omega : \mathcal{D}_X \to \Lambda^p$ が $i_t^*\omega = 0$（$t = 1, 2$）を満たすとする。$P \in \mathcal{D}_X(V)$ をとると、$P|_{P^{-1}(U_t)} \in \mathcal{D}_{U_t}(P^{-1}(U_t))$ より $(i_t^*\omega)(P|_{P^{-1}(U_t)}) = 0$ を得る。包含写像 $i_t : U_t \hookrightarrow X$ に関する自然性から $\omega(P|_{P^{-1}(U_t)}) = 0$ であり、包含写像 $P^{-1}(U_t) \hookrightarrow V$ に関する自然性から $\omega(P)|_{P^{-1}(U_t)} = 0$ である。ここで $V = P^{-1}(U_1) \cup P^{-1}(U_2)$ より $\omega = 0$ を得る。

2. $(\mathrm{Im}\,\Psi = \mathrm{Ker}\,\Phi)$ $\supset$ のみを示す。U_t 上の p 次微分形式 $\eta_t : \mathcal{D}_{U_t} \to \Lambda^p$（$t = 1, 2$）をとる。$P \in \mathcal{D}_X(V)$ をとると $P|_{P^{-1}(U_t)} \in \mathcal{D}_{U_t}(P^{-1}(U_t))$ である。ここで、$j_1^*\eta_1 = j_2^*\eta_2$ であるとすると、$\eta_1(P^{-1}(U_1))|_{U_2} = \eta_2(P^{-1}(U_2))|_{U_1}$ より $\eta_{12}|_{U_1} = \eta_1(P^{-1}(U_1))$ かつ $\eta_{12}|_{U_2} = \eta_2(P^{-1}(U_2))$ を満たす $\eta_{12} \in \Lambda^p(V)$ がとれるから、$\eta(P) = \eta_{12}$ と置く。これで p 次微分形式 $\eta : \mathcal{D}_X(V) \to \Lambda^p(V)$ が定まり、作り方から $\Psi(\eta) = (\eta_1, \eta_2)$ を満たすが、詳細には立ち入らない。

3. $(\mathrm{Coker}\,\Phi = 0)$ 単位の分割を用いて零拡張を行えばよい。 □

完全性（滑らかな複体）

S 背　景

I 準　備　—　圏と関手, 微分圏, 基本性質

2 基　礎　—　微分多様体, 基本群, ホモトピー

3 不変量　—　ホモロジー, 交代代数, de Rham 理論

4 完全性　—　M-V 完全列, 滑らかな複体, de Rham 再び

F 付　録

滑らかな複体（痩せた CW 複体）

記号. ① $D^n = \{\, \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbb{x}\| \leq 1 \,\}$ ② $\mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Int} D^n \subset \mathbb{R}^n$

A を微分空間、$\mathcal{X} = \{X_n\}_{n \geq -1}$ を微分空間の列で $A \hookrightarrow X_n, n \geq -1$ が入射であるとする。

定義 4.2.1. $\mathcal{X}$ が次を満たすとき、対 (X, A) を 痩せた相対 CW 複体 と呼ぶ。

1. $X_{-1} = A$ かつ $\operatorname*{colim}_{n} X_n = X$
2. 各 $n \geq 0$ に対して、n 胞体 $\{e^n_\alpha\}$ を接着する滑らかな写像 $h_n : \mathbb{S}_n := \coprod_\alpha \mathbb{S}^{n-1}_\alpha \to X_{n-1}$ がとれて、X_n は h_n と包含写像 $\mathbb{S}_n \hookrightarrow \mathbb{D}_n := \coprod_\alpha \mathbb{R}^n_\alpha$ の押し出しである。

用語 4.2.2. $A = \emptyset$ のとき、X を 痩せた CW 複体 と呼ぶ。このとき $\dim X_n \leq n$ である。

系 4.2.2.1. 左随伴関手 $\mathcal{T}^\infty$: Diffeology $\to$ NGTop は colim を保つから、$(\mathcal{T}^\infty(X), \mathcal{T}^\infty(A))$ は位相的な意味での相対 CW 複体である。

定理 4.2.3. 位相的な CW 複体は、痩せた CW 複体に位相的にホモトピー同値である。

滑らかな複体（特別な関数）

定義 4.2.4. 実数全体で定義された滑らかな関数 ℓ を次で与える。$\ell(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$

課題 4.2.5. 次の①～④を満たす滑らかな関数 $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を与えよ。また①～⑤ではどうか？

1. λ は実数全体で単調増加である。
2. $\lambda \circ \varpi_0 = \lambda$
3. $\lambda(0) = 0$ かつ $\lambda(1) = 1$
4. $\lambda(t) + \lambda(1-t) = 1,\ \ t \in \mathbb{R}$
5. λ は $(0,1)$ 上微分可能で $0 < \lambda'(t) \leq \lambda'({}^1\!/_2) < 2$ を満たす。

注. λ は滑らかな写像 $\lambda_0 : \mathbb{I}_0 \to \mathbb{R}$ を誘導する。

$\phi(t) = \displaystyle\int_0^{1/2+t} \lambda(x)\,dx$ と置く。ただし、λ は上の①～⑤を満たす滑らかな関数である。

課題 4.2.6. 次の四つを証明せよ。

5. $\phi(t) = 0$ if $t \leq -{}^1\!/_2$,
6. $\phi(t) = t$ if $t \geq {}^1\!/_2$.
7. $0 < \phi(0) < {}^1\!/_8$,
8. ϕ は実数全体で単調増加であり、$[-{}^1\!/_2, \infty)$ 上では狭義単調増加である.

滑らかな複体（滑らかなハンドル）

記号 4.2.7. 次のように $\mathbb{R}^n$ 内の図形を定める。

$$D^n = \{\mathbb{v} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbb{v}\| \leq 1\}, \qquad S^{n-1} = \{\mathbb{v} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbb{v}\| = 1\}$$

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{\mathbb{u} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbb{u}\| \geq 1\} \cong S^{n-1} \times [1, \infty),$$

記号 4.2.8. 次のように $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 内の図形を定める。

$$\mathbb{D}^{n,m} = \{(\mathbb{u}, \mathbb{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \|\mathbb{u}\| \geq 1 - \phi(2 - \|\mathbb{u}\| - \|\mathbb{v}\|)\},$$

$$\mathbb{S}^{n-1,m} = \{(\mathbb{u}, \mathbb{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \|\mathbb{u}\| \geq 1\}.$$

課題 4.2.9. $\mathbb{D}^{1,1}$ を図示せよ。

用語 4.2.10. $\mathbb{D}^{n,m}$ を 滑らかなハンドル あるいは (n, m)-独鈷 などと呼ぶ。

課題 4.2.11. $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^m = \mathbb{S}^{n-1,m} \subset \mathbb{D}^{n,m} \supset \mathbb{R}^n \times D^m$ を示せ。

滑らかな複体（太った CW 複体）

$A = (A, \mathring{A})$ を微分空間対、$\mathcal{X} = \{X_n = (X_n, \mathring{X}_n)\}_{n \geq -1}$ を微分空間対の列、$(A, \mathring{A}) \hookrightarrow (X_n, \mathring{X}_n)$, $n \geq -1$ は対の入射であるとする。

定義 4.2.12. $\mathcal{X}$ が次を満たすとき、$(X, \mathring{X} : A, \mathring{A})$ を 太った相対 CW 複体 と呼ぶ。

1. $(X_{-1}, \mathring{X}_{-1}) = (A, \mathring{A})$ かつ $\operatorname*{colim}_n (X_n, \mathring{X}_n) = (X, \mathring{X})$
2. 各 $n \geq 0$ に対して、n ハンドル $\{e^{n,m_\alpha}_\alpha\}$ を接着する滑らかな写像 $h_n : \mathbb{S}_n = \coprod_\alpha \mathbb{S}^{n-1,m_\alpha}_\alpha \to X_{n-1}$ で $h_n(\operatorname{Int}\mathbb{S}_n) \subset \mathring{X}_{n-1}$ を満たすものがとれて、次が成立する。
   1. X_n は h_n と $\mathbb{S}_n \hookrightarrow \mathbb{D}_n = \coprod_\alpha \mathbb{D}^{n,m_\alpha}_\alpha$ の押し出しである。
   2. $\mathring{X}_n$ は $h_n : \operatorname{Int}\mathbb{S}_n \to \mathring{X}_{n-1}$ と $\operatorname{Int}\mathbb{S}_n \hookrightarrow \operatorname{Int}\mathbb{D}_n = \coprod_\alpha \operatorname{Int}\mathbb{D}^{n,m_\alpha}_\alpha$ の押し出しである。

用語 4.2.13. $A = \emptyset$ のとき、X を 太った CW 複体 と呼ぶ。このとき、$\text{w-dim}\, X_n \leq n$ である。

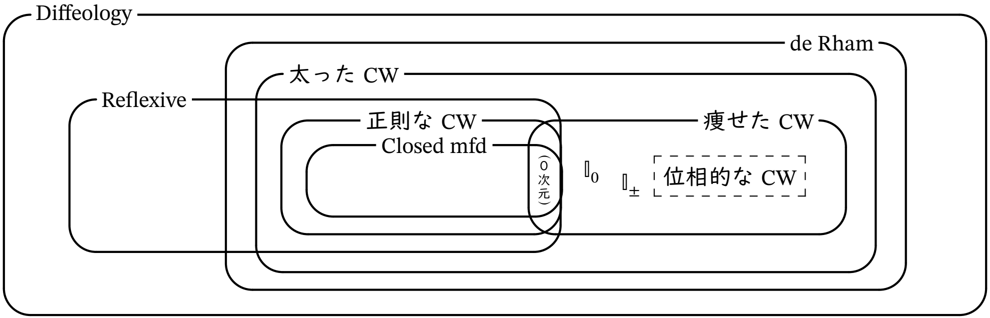
注. 痩せた CW 複体は、太った CW 複体の特殊な場合である。

滑らかな複体

用語 4.2.14. 接着写像 h_n がすべて入射である太った CW 複体を正則な CW 複体と呼ぶ。

定理 4.2.15. 正則な CW 複体は reflexive である。

定理 4.2.16. 閉多様体は正則な CW 複体である。



完全性（de Rham 再び）

S 背　景

1 準　備　—　圏と関手, 微分圏, 基本性質

2 基　礎　—　微分多様体, 基本群, ホモトピー

3 不変量　—　ホモロジー, 交代代数, de Rham 理論

4 完全性　—　M-V 完全列, 滑らかな複体, **de Rham 再び**

F 付　録

de Rham 再び（微分形式）

$X=(X,\mathcal{D}_X)$ を微分空間とし、交代代数関手 Λ^* をとる。

Convex を凸体全体と C^∞ 写像の圏（これに被覆族を定めたのが Chen の site である）とする。

定義 4.3.1. $\widehat{\mathcal{D}}_X$, $\widehat{\Lambda}^*$: $\mathsf{Convex}^{\mathrm{op}}\to\mathsf{Set}$ を $\widehat{\Lambda}^*(F)=\widehat{\mathcal{D}}_{\mathrm{Alt}^*(E)}(F)$ と次の式で定める。

$$\widehat{\mathcal{D}}_X(F)=\{\,f:F\to X \mid \exists_{U_\alpha\,:\,\mathrm{open}}\ \exists_{g_\alpha\in\mathcal{D}_X(U_\alpha)}\ F\subset\bigcup_\alpha U_\alpha,\ f=g_\alpha \text{ on } U_\alpha\cap F\,\}$$（$\mathrm{Chen}^\flat$ 構造）

定義 4.3.2. $\omega\in\Omega^p(X)$, $F\in\mathcal{O}_{\mathsf{Convex}}$, $Q\in\widehat{\mathcal{D}}_X(F)$ に対して、$F\subset\bigcup_\alpha U_\alpha$, $Q=Q_\alpha$ on $U_\alpha\cap F$ を満たす開集合族 $\{U_\alpha\}$ と $Q_\alpha\in\mathcal{D}_X(U_\alpha)$ がある。そこで $\widehat{\omega}_F(Q)|_{U_\alpha\cap F}=\omega_{U_\alpha}(Q_\alpha)|_{U_\alpha\cap F}$ と定める。

記号 4.3.3. $j:\underline{\square}\to\mathsf{Convex}$ を圏としての包含とする。

定義 4.3.4. $\widehat{\mathcal{D}}_X\circ j$ から $\widehat{\Lambda}^*\circ j$ への自然変換を拡張微分形式と呼び、その全体を $\widehat{\Omega}^*(X)$ で表す。
本来の微分形式は $j^\sharp:\Omega^*(X)\to\widehat{\Omega}^*(X)\iff(j^\sharp\omega)_C=\widehat{\omega}_{j(C)}$ により拡張微分形式とみなせる。

de Rham 再び（拡張 de Rham コホモロジー）

$X = (X, \mathcal{D}_X)$, $Y = (Y, \mathcal{D}_Y)$ を微分空間、$C = C^n$ とし、p 次拡張微分形式 $\omega : \widehat{\mathcal{D}}_X \to \widehat{\Lambda}^p$ をとる。ここで自然変換 ω の実体は写像 $\omega = \omega_C : \widehat{\mathcal{D}}_X(C) \to \widehat{\Lambda}^p(C)$ である。

定義 4.3.5. $d\omega : \widehat{\mathcal{D}}_X \to \widehat{\Lambda}^{p+1} \iff (d\omega)_C = d{\circ}\omega_C : \widehat{\mathcal{D}}_X(C) \to \widehat{\Lambda}^{p+1}(C)$ と定める。

定理 4.3.6. $d : \widehat{\Omega}^p(X) \to \widehat{\Omega}^{p+1}(X)$ は線形写像である。

定理 4.3.7. $\omega \in \widehat{\Omega}^p(X)$ に対して $dd\omega = 0$ が成立する。

定理 4.3.8. $\omega \in \widehat{\Omega}^p(X)$, $\eta \in \widehat{\Omega}^q(X)$ に対して $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$ が成立する。

命題 4.3.9. C^∞-写像 $\phi : X \to Y$ に対して $\phi^*{\circ}d = d{\circ}\phi^* : \widehat{\Omega}^p(X) \to \widehat{\Omega}^{p+1}(Y)$ が成立する。

定義 4.3.10. $\widehat{\mathcal{H}}^p_{dR}(X) = \dfrac{\mathrm{Ker}\{d : \widehat{\Omega}^p(X) \to \widehat{\Omega}^{p+1}(X)\}}{\mathrm{Im}\{d : \widehat{\Omega}^{p-1}(X) \to \widehat{\Omega}^p(X)\}}$（拡張 de Rham コホモロジー）

定理 4.3.11. C^∞-写像 $\phi : X \to Y$ は準同型 $\phi^* : \widehat{\mathcal{H}}^p_{dR}(Y) \to \widehat{\mathcal{H}}^p_{dR}(X)$ を誘導する。

de Rham 再び（de Rham の定理）

X を微分空間、$\mathcal{U}$ を X の開被覆、M を多様体とする。

定義 4.3.12. $\{\rho^U \in \widehat{\Omega}^0(X) \mid U \in \mathcal{U}\}$ が $\mathcal{U}$ に属する拡張された単位の分割である

$\overset{\text{とは}}{\iff}$ $\forall_{C\in\mathcal{O}_\square}\ \forall_{P\in\widehat{\mathcal{D}}_X(j(C))}$ $\{\rho^U(P) \mid U \in \mathcal{U}\}$ は $\{P^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ に属する単位の分割である。

定理 4.3.13.（I-Izumida）X は $\mathcal{U}$ に属する拡張された単位の分割をもつ。

定理 4.3.14.（I-Izumida）$\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ が X の開被覆のとき、次の長完全列が得られる。

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{H}}^0_{dR}(X) \to \cdots \to \widehat{\mathcal{H}}^p_{dR}(X) &\xrightarrow{\Psi^*} \widehat{\mathcal{H}}^p_{dR}(U_1) \oplus \widehat{\mathcal{H}}^p_{dR}(U_2) \xrightarrow{\Phi^*} \widehat{\mathcal{H}}^p_{dR}(U_1 \cap U_2) \\ \to \widehat{\mathcal{H}}^{p+1}_{dR}(X) &\xrightarrow{\Psi^*} \widehat{\mathcal{H}}^{p+1}_{dR}(U_1) \oplus \widehat{\mathcal{H}}^{p+1}_{dR}(U_2) \xrightarrow{\Phi^*} \widehat{\mathcal{H}}^{p+1}_{dR}(U_1 \cap U_2) \to \cdots\end{aligned}$$

ただし Ψ^* と Φ^* は、Ψ と Φ から de Rham コホモロジーに誘導される準同型である。

$$\Psi^*[\omega] = ([i_1^*\omega], [i_2^*\omega]), \quad \Phi^*([\eta_1], [\eta_2]) = [j_1^*\eta_1 - j_2^*\eta_2]$$

de Rham 再び（de Rham の定理 II）

X を微分空間とする。

定理 4.3.14 を繰り返し用いれば、n 骨格に関する帰納法により次が得られる。

定理 4.3.15.（I-Izumida）X が痩せた CW 複体ならば $\mathcal{H}^p(X;\mathbb{R}) \cong \widehat{\mathcal{H}}^p_{dR}(X) \cong \mathcal{H}^p_{dR}(X)$ である。

全く同様な証明で、n 骨格に関する帰納法により次の事実が得られる。ただしこれに対しては、論文ではきちんとした証明を与えていないので、引用には注意されたい。

事実 4.3.16. X が太った CW 複体ならば $\mathcal{H}^p(X;\mathbb{R}) \cong \widehat{\mathcal{H}}^p_{dR}(X) \cong \mathcal{H}^p_{dR}(X)$ が成立する。

最後まで聞いてくださって大変ありがとうございました。

付　録

付　録（特別な関手）

例 5.4.1. 圏 C の部分圏 C′ に対して、包含 $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$, $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ で定まる関手を 包含関手 と呼ぶ。

定義 5.4.2. 圏 C の部分圏 D が次を満たすとき、充満 であるという。

$$\mathcal{M}_{\mathsf{D}}(A,B) = \mathcal{M}_{\mathsf{C}}(A,B), \qquad \forall A,B \in \mathrm{Obj}(\mathsf{D}) \subset \mathrm{Obj}(\mathsf{C})$$

$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_{\mathcal{M}}, \mathcal{F}_{\mathcal{O}}) : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ を関手とし、$\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(A,B) = \mathcal{F}_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}_{\mathsf{C}}(A,B) \to \mathcal{M}_{\mathsf{D}}(\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B))$ と置く。

用語. $\mathcal{F}$ に関する条件を次のように定める。

1. $\mathcal{F}$ が 忠実 とは、任意の $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})$ に対して $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(A,B)$ が単射となることである。
2. $\mathcal{F}$ が 充満 とは、任意の $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})$ に対して $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(A,B)$ が全射となることである。
3. $\mathcal{F}$ が 忠実充満 であるとは、充満かつ忠実であるということである。

注. 関手 $\mathcal{F}$ が「$\mathcal{F}_{\mathcal{O}} : \mathcal{O}_{\mathsf{C}} \to \mathcal{O}_{\mathsf{D}}$ が単射」を満たすとする。

1. $\mathcal{F}$ が忠実ならば C は D の部分圏とみなして良い。
2. $\mathcal{F}$ が忠実充満ならば C は D の充満部分圏とみなして良い。

付　録（同型と同値）

定義 5.4.3. 関手 $\mathcal{F}: \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ が **圏同型** とは、$\mathcal{F}$ が忠実充満かつ次を満たすことである。

1. $\mathcal{F}_{\mathcal{O}}: \mathrm{Obj}(\mathsf{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathsf{D})$ が上への１対１対応である。

課題 5.4.4. 関手 $\mathcal{F}: \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ について次が圏同値であることを証明せよ。

1. $\mathcal{F}$ は圏同型
2. $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}$ と $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}$ が各々恒等関手である圏同型 $\mathcal{G}$ が存在する。

定義 5.4.5. また、圏同型で同値になる圏を **同型** であると言う。

次に、圏 D の二つの対象 X, Y に対して、次の同値関係「$\sim$」を定める。

$$X \sim Y \iff \exists_{f:X\to Y}\ \exists_{g:Y\to X}\ \text{s.t. } g\circ f = \mathbb{1}_X \ \&\ f\circ g = \mathbb{1}_Y$$

定義 5.4.6. 関手 $\mathcal{F}: \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ が **圏同値** とは、$\mathcal{F}$ が忠実充満かつ次を満たすことである。

1. $\forall_{Y\in\mathrm{Obj}(\mathsf{D})}\ \exists_{X\in\mathrm{Obj}(\mathsf{C})}\ \text{s.t. } F(X) \sim Y$ in D

課題 5.4.7. 関手 $\mathcal{F}: \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ について次が同値であることを証明せよ。（要選択公理）

1. $\mathcal{F}$ は圏同値
2. $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}$ が各々恒等関手と自然同値となる関手 $\mathcal{G}$ が存在する。

付　録（忘却と生成 I）

記号 5.4.8. ❶ 集合の圏を Set で表し、❷ 群の圏を Group で表す。

❸ 同様に定義される可換群の圏を Abel で表す。

定義 5.4.9. 圏 $\mathsf{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M}, \mathrm{S}, \mathrm{T}, \mathrm{I}, \mathrm{C})$ に対して、$\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$, $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ が次の条件をみたすとき、$\mathsf{C}' = (\mathcal{O}', \mathcal{M}')$ を C の 部分圏 と呼ぶ。

❶ $\mathrm{S}(\mathcal{M}'), \mathrm{T}(\mathcal{M}') \subset \mathcal{O}'$ ❷ $\mathrm{I}(\mathcal{O}') \subset \mathcal{M}'$ ❸ $C(\mathcal{M}' \times_{\mathcal{O}'} \mathcal{M}') \subset \mathcal{M}'$

例 (忘却) 5.4.10. 群は 群構造（積、単位元、逆元）を持つ集合であり、群構造を忘れればただの集合である。同様に準同型から積を保つ性質を忘れればただの写像である。これらの対応

❶ $F_{\mathcal{O}}$: Obj(Group) → Obj(Set) ❷ $F_{\mathcal{M}}$: Mor(Group) → Mor(Set)

の対として 忘却関手 $F = (F_{\mathcal{O}}, F_{\mathcal{M}})$ を構成すると、次を満たす。

❶ $F_{\mathcal{M}}(\mathbb{1}_G) = \mathbb{1}_{F_{\mathcal{O}}(G)}$ ❷ $f : G \to H$ ならば $F(f) : F_{\mathcal{O}}(G) \to F_{\mathcal{O}}(H)$

❸ $f : G \to H$ かつ $g : h \to K$ ならば $F_{\mathcal{M}}(g \circ f) = F_{\mathcal{M}}(g) \circ F_{\mathcal{M}}(f)$

例 (生成) 5.4.11. 集合に対し、別に「単位元」を定めた上で形式的な「逆元」を与え、さらに形式的な「積」によって自由群を構成することが可能である。このとき写像は自由群の生成元の対応として形式的な「積を保つ」ように定義を拡張することで準同型となる。これらの対応

1. $G_{\mathcal{O}}$: Obj(Set) → Obj(Group)
2. $G_{\mathcal{M}}$: Mor(Set) → Mor(Group)

の対 $G = (G_{\mathcal{O}}, G_{\mathcal{M}})$ は 生成関手 と呼ばれ、次の条件を満たす。

1. $G_{\mathcal{M}}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_{G_{\mathcal{O}}(A)}$
2. $f : A \to B \implies G_{\mathcal{M}}(f) : G_{\mathcal{O}}(A) \to G_{\mathcal{O}}(B)$
3. $f : A \to B$ かつ $g : h \to K$ ならば $G_{\mathcal{M}}(g \circ f) = G_{\mathcal{M}}(g) \circ G_{\mathcal{M}}(f)$

用語 5.4.12. 圏 C 内で以下の用語を定める。

1. 任意の対象 B に対して $\mathrm{Mor}(\emptyset, B) = $(一点集合) を満たす対象 0 を C の 始対象 と呼ぶ。
2. 任意の対象 A に対して $\mathrm{Mor}(A, 1) = $(一点集合) を満たす対象 1 を C の 終対象 と呼ぶ。
3. 始対象かつ終対象である対象 $*$ を C の 基対象（又は 零対象）と呼ぶ。

付　録（様々な圏）

定義 5.4.13. 圏 C，D に対して、クラス Obj(C)，Obj(D) の合併クラス $\mathcal{O}$ と クラス Mor(C), Mor(D) の合併クラス $\mathcal{M}$ の組 $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ として与えられる圏を C ⨿ D で表し、合併圏 と呼ぶ。

用語 5.4.14. 圏 C，D に対して、クラス Obj(C)，Obj(D) の直積クラス $\mathcal{O}$ と クラス Mor(C), Mor(D) の直積クラス $\mathcal{M}$ の組 $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ として与えられる圏を 直積圏 と呼び、C × D で表す。

用語 5.4.15. 圏 C，D に対して、その間の関手の全体を対象の class とし、それら関手の間の自然変換全体を射の class とする圏を圏 C から圏 D への 関手圏 と呼び $\mathrm{Funct}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$ で表す。

定義 5.4.16. 圏 $\mathsf{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M}, S, T, I, C)$ が圏 D の 内部圏 であるとは、$\mathcal{O}$ と $\mathcal{M}$ が D の対象であり、I, S, T, C が D の射であることとする。同様に、C をもたない 内部前圏 が定義される。

用語 5.4.17. Set への忠実関手を持つ圏は 具象圏 と呼ばれ、その関手は忘却関手と呼ばれる。特に関手 $1_* = \mathcal{M}_{\mathsf{C}}(1, -) : \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$ が忠実となる対象 1 を持つ圏 C は 強具象圏 と呼ばれる。

付　録（サイト）

Grothendieck は位相構造を空間から切り離し、豊富な構造を持つ圏（サイト）に押し込め、その上の presheaf として実体化した。そして、Chen と Souriau による微分構造をもつ空間のアイデアも本質的な部分は Grothendieck のものと同様であった。以下 $0 \leq r \leq \infty$ とする。

用語. 各対象に適当な意味で '被覆'（covering）が与えられた圏を サイト（site）と呼ぶ。各対象の被覆全体は被覆族（covering family)、被覆族の全体は 被覆系（coverage）と呼ばれる。

例 5.4.18. 集合と写像のなす圏 Set は自明な被覆系をもち、サイトとなる。

用語. 集合のサイト Set に自然に埋め込めるサイトを 具象（concrete）であると言う。

用語. いかなる対象 U の被覆族 $\{U_i\}$ の colimit も '自然' にかつ 'うまく' 定まって U とみなせるサイトを 潜準（subcanonical）であると言う。

例 5.4.19. 任意の有限次元の Euclid 空間の開集合のすべてとそれらの間の C^r 写像全体のなす圏を Open_r で表す。Open_r は潜準具象サイトである。

付　録（ホモロジー長完全列）

(X, A)，(Y, B) を微分空間対、$f, g : (X, A) \to (Y, B)$ を滑らかな対写像とする。

定理 5.4.20. X が一点空間のとき、$\mathcal{H}_q(X; G) = 0$（$q \neq 0$）と $\mathcal{H}_0(X; G) = G$ が成立する。

定理 5.4.21. f, g のホモトピー $H : f \sim g$ が滑らかな対写像 $H : (X \times \mathbb{I}_0, A \times \mathbb{I}_0) \to (Y, B)$ で与えられるならば次の二つが成立する。

1. $f_* = g_* : \mathcal{H}_*(X, A; G) \to \mathcal{H}_*(Y, B; G)$
2. $f^* = g^* : \mathcal{H}^*(Y, B; G) \to \mathcal{H}^*(X, A; G)$

定理 5.4.22. 対 (X, A) に対して、次のホモロジーとコホモロジーの長完全列が付随する。

$$\cdots \to \mathcal{H}_q(A; G) \longrightarrow \mathcal{H}_q(X; G) \longrightarrow \mathcal{H}_q(X, A; G) \to \mathcal{H}_{q-1}(A; G) \to \mathcal{H}_{q-1}(X; G) \to \cdots$$

$$\cdots \to \mathcal{H}^{q-1}(A; G) \to \mathcal{H}^{q-1}(X; G) \to \mathcal{H}^q(X, A; G) \longrightarrow \mathcal{H}^q(A; G) \longrightarrow \mathcal{H}^q(X; G) \to \cdots$$

定理 5.4.23. $Y \supset A$ かつ対 (Y, A) が（滑らかな）近傍変異レトラクトならば、包含写像 $j : (X, A) \hookrightarrow (X \cup_A Y, Y)$ は特異ホモロジー論・特異コホモロジー論双方で同型を誘導する。

参考文献

Norio Iwase, *Whitney approximation for smooth CW complex*, Kyushu J. Math. **76** (2022), no. 1, 177–186. MR 4414309

Norio Iwase, *Smooth A_∞ form on a diffeological loop space*, Recent advances on diffeologies and their applications (Providence, RI) (Jean-Pierre Magnot, ed.), Compemporary Mathematics, American Mathematical Society, to appear.

N. Iwase, N. Izumida, *Mayer-Vietoris sequence for differentiable/diffeological spaces*, Algebraic Topology and Related Topics (Mohali, 2017), 123-151, Trends in Mathematics, Birkhäuser, 2019.

Patrick Iglesias-Zemmour, *Diffeology*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 185, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013. MR 3025051

Saunders Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1998. MR 1712872

Ib Madsen and Jørgen Tornehave, *From calculus to cohomology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, de Rham cohomology and characteristic classes. MR 1454127

Kazuhisa Shimakawa, Kohei Yoshida, and Tadayuki Haraguchi, *Homology and cohomology via enriched bifunctors*, Kyushu J. Math. **72** (2018), no. 2, 239–252. MR 3884529

Andrew Stacey, *Comparative smootheology*, Theory Appl. Categ. **25** (2011), No. 4, 64–117. MR 2805746

Ichiro Tamura, *Bibun isō kikagaku. I–III*, second ed., Iwanami Shoten Kiso Sūgaku [Iwanami Lectures on Fundamental Mathematics], vol. 20, Iwanami Shoten, Tokyo, 1983, Kikagaku [Geometry], iii, (in Japanese). MR 841270

Jordan Watts, *Diffeologies, differential spaces, and symplectic geometry*, Ph.D. thesis, University of Toronto, 2012.

https://www.wolframalpha.com/input?i=integrate%28exp%284%2F3-1%2F%283x%29-1%2F%283-3x%29%29%2C%5Bx%2C0%2C1%5D%29.