第 3 章　ループ空間の A_∞ 構造

8　Ganea の空間

8.1　Ganea の fibre–cofibre 構成と homotopy pullback

CW 複体の間の写像 $f : K \to X$ に対して、fibre 空間 $P_f \overset{i_f}{\hookrightarrow} T_f \xrightarrow{q_f} X$ をとると、自明な包含写像 $K \hookrightarrow T_f$ はホモトピー同値を与え、$q_f : T_f \to X$ は $f : K \to X$ の拡張かつ $i_f : P_f \to T_f$ との合成写像は自明である：

$$q_f \circ i_f = * : P_f \hookrightarrow T_f \longrightarrow X, \quad q_f|_K = f, \quad K \overset{\simeq}{\hookrightarrow} T_f.$$

そこで $i_f : P_f \to T_f$ の homotopy cofibre $j_f : T_f \hookrightarrow C_{i_f} = T_f \cup C(P_f)$ を取り、$G(f) = C_{i_f}$ とおけば、$q_f : T_f \to X$ は $G(f) \supset T_f$ への自明な拡張 $e(f) : G(f) \to X$, $e(f)(C(P_f)) = *$ を持つ。 そこで、写像 $f : K \to X$ からその拡張 $e(f) : G(f) \to X$ を与える構成法を、Ganea の fibre-cofibre 構成と呼ぶ。

定義 8.1 CW 対 (X, A) に対してその包含写像を $f : A \hookrightarrow X$ とするとき、Ganea の fibre–cofibre 構成を f に対して m 回繰り返して得られる写像を $e_m^{(X,A)} : G_m(X, A) \to X$ で表す：

(1) $G_0(X, A) = A$ かつ $e_0^{(X,A)} = f$ である。

(2) $G_{m+1}(X, A) = G(e_m^{(X,A)})$ かつ $e_{m+1}^{(X,A)} = e(e_m^{(X,A)})$ である。

定理 8.2 (Ganea) 基点付き空間 X に対して、$\mathrm{cat}(X) \leq m$ となるには、$e_m^{(X,A)} : G_m(X) \to X$ にホモトピー右逆写像が存在することが必要十分である。　ただし、$G_m(X) = G_m(X, \emptyset)$ である。

注 8.3 与えられた写像 $f : K \to X$ に対する拡張 $f' : G(f) \to X$ は一意では無いことを注意する。

従って Ganea の fibre-cofibre 構成はその様な拡張の中に自然なものが存在することを示したものと考えることができるが、その構成はホモトピー圏の中での圏論的な構成とは言い難い。 実は $G_m(X)$ には、ホモトピー圏の中で圏論的にも自然な構成法 (cf. Iwase [67]) が存在する：

定義 8.4 CW 対 (X, A) に対して、包含写像 $k : \mathrm{T}^{m+1}(X, A) \hookrightarrow \prod^{m+1}(X, A)$ と対角線写像 $\Delta_{m+1} : X \to \prod^{m+1} X$ の homotopy pullback を $G_m(X, A)$ とし、誘導される X への自然な射影を $e_m^{(X,A)} : G_m(X, A) \to X$ とする。

この定義を採用すると、定理 8.2 は補題 3.4 から自明となる。

これ以後小論では、定義 8.4 による Ganea の空間の構成法を Ganea の fibre-cofibre 構成の繰り返しの代わりに採用する。 実は もう一つの標準的な構成が空間 X のループ空間の A_∞ 構造で与えられる：

定理 8.5 (Stasheff) CW 複体 X のループ空間に随伴する $\mathcal{A}_\infty$ 構造は、

(1) fibre 列 $E^{m+1}(\Omega(X)) \stackrel{p_m^{\Omega(X)}}{\rightarrow} P^m(\Omega(X)) \stackrel{e_m^X}{\rightarrow} X, (m \geq 0)$ と

(2) cofibre 列 $E^{m+1}(\Omega(X)) \stackrel{p_m^{\Omega(X)}}{\rightarrow} P^m(\Omega(X)) \hookrightarrow P^{m+1}(\Omega(X)), (m \geq 0)$ および

(3) $P^0(\Omega(X)) = *, E^1(\Omega(X)) = \Omega(X)$ を満たすものとして与えられる。

実はこの $\mathcal{A}_\infty$ 構造は、定義 8.4 の構成と本質的には一致することが分かる。

8.2 pushout–pullback 補題

CW 対 (X, A), (Y, B) をとり、$i : A \subset X$ と $j : B \subset Y$ を包含写像とする。さらに与えられた写像 $f : Z \to X$ と $g : Z \to Y$ に対して写像余錐と(二重)写像余柱をとる:

$$
\begin{aligned}
P_i &= \{(a, \ell_X) \in A \times T(X) | * = \ell_X(0), i(a) = \ell_X(1)\} \simeq \{\ell_X \in T(X) | * = \ell_X(0), \ell_X(1) \in A\},\\
P_j &= \{(b, \ell_Y) \in B \times T(Y) | * = \ell_Y(0), j(b) = \ell_Y(1)\} \simeq \{\ell_Y \in T(Y) | * = \ell_Y(0), \ell_Y(1) \in B\},\\
T_{i,f} &= \{(z, \ell_X) \in Z \times T(X) | f(z) = \ell_X(0), \ell_X(1) \in A\},\\
T_{j,g} &= \{(z, \ell_Y) \in Z \times T(Y) | g(z) = \ell_Y(0), \ell_Y(1) \in B\},
\end{aligned}
$$

同様に写像 $i{\times}j : A{\times}B \subset X{\times}Y$, $k : X{\times}B{\cup}A{\times}Y \subset X{\times}Y$ と $(f, g) = (f{\times}g)\Delta_Z : Z \to X{\times}Y$ に対して

$$
\begin{aligned}
P_{i\times j} &= \{(\ell_X, \ell_Y) \in T(X) \times T(Y) | * = \ell_X(0), * = \ell_Y(0), \ell_X(1) \in A, \ell_Y(1) \in B\} = P_i{\times}P_j,\\
P_k &= \{(\ell_X, \ell_Y) \in T(X) \times T(Y) | * = \ell_X(0), * = \ell_Y(0)\,\text{and}\,(\ell_X(1), \ell_Y(1)) \in A{\times}Y{\cup}X{\times}B\},\\
T_{i\times j,(f,g)} &= \{(z, \ell_X, \ell_Y) \in Z \times T(X) \times T(Y) | f(z) = \ell_X(0), g(z) = \ell_Y(0), (\ell_X, \ell_Y) \in P_{i\times j}\},\\
T_{k,(f,g)} &= \{(z, \ell_X, \ell_Y) \in Z \times T(X) \times T(Y) | f(z) = \ell_X(0), g(z) = \ell_Y(0), (\ell_X, \ell_Y) \in P_k\}.
\end{aligned}
$$

をとり、自然な射影 $\phi : T_{i\times j,(f,g)} \to T_{i,f}$ と $\psi : T_{i\times j,(f,g)} \to T_{j,g}$ を次で与える:

$$
\phi(z, \ell_X, \ell_Y) = (z, \ell_X), \quad \psi(z, \ell_X, \ell_Y) = (z, \ell_Y).
$$

このとき、次の補題を得る。

補題 8.6 CW 対 (X, A), (Y, B) と CW 複体 Z、および写像 $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ に対して、写像 $(f, g) : Z \to X{\times}Y$ と $k : X{\times}B{\cup}A{\times}Y \subset X{\times}Y$ の homotopy pull-back $T_{k,(f,g)}$ は自然に

$\phi : T_{i\times j,(f,g)} \to T_{i,f}$ と $\psi : T_{i\times j,(f,g)} \to T_{j,g}$ の homotopy push-out のホモトピー型を持つ：

$$\begin{tikzcd}
T_{i\times j,(f,g)} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "HPO"] & T_{i,f} \arrow[d, hook] & \\
T_{j,g} \arrow[r, hook] & T_{k,(f,g)} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "HPB"] & X\times B\cup A\times Y \arrow[d, hook, "k"] \\
& Z \arrow[r, "(f,g)"] & X\times Y
\end{tikzcd}$$

略証: まず $E = T_{k,(f,g)}$ の部分空間 E_1, E_2 および E_0 を次のように定める:

$$E_1 = \{(z,\ell_X,\ell_Y)\in E|\ell_Y(1)\in B\} \supset \{(z,k(f(z)),\ell_Y)\in E|\ell_Y(0)=g(z),\ell_Y(1)\in B\} \simeq T_{j,g},$$

$$E_2 = \{(z,\ell_X,\ell_Y)\in E|\ell_X(1)\in A\} \supset \{(z,\ell_X,k(g(z)))\in E|\ell_X(0)=f(z),\ell_X(1)\in A\} \simeq T_{i,f},$$

$$E_0 = \{(z,\ell_X,\ell_Y)\in E|\ell_X(0)=f(z),\ell_Y(0)=g(z),\ell_X(1)\in A,\ell_Y(1)\in B\} = T_{i\times j,(f,g)},$$

ただし $k(w)$ は点 w での全く動かない道を表す。 このとき、$E = E_1\cup E_2$, $E_1\cap E_2 = E_0$ が直ちにえられ、さらに $T_{j,g}$ および $T_{i,f}$ が E_1 および E_2 の強変位レトラクトであることがわかる。 一方で E_0 の E_1 あるいは E_2 への包含写像は各々 ψ あるいは ϕ とホモトピックとなる。 従って E は (unreduced) homotopy push-out $\Omega_{j,g}\cup\{[0,1]\times\Omega_{i\times j,(f,g)}\}\cup\Omega_{i,f}$ のホモトピー型を持つことが分かる。 終り.

loop 空間 $\Omega(X)$ に対する Stasheff による A_∞-構造と元の空間 X の関係が次のように与えられる。

定理 8.7 連結な CW 複体 X に対し、 次が成立する。

(1) Ganea の空間 $\{G_m(X)\}$ は $\Omega(X)$ の A_∞ 構造を与える。

(2) 自然なホモトピー同値 $P^\infty(\Omega X)\simeq X$ が存在する。

略証: まず E^{m+1} を包含写像 $X^{[m+1]}\to X^{m+1}$ の homotopy fibre とし、P^m を次の homotopy pull-back で定義する:

$$\begin{tikzcd}
 & X^{[m+1]} \arrow[d, hook] \\
X \arrow[r, "\Delta_{m+1}"] & X^{m+1},
\end{tikzcd}$$

ただし $X^{[m+1]} = \mathrm{T}^{m+1}X = \{(x_0,...x_m)\in X^{m+1}|x_t = *\text{ for some }t\}$ (fat wedge) であり、Δ_{m+1} は対角線写像である。

次に $Z = X$, $Y = X^m$, $f = 1_X$, $g = \Delta_m$, $A = \{*\}$, $B = X^{[m]}$ とすれば、直ちに $\Omega_{k,(f,g)} = P^m$, $\Omega_{i,f} \simeq *$, $\Omega_{j,g} = P^{m-1}$ および、次の pull-back 図式を得る:

$$\begin{tikzcd} P_j \arrow[r] \arrow[d, equal] & T_{i\times j,(f,g)} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "PB"] & T_{i,f} \arrow[d] \\ P_j \arrow[r] & T_{j,g} \arrow[r] & Z. \end{tikzcd}$$

ただし j は包含写像 $X^{[m]} \subset X^m$ であり、従って定義から $P_j = E^m$ である。

ここで $f = 1_X$ かつ $A = \{*\}$ であるので、$T_{i,f}$ は可縮であり、$T_{i\times j,(f,g)}$ はこの場合、$T_{j,g} \to Z$ の fibre P_j にホモトピー同値である。 従ってこれらのデータに対して 補題 8.6 を用いれば、次のような pushout-pullback 図式が得られる:

$$\begin{tikzcd} E^m \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "HPO"] & P^{m-1} \arrow[d, hook] & \\ \{*\} \arrow[r, hook] & P^m \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "HPB"] & X\times X^{[m]} \cup \{*\}\times X^m \arrow[d, hook, "k"] \\ & X \arrow[r, "\Delta_{m+1}"] & X\times X^m \end{tikzcd}$$

ここで P^m, $m \geq 1$ は標準的な包含写像 $E^m \subset P^{m-1}$ の (unreduced) 写像錐のホモトピー型を持つことに注意すれば、同様に補題 8.6 を用いて、次の pushout-pullback 図式を得る:

$$\begin{tikzcd} \Omega X\times E^m \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] \arrow[dr, phantom, "HPO"] & E^m \arrow[d, hook] & \\ \Omega X \arrow[r, hook] & E^{m+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "HPB"] & X\times X^{[m]} \cup \{*\}\times X^m \arrow[d, hook, "k"] \\ & \{*\} \arrow[r, "*"] & X\times X^m \end{tikzcd}$$

従って E^{m+1} は ΩX と E^m の (unreduced) 結のホモトピー型を持つ。 これはそのまま、$\{(E^{m+1}, P^m); m \geq 0\}$ が Stasheff の意味での ΩX の A_∞-構造を与えることを意味する。 従って ∞-次の ΩX-射影空間 $P^\infty(\Omega X)$ は $\underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, P^m \simeq X$ のホモトピー型を持つことがわかる。 終り.

Stasheff による、上の $\mathcal{A}_\infty$ 構造とともによく知られた $\mathcal{A}_\infty$ 形式とそれらの関係について、次節以降で圏論的な捉え方を用いた記述を試みよう。