Lusternik–Schnirelmann カテゴリ数と A_∞ 構造

岩瀬 則夫

土器の制作に使われる粘土は、こねて固められた塊からあるいは延ばされあるいはすぼめられて、制作者の思い通りの形に仕上げられる。 しかし取手はどうであろうか? これは別の小さな粘土の塊を「くっつける」という操作を行わねばならない。あるいは注ぎ口はどうであろうか? これは「穴を開ける」か、注ぎ口の下部を作った後にその上部にやはり別の粘土を「くっつける」といった操作を行わねばならない。

このように土器の制作は「延ばし」たり「すぼめ」たりといった連続的な変形を基に、取手や注ぎ口を付けるなどの形態的な変化が別の粘土の塊を「くっつける」という手術によって与えられると見なして良いようである。 では、作り上げたい造形物に対して、製作者は始めに粘土の塊を最少でいくつ用意すれば良いのであろうか?

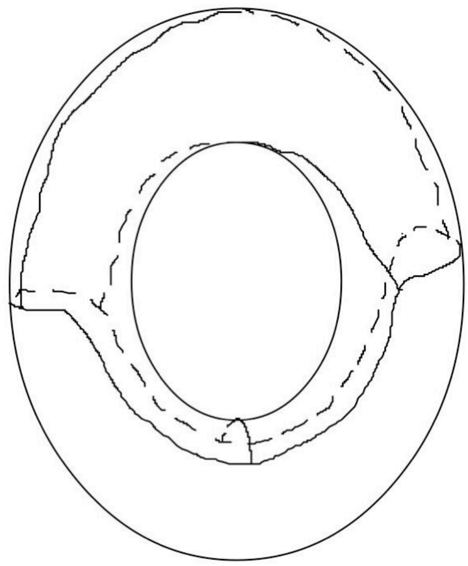

図１

すぐに分かるのは、最少数の上限が ⟨ホモトピー論的な次元⟩ + 1 で与えられることである。実際、厚みのついたトーラスを粘土で作るには三つの塊が必要である。 誤解を恐れずに言えば、⟨粘土の塊の最少数⟩ − 1 に対応する数学的な量が本講義の主題であるL-Sカテゴリ数であり、1997 年以降、これを評価する不変量に対して、非安定ホモトピー論、一般コホモロジー論、あるいは A_∞-構造に付随したスペクトル系列を用いた研究が進んでいる。

以下、第０章において、圏論・位相空間論からの用語を準備し、第１章でホモトピー論の基礎から幾つかのトピックを概説し、第２章において、ＬＳの猫たちやそれらの計算の話題に入り、第３章において空間の A_∞ 構造について概説し、また第４章において近年のＬＳ理論の発展のホトモピー論的な背景を解説したい。

第0章　準備

0　圏論から

0.1　圏と双対圏

二つのクラス $\mathcal{O}$ と $\mathcal{M}$ の組 $\underline{\mathcal{C}} = (\mathcal{O}, \mathcal{M})$ が圏であるとは次の四条件が成立することであり、クラス $\mathcal{O}$ の要素は圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の対象と呼ばれ $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}$ と、クラス $\mathcal{M}$ の要素は圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の射と呼ばれ $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}$ と表される：

(A1) 一意な対応 $I : \mathcal{O} \to \mathcal{M}$ が存在する。　-- 対象の恒等射

(A2) 二つの一意な対応 $S, T : \mathcal{M} \to \mathcal{O}$ が存在する。　-- 射の定義域と値域

(A3) 新たなクラス $\mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M}$ を圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の二つの射 g, f の順序対 (g, f) で $S(g) = T(f)$ を満たすもの全体のなすクラスとするとき、一意な対応 $C : \mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ が存在する。　-- 合成射

(A4)　(1) $SI(X) = TI(X) = X$ -- 対象 X の恒等射の定義域と値域は X 自身

(2) $SC(g, f) = S(f), TC(g, f) = T(g)$ -- $g \circ f$ の定義域は f の定義域で、値域は g の値域

(3) $C(f, IS(f)) = C(IT(f), f) = f$ -- 恒等射と合成射を作っても変わらない

(4) $C(h, C(g, f)) = C(C(h, g), f)$ -- 三つの射の合成射は、合成射の作り方によらない

(A5) 圏 $\underline{\mathcal{C}}$ のいかなる二つの対象 X, Y に対しても、対象 X を定義域とし対象 Y を値域とする射全体のなすクラス $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X, Y)$ は集合である。　-- 局所小

注 0.1 圏 $\underline{\mathcal{C}} = (\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}, \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}})$ に対して、$I_{\underline{\mathcal{C}}} = I, S_{\underline{\mathcal{C}}} = S, T_{\underline{\mathcal{C}}} = T, C_{\underline{\mathcal{C}}} = C$ を圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の構造と呼ぶ。

与えられた圏 $\underline{\mathcal{C}} = (\mathcal{O}(\underline{\mathcal{C}}), \mathcal{M}(\underline{\mathcal{C}}))$ に対して、その構造 $I_{\underline{\mathcal{C}}}, S_{\underline{\mathcal{C}}}, T_{\underline{\mathcal{C}}}, C_{\underline{\mathcal{C}}}$ をとる。　そこで $\mathcal{O}(\underline{\mathcal{C}}^o) = \mathcal{O}(\underline{\mathcal{C}})$、$\mathcal{M}(\underline{\mathcal{C}}^o) = \mathcal{M}(\underline{\mathcal{C}})$ とし、その構造を $I_{\underline{\mathcal{C}}^o} = I_{\underline{\mathcal{C}}}, S_{\underline{\mathcal{C}}^o} = T_{\underline{\mathcal{C}}}, T_{\underline{\mathcal{C}}^o} = S_{\underline{\mathcal{C}}}, C_{\underline{\mathcal{C}}^o} = C_{\underline{\mathcal{C}}} \circ t$ とする。　ただし、$t : \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}$ は $t(f, g) = (g, f)$ により与えられる対応である。

問題 0.2 圏 $\underline{\mathcal{C}}$ に対して、$\underline{\mathcal{C}}^o$ も圏となることを示せ。　この圏 $\underline{\mathcal{C}}^o$ を圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の双対圏という。

例えば $\mathcal{O}$ を集合全体のクラス、$\mathcal{M}$ を写像全体のクラスをとれば、それらの組は圏をなす。ここではこれを集合の圏と呼び記号 $\underline{\mathcal{S}}$ で表し、弱 Hausdorff 空間と連続写像のなす圏を記号 $\underline{\mathcal{T}}$ で表し、また群と準同型のなす圏を記号 $\underline{\mathcal{G}}$ で、さらにアーベル群と準同型のなす圏を記号 $\underline{\mathcal{A}}$ で表す。

問題 0.3 圏 $\underline{\mathcal{S}}, \underline{\mathcal{T}}, \underline{\mathcal{G}}, \underline{\mathcal{A}}$ が実際に圏をなすことを示せ。

0.2 おはなし (集合とクラス)

［ラッセルの逆理］ 例えば自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ の要素は自然数だけであり、当然

$$0.5 \notin \mathbb{N}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{N}, \quad \pi \notin \mathbb{N}, \quad 1 \in \mathbb{N}, \quad 2 \in \mathbb{N}, \quad 3 \in \mathbb{N}, \quad \cdots$$

が成立する。 さて、Cantor により「自然数」と同等の実在性を持つという「集合」の一つである $\mathbb{N}$ に対しても同様に考えれば、自然数の「集合」はもちろん「自然数」という「数」ではないから

$$\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$$

である (これも当然)。 そこで、このように自分自身を要素に持たない集合を『良い集合』と呼ぶことにする。 さらに『良い集合』全体の集合を $\mathbf{U}$ とすると、上のことから

$$\mathbb{N} \in \mathbf{U}$$

となる。 さてこの集合 $\mathbf{U}$ は『良い集合』であろうか?

(1) 集合 $\mathbf{U}$ が『良い集合』であるとすると、$\mathbf{U}$ は『良い集合』全体の中の一つの要素である。これを式で表すと
$$\mathbf{U} \in \mathbf{U}$$
である。 しかしこの式は $\mathbf{U}$ が『良い集合』でないことを意味する。 $\cdots\cdot$ 矛盾

(2) 集合 $\mathbf{U}$ が『良い集合』でないとすると、$\mathbf{U}$ は『良い集合』全体の中の要素ではない。これを式で表すと
$$\mathbf{U} \notin \mathbf{U}$$
である。 しかしこの式は $\mathbf{U}$ が『良い集合』であることを意味する。 $\cdots\cdot$ 矛盾

ベルナイスとゲーデルは『集まり』の中に、宇宙のようにすべてを包含して、その外側を考えることができないほど巨大な存在 − 数学的にはいかなる『集まり』の要素にもなりえないほど巨大な存在 − がある事を認め、(なんらかの『集まり』の要素となりえる)「集合」とあわせて「クラス」と呼び、集合より広い概念とした: 例えば上記のラッセルの逆理に現れる『集まり』U は実はすべての集合の集まりになるが、そのように巨大な集まりはベルナイス・ゲーデルの意味での「クラス」にはなるが、「集合」にはならない。

従って上記の逆理は、クラスを集合のように取り扱った為におきたと考えられる。

注 0.4 対象の全体と射の全体の集まりがともに集合であるような圏を「小圏」ということがある。

0.3　関手と自然変換

二つの圏 $\underline{\mathcal{C}}, \underline{\mathcal{D}}$ に対して、 二つの対応 $F_{\mathcal{O}} : \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{D}}}$, $F_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}$ の組 $F = (F_{\mathcal{O}}, F_{\mathcal{M}}) : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{D}}$ が共変関手であるとは、 次の三条件が成立することである：

(B1) $F_{\mathcal{M}}(I_{\underline{\mathcal{C}}}(X)) = I_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(X))$ -- 対象 X の恒等射の像は恒等射

(B2)　(1) $F_{\mathcal{O}}(S_{\underline{\mathcal{C}}}(f)) = S_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{M}}(f))$ -- 射 f の定義域の像は射 f の像の定義域

(2) $F_{\mathcal{O}}(T_{\underline{\mathcal{C}}}(f)) = T_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{M}}(f))$ -- 射 f の値域の像は射 f の像の値域

(B3) $F_{\mathcal{M}}(g \circ f) = F_{\mathcal{M}}(g) \circ F_{\mathcal{M}}(f)$ -- 射 g, f の合成射の像は射 g, f の像の合成射

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd} \qquad => \qquad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, "F(g\circ f)=F(g)\circ F(f)"] & \\ F(Y) \arrow[r, "F(g)"'] & F(Z) \end{tikzcd}$$

同様に次の三条件が成立するとき、 $F = (F_{\mathcal{O}}, F_{\mathcal{M}}) : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{D}}$ を反変関手と呼ぶ：

($\mathrm{B1}^o$) $F_{\mathcal{M}}(I_{\underline{\mathcal{C}}}(X)) = I_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(X))$ -- 対象 X の恒等射の像は恒等射

($\mathrm{B2}^o$)　(1) $F_{\mathcal{O}}(S_{\underline{\mathcal{C}}}(f)) = T_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{M}}(f))$ -- 射 f の定義域の像は射 f の像の値域

(2) $F_{\mathcal{O}}(T_{\underline{\mathcal{C}}}(f)) = S_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{M}}(f))$ -- 射 f の値域の像は射 f の像の定義域

($\mathrm{B3}^o$) $F_{\mathcal{M}}(g \circ f) = F_{\mathcal{M}}(f) \circ F_{\mathcal{M}}(g)$ -- 射 g, f の合成射の像は射 f, g の像の合成射

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd} \qquad => \qquad \begin{tikzcd} F(X) & \\ F(Y) \arrow[u, "F(f)"] & F(Z) \arrow[l, "F(g)"] \arrow[ul, "F(g\circ f)=F(f)\circ F(g)"'] \end{tikzcd}$$

例えばホモロジー群は圏 $\underline{\mathcal{T}}$ から圏 $\underline{\mathcal{A}}$ への共変関手であり、 コホモロジー群は反変関手である。また自然な忘却関手 $\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{S}}} = 1_{\underline{\mathcal{S}}} : \underline{\mathcal{S}} \to \underline{\mathcal{S}}$, $\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{T}}} : \underline{\mathcal{T}} \to \underline{\mathcal{S}}$, $\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{G}}} : \underline{\mathcal{G}} \to \underline{\mathcal{S}}$, $\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{A}}} : \underline{\mathcal{A}} \to \underline{\mathcal{S}}$ は共変関手である。

定義 0.5 特に $F_{\mathcal{O}}$ が単射であるとき、 関手 F を忠実 (faithful) と呼ぶ。

問題 0.6 反変関手 $F : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{D}}$ は自然に双対圏 $\underline{\mathcal{C}}^o$ から圏 $\underline{\mathcal{D}}$ への共変関手と見なせることを示せ。

問題 0.7 対象$X, Y \in \underline{\mathcal{C}}$ に対して集合 $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X, Y)$ を対応させ、 関手 $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}} : \underline{\mathcal{C}}^o \times \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{S}}$ を定義せよ。

関手 $F,G:\underline{\mathcal{C}}\to\underline{\mathcal{D}}$ に対し、自然変換 $\Phi:F\to G$ とは次を満たす対応 $\Phi:\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\to\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}$ である：

(C1) 圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の対象 X に対して、$S(\Phi(X))=F(X)$ かつ$T(\Phi(X))=G(X)$ が成立する。

(C2) 圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の射 f に対して、$C_{\underline{\mathcal{D}}}(\Phi(T_{\underline{\mathcal{C}}}(f)),F(f))=C_{\underline{\mathcal{D}}}(G(f),\Phi(S_{\underline{\mathcal{C}}}(f))$ が成立する。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \\ Y \end{tikzcd} \quad => \quad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\Phi(X)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\Phi(Y)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

注 0.8 関手 F,G は、自然変換 $\Phi:F\to G$ で $\Phi(X)$ が常に同型となるものが存在するとき自然同値であると呼ばれる。　またこのような Φ が自然同値と呼ばれることもある。

定義 0.9 関手 $F:\underline{\mathcal{C}}\to\underline{\mathcal{D}}$ が関手 $G:\underline{\mathcal{D}}\to\underline{\mathcal{C}}$ の右随伴関手とは $\underline{\mathcal{D}}^o\times\underline{\mathcal{C}}$ から $\underline{\mathcal{S}}$ への関手 $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(G(X),Y)$ と $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}(X,F(Y))$ が自然同値であることである。　また関手 G は関手 F の左随伴関手と呼ばれる。

0.4 豊穣圏・強化された圏 (enriched category)

合成射をつくる写像 $C_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y,Z):\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(Y,Z)\times\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y)\to\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Z)$ は、対応 $C_{\underline{\mathcal{C}}}:\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\times\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\times\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\to\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{S}}}$ と同一視できる。　直積を持つ圏 $\underline{\mathcal{R}}$ と直積を保つ共変関手 $\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}:\underline{\mathcal{R}}\to\underline{\mathcal{S}}$ に対して、圏$\underline{\mathcal{C}}$ が$\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}$ で $\underline{\mathcal{R}}$ まで強化された圏（豊穣圏）であるとは次の条件が成立することである：

(A5) 対応 $\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}:\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\times\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\to\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{R}}}$ と対応 $C^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}:\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\times\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\times\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\to\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{R}}}$ が存在し次を満たす。

(1) $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}=\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{O}}\circ\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}, C_{\underline{\mathcal{C}}}=\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}\circ C^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}$ かつ $C^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y,Z):\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(Y,Z)\times\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y)\to\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Z)$

(2) $C^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y,Z)(h,C^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Z,W)(g,f))=C^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y,W)(C^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(Y,Z,W)(h,g),f)$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{R}}} \arrow[d, "\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{O}}"] \\ \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\times\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \arrow[ur, "\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}"] \arrow[r, "\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}"'] & \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{S}}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{R}}} \arrow[d, "\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}"] \\ \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\times\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\times\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \arrow[ur, "C^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}"] \arrow[r, "C_{\underline{\mathcal{C}}}"'] & \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{S}}} \end{tikzcd}$$

ここで、$\underline{\mathcal{R}}$ まで強化された圏は、$\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}$ や $C^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}$ を忘れると通常の圏と見なせることを注意する。

注 0.10 忘却関手 $\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{T}}}:\underline{\mathcal{T}}\to\underline{\mathcal{S}}$ で位相空間の圏 $\underline{\mathcal{T}}$ まで強化された圏は、位相圏と呼ばれる。

問題 0.11 アーベル群の圏 $\underline{\mathcal{A}}$ は$\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{A}}}:\underline{\mathcal{A}}\to\underline{\mathcal{S}}$ で $\underline{\mathcal{A}}$ まで強化された圏であることを示せ。

ところで、位相空間の圏 $\underline{\mathcal{T}}$ は自明なもの以上に強化はできないのであろうか？

次に圏 $\underline{\mathcal{C}}, \underline{\mathcal{D}}$ が $\mathcal{E}^{\mathcal{R}} : \underline{\mathcal{R}} \to \underline{\mathcal{S}}$ で $\underline{\mathcal{R}}$ まで強化された圏のとき、その間の関手には、いかなる条件が付随すべきであろうか? まず $F = (F_{\mathcal{O}}, F_{\mathcal{M}})$ が通常の意味で圏 $\underline{\mathcal{C}}$ から圏 $\underline{\mathcal{D}}$ への共変関手であったとする。 このとき、圏 $\underline{\mathcal{C}}$ のいかなる二つの対象 X, Y に対しても、$F_{\mathcal{M}}$ は写像 $F_{\mathcal{M}}(X,Y) : \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(X), F_{\mathcal{O}}(Y))$ を誘導し、対応 $F_{\mathcal{M}} : \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{S}}}$ を与える。さて F が、$\mathcal{E}^{\mathcal{R}} : \underline{\mathcal{R}} \to \underline{\mathcal{S}}$ で強化された構造を保つ共変関手であるとは、次の条件を満たすこととする:

(B4) 対応 $F^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}} : \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{R}}}$ が存在し次が成立する。

(1) $F_{\mathcal{M}} = \mathcal{E}^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}} \circ F^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}}$ かつ $F^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}}(X,Y) : \mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \to \mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(X), F_{\mathcal{O}}(Y))$

(2) $F^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}}(X,Z)(C^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y,Z)(g,f)) = C^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(X), F_{\mathcal{O}}(Y), F_{\mathcal{O}}(Z))(F^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}}(Y,Z)(g), F^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}}(X,Y)(f)$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \arrow[rr, "F^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}}(X,Y)"] \arrow[dd, dotted, "\mathcal{E}^{\mathcal{R}}_{\mathcal{O}}"'] & {} \arrow[dd, dotted, "\mathcal{E}^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}}"'] & \mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(X), F_{\mathcal{O}}(Y)) \arrow[dd, dotted, "\mathcal{E}^{\mathcal{R}}_{\mathcal{O}}"'] & \text{in } \underline{\mathcal{R}} \\
\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \ni (X,Y) \arrow[ur, dotted, "F^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}}"] \arrow[dr, dotted, "F_{\mathcal{M}}"'] & & & & \\
 & \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \arrow[rr, "F_{\mathcal{M}}(X,Y)"'] & {} & \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(X), F_{\mathcal{O}}(Y)) & \text{in } \underline{\mathcal{S}}
\end{tikzcd}$$

同様に $F = (F_{\mathcal{O}}, F_{\mathcal{M}})$ が通常の意味で圏 $\underline{\mathcal{C}}$ から圏 $\underline{\mathcal{D}}$ への反変関手であったとする。 このとき、圏 $\underline{\mathcal{C}}$ のいかなる二つの対象 X, Y に対しても、$F_{\mathcal{M}}$ は写像 $F_{\mathcal{M}}(X,Y) : \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(Y), F_{\mathcal{O}}(X))$ を誘導し、対応 $F_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}} \circ (F_{\mathcal{O}} \times F_{\mathcal{O}}) \circ \tau$ を与える。 ただし、$\tau(X,Y) = (Y,X)$ である。さて F が、$\mathcal{E}^{\mathcal{R}} : \underline{\mathcal{R}} \to \underline{\mathcal{S}}$ で強化された構造を保つ反変関手であるとは、次の条件を満たすこととする:

(B4^o) 対応 $F^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}} : \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{R}}}$ が存在し次が成立する。

(1) $F_{\mathcal{M}} = \mathcal{E}^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}} \circ F^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}}$ かつ $F^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}}(X,Y) : \mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \to \mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(Y), F_{\mathcal{O}}(X))$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \arrow[rr, "F^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}}(X,Y)"] \arrow[dd, dotted, "\mathcal{E}^{\mathcal{R}}_{\mathcal{O}}"'] & {} \arrow[dd, dotted, "\mathcal{E}^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}}"'] & \mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(Y), F_{\mathcal{O}}(X)) \arrow[dd, dotted, "\mathcal{E}^{\mathcal{R}}_{\mathcal{O}}"'] & \text{in } \underline{\mathcal{R}} \\
\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \ni (X,Y) \arrow[ur, dotted, "F^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}}"] \arrow[dr, dotted, "F_{\mathcal{M}}"'] & & & & \\
 & \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \arrow[rr, "F_{\mathcal{M}}(X,Y)"'] & {} & \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(Y), F_{\mathcal{O}}(X)) & \text{in } \underline{\mathcal{S}}
\end{tikzcd}$$

特に強化された構造を保つ反変関手は、双対圏からの強化された構造を保つ共変関手とみなせる。

問題 0.12 強化された構造を保つ関手の間の<u>強化された構造を保つ自然変換</u>の定義を与えよ。

0.5　番外・強 n–圏 (strict n–category)

高次に強化された圏として、いわゆる『n–圏』を捉えることができる。　まず言葉の準備をする：

定義 0.13 小論では$\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}:\underline{\mathcal{R}}\to\underline{\mathcal{S}}$ で強化された小圏全体のなす圏を $\underline{Cat(\mathcal{E}^{\mathcal{R}})}$ で表すことにする。

例えば、小圏全体のなす圏は $\underline{Cat}=\underline{Cat(1_{\mathcal{S}})}$ である。　さて、次の二つの補題を用意する：

補題 0.14 直積を保つ関手 $\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}:\underline{\mathcal{R}}\to\underline{\mathcal{S}}$ で強化された二つの小圏 $\underline{\mathcal{C}},\underline{\mathcal{D}}$ をとり、それらの強化された構造を各々 $\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}},\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{D}}}$ とする。　このとき、$\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}\times\underline{\mathcal{D}}}:\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\times\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{D}}}\to\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{R}}}$ を $\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}\times\underline{\mathcal{D}}}((X,Y),(X',Y'))=\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,X')\times\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{D}}}(Y,Y')$ によって定めると、直積圏 $\underline{\mathcal{C}}\times\underline{\mathcal{D}}$ は $\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}$ で強化された圏となる。　従って、$\underline{Cat(\mathcal{E}^{\mathcal{R}})}$ は圏論的な意味での直積を持つ圏となり、$\underline{Cat}$ への忘却関手は直積を保つ関手となる。

問題 0.15 上の補題に証明を与えよ。

補題 0.16 直積を保つ二つの関手 $\mathcal{E}(\underline{\mathcal{S}'}):\underline{\mathcal{S}'}\to\underline{\mathcal{R}},\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}:\underline{\mathcal{R}}\to\underline{\mathcal{S}}$に対して、$\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{S}'}}=\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}\circ\mathcal{E}(\underline{\mathcal{S}'})$ で強化された圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の強化された構造を $\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{S}'}}_{\underline{\mathcal{C}}}$ とする。　このとき、$\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}=\mathcal{E}(\underline{\mathcal{S}'})_{\mathcal{O}}\circ\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{S}'}}_{\underline{\mathcal{C}}}$ は、$\underline{\mathcal{C}}$ の $\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}$ で強化された構造を与え、$\mathcal{E}(\underline{\mathcal{R}'})$ は関手 $\mathcal{E}(\underline{\mathcal{R}'})_{\#}:\underline{Cat(\mathcal{E}^{\mathcal{R}'})}\to\underline{Cat(\mathcal{E}^{\mathcal{R}})}$ を誘導する。

問題 0.17 上の補題に証明を与えよ。

さて普遍強 n–圏 $\underline{Cat(n)}$ と忘却関手 $\mathcal{E}(n):\underline{Cat(n)}\to\underline{Cat(n{-}1)}$ を次のように帰納的に与える：

(S1) 普遍強 0–圏 $\underline{Cat(0)}$ とは、集合の圏 $\underline{\mathcal{S}}$ のことであり、$\mathcal{E}(0)=1_{\underline{\mathcal{S}}}:\underline{Cat(0)}\to\underline{\mathcal{S}}$ とする。

(S2) 普遍強 n–圏 $\underline{Cat(n)}$ と忘却関手 $\mathcal{E}(n):\underline{Cat(n)}\to\underline{Cat(n{-}1)}$ が与えられているとき

- (1) 集合の圏への忘却関手を $\mathcal{E}^{\underline{Cat(n)}}=\mathcal{E}(0)\circ\cdots\circ\mathcal{E}(n):\underline{Cat(n)}\to\underline{\mathcal{S}}$ で定義する。
- (2) 普遍強 $n{+}1$–圏を、$\underline{Cat(n{+}1)}=\underline{Cat(\mathcal{E}^{\underline{Cat(n)}})}$ で定義する。
- (3) 普遍強 n–圏 $\underline{Cat(n)}$ への忘却関手を、$\mathcal{E}(n{+}1)=\mathcal{E}(n)_{\#}$ で定義する。

定義 0.18 集合の圏への忘却関手 $\mathcal{E}^{\underline{Cat(n-1)}}:\underline{Cat(n{-}1)}\to\underline{\mathcal{S}}$ で強化された圏を強 n–圏と呼ぶ。

さらにこれらの無限系列を考えることもできる：

(S4) 強 ∞–小圏 (強 ω–小圏) とは、強化された小圏の系列 $\{\underline{\mathcal{C}}_n\in\underline{Cat(n)};n\geq 1\}$ であって、$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(n)(\underline{\mathcal{C}}_n)=\underline{\mathcal{C}}_n$ を満たすものである。　ただし、$\mathcal{E}(n)=(\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(n),\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(n))$ は忘却関手である。

(S5) 普遍強 ∞–圏 (普遍強 ω–圏) $\underline{Cat(\omega)}$ とは、強 ∞–小圏 (強 ω–小圏) 全体のなす圏である。

1　位相空間論から

1.1　位相空間の基礎

集合 X に対し、次の公理系を満たす部分集合族 $Top(X)$ (開集合族) が与えられているとき、組 $(X, Top(X))$ を単に X で表し、位相空間と呼ぶ。

(T1) $\emptyset \in Top(X)$ かつ $X \in Top(X)$ である。

(T2) $Top(X)$ の任意の有限部分族 $\{O_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ に対し $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in Top(X)$ である。

(T3) $Top(X)$ の任意の部分族 $\{O_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ に対し $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in Top(X)$ である。

位相空間 X に対して、次の条件を満たす部分集合族 $\mathcal{U}$ を X の「準開基」と呼ぶ。

(準開基) 任意の点 $x \in X$ と任意の開集合 $O \subseteq X$ に対して $x \in O$ ならば、$\mathcal{U}$ の有限部分族 $\{U_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ が存在して $x \in \bigcap_\lambda U_\lambda \subseteq O$ を満たす。

また部分集合と (同値関係 $\sim$ による) 商集合の位相は次のように与えられる。

(相対位相) $A \overset{i}{\hookrightarrow} i(A) \subseteq X$ のとき、位相 $Top(A) = \{i^{-1}(O)\,|\,O \in Top(X)\}$ を A に導入する。

(等化位相) $Y \overset{p}{\twoheadrightarrow} Y/\sim = B$ のとき、位相 $Top(B) = \{O\,|\,p^{-1}(O) \in Top(Y)\}$ を B に導入する。

また $K \subseteq X$ がコンパクトとは、次の性質が満たされることである：

(コンパクト) $Top(X)$ の任意の部分族 $\{O_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ に対し、$K \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ ならば Λ の有限部分集合 $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subseteq \Lambda$ で $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n O_{\lambda_i}$ を満たすものが取れる。

さて、位相空間には様々な分離公理が考えられるが、ここでは次の弱 Hausdorff 性を採用する：

(弱 Hausdorff) 任意のコンパクト部分集合は (閉かつ) 相対位相に関して Hausdorff である。

さらに、空間 X から Y への連続写像の全体 $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{T}}}(X,Y)$ に位相を導入し、$\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{T}}}^{\mathcal{T}}(X,Y)$ で表す：

(CO) 部分集合族 $\mathcal{U} = \{W(C,O) \subseteq \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{T}}}(X,Y)\,;\,C$ は X のコンパクト集合で O は Y の開集合$\}$ を $W(C,O) = \{f : X \to Y\,;\,f(C) \subseteq U\}$ により定め、$\mathcal{U}$ を準開基とする位相を導入する。

問題 1.1 $X \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト集合とし、$Y = \mathbb{R}^m$ とするとき、上の compact-open 位相が sup ノルムによる位相に一致することを示せ。

問題 1.2 コンパクトな位相空間から弱 Hausdorff 空間への全単射は同相写像であることを示せ。

1.2 コンパクト生成空間

すべての弱 Hausdorff 空間は、コンパクト生成位相を持つものにコンパクト集合族を変更せずに取り換えることができ、従って、この変更でホモトピー群や(コ)ホモロジー群は不変に保たれる。

定義 1.3 弱 Hausdorff 空間 X がコンパクト生成であるとは、次の条件が満たされることである。

(CG) 位相空間 X の部分集合 A が閉集合である為には、任意のコンパクト集合 C に対して $A\cap C$ がコンパクトであることが必要十分である。

コンパクト生成空間は k-space とも呼ばれ、よく知られているように、任意のコンパクト集合が閉集合となる。　ここでは (弱 Hausdorff) コンパクト生成空間と連続写像のなす圏を $\underline{\mathcal{K}}$ で表す。

問題 1.4　(1) 局所コンパクトな弱 Hausdorff 空間がコンパクト生成空間であることを示せ。

(2) 第一加算公理を満たす Hausdorff 空間はコンパクト生成空間であることを示せ。　特に距離空間はコンパクト生成空間である。

さて、前節の compact-open 位相により写像空間はめでたく位相空間 $\mathcal{M}^{\mathcal{T}}_{\underline{\mathcal{T}}}(X,Y)$ となり、圏 $\underline{\mathcal{T}}$ は $\mathcal{E}^{\mathcal{T}}:\underline{\mathcal{T}}\to\underline{\mathcal{S}}$ で $\underline{\mathcal{T}}$ まで強化されたのだが、残念ながらこのままでは圏論的には良い構造とは言えない：　例えば $\mathcal{M}^{\mathcal{T}}_{\underline{\mathcal{T}}}(X,\mathcal{M}^{\mathcal{T}}_{\underline{\mathcal{T}}}(Y,Z))$ と $\mathcal{M}^{\mathcal{T}}_{\underline{\mathcal{T}}}(X\times_{\underline{\mathcal{T}}}Y,Z)$ は同相になるとは限らない。　ただし、$X\times_{\underline{\mathcal{T}}}Y$ は直積集合 $X\times Y$ に通常の直積位相により位相空間の構造を入れたものである。　つまり、写像空間を作る関手と直積をとる関手が随伴関手にならないという致命的な欠陥を持つ。

定義 1.5 共変関手 $c:\underline{\mathcal{T}}\to\underline{\mathcal{K}}$ を次で定める：

(1) $X=(X,Top(X))$ に対して $c(X)=(X,\widehat{Top(X)})$ とする。　ただし

(2) $O\in\widehat{Top(X)}\iff$ 任意のコンパクト集合 C に対して $(X\smallsetminus O)\cap C$ はまたコンパクトである。

このとき、$f:\underline{\mathcal{K}}\to\underline{\mathcal{T}}$ を忘却関手、$k=f\circ c$ として次の命題 (証明しない) が成立する。

命題 1.6　(1) 弱 Hausdorff 空間 X がコンパクト生成なら、$k(X)=X$ である。

(2) 任意の弱 Hausdorff 空間 X に対して、$k(X)$ はコンパクト生成空間である。

(3) コンパクト生成空間 X,Y に対して $\mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X,Y)=c(\mathcal{M}^{\mathcal{T}}_{\underline{\mathcal{T}}}(f(X),f(Y)))$ とおくと、圏 $\underline{\mathcal{K}}$ は忘却関手 $\mathcal{E}^{\mathcal{K}}:\underline{\mathcal{K}}\to\underline{\mathcal{S}}$ で $\underline{\mathcal{K}}$ まで強化された圏となる。

(4) 任意のコンパクト生成空間 X と弱 Hausdorff 空間 Y に対して、$\mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X, c(Y))$ と $\mathcal{M}^{\mathcal{T}}_{\underline{\mathcal{T}}}(f(X), Y)$ は自然に同相となる。　従って、関手 c は関手 f の右随伴関手である。

次に、直積は $X{\times}_{\underline{\mathcal{K}}}Y = c(f(X){\times}_{\underline{\mathcal{T}}}f(Y))$ と $g{\times}_{\underline{\mathcal{K}}}h = c(f(g){\times}_{\underline{\mathcal{T}}}f(h))$ により定義され次を満たす。

命題 1.7　(1) 直積空間 $X{\times}_{\underline{\mathcal{K}}}Y$ は、圏論的な意味での圏 $\underline{\mathcal{K}}$ での「直積」を与える。

(2) 自然な同相により、直積空間 $X{\times}_{\underline{\mathcal{K}}}Y$ は可換かつ結合的と見なせる。

(3) 任意の局所コンパクトな Hausdorff 空間と任意のコンパクト生成空間に対して、$X{\times}_{\underline{\mathcal{K}}}Y$ は通常の直積空間 $X{\times}_{\underline{\mathcal{T}}}Y$ に一致する。

圏 $\underline{\mathcal{K}}$ において、$i: A \to X$ が「中への同相」とは、「i が単射かつ X から定まる A の相対位相がコンパクト生成空間 A の位相と一致」することである。　また $p: Y \twoheadrightarrow B$ が「商写像」とは、「p が全射かつ Y から定まる B の等化位相がコンパクト生成空間 B の位相と一致」することである。

命題 1.8　(1) コンパクト生成空間の閉集合や正則開集合の包含写像は、中への同相である。

(2) コンパクト生成空間 Y からの全射 $p: Y \to B$ が任意のコンパクト集合 $C \subseteq Y$ に対して $p^{-1}(p(C))$ を Y の閉集合とすれば、p は商写像となる。

(3) 圏 $\underline{\mathcal{K}}$ での中への同相 $i: A \to X, i': A' \to X'$ に対し、$i{\times}_{\underline{\mathcal{K}}}i': A{\times}_{\underline{\mathcal{K}}}A' \to X{\times}_{\underline{\mathcal{K}}}X'$ もそうなる。

(4) 圏 $\underline{\mathcal{K}}$ での商写像 $p: Y \twoheadrightarrow B, p': Y' \twoheadrightarrow B'$ に対し、$p{\times}_{\underline{\mathcal{K}}}p': Y{\times}_{\underline{\mathcal{K}}}Y' \twoheadrightarrow B{\times}_{\underline{\mathcal{K}}}B'$ もそうなる。

最後に、写像空間と直積の関係・指数法則に話を戻す。

命題 1.9　(1) 圏 $\underline{\mathcal{K}}$ の中では、$\mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X, Y{\times}_{\underline{\mathcal{K}}}Z)$ と $\mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X, Y){\times}_{\underline{\mathcal{K}}}\mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X, Z)$ は自然に同相である。

(2) 圏 $\underline{\mathcal{K}}$ の中では、代入写像 $e: \mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X, Y){\times}_{\underline{\mathcal{K}}}X \to Y$ $(e(f, x) = f(x))$ は常に連続である。

(3) 圏 $\underline{\mathcal{K}}$ の中では、$\mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X{\times}_{\underline{\mathcal{K}}}Y, Z)$ と $\mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X, \mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(Y, Z))$ は自然に同相である。

系 1.9.1 関手 $\mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(Y,\ \ )$ は関手 $(\ \ ){\times}Y$ の右随伴関手である。

コンパクト生成空間の系統的な解説と上記の各命題の証明は、MacLane [94], Whitehead [146], Hirashima [57] 等を参照されたい。　ただし、[94], [146] は弱 Hausdorff ではなく、Hausdorff の枠組みを用いているが、その証明はそのままで、弱 Hausdorff のみを仮定したものに置き換えられる。

これ以後特に断らない限り、コンパクト生成空間の圏 $\underline{\mathcal{K}}$ の枠組みの下で講義を進め、紛れの恐れの無い場合には $\mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}$ を $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{K}}}$ あるいは $\mathcal{M}$ と、また ${\times}_{\underline{\mathcal{K}}}$ を $\times$ と略記することがある。

1.3　連続写像の構成

分かりやすい場所で与えられた連続写像から新たな連続写像を構成することを考える。

閉部分集合有限個の和集合で表される場合： $X=\bigcup_{i=1}^{n}F_i$ で、 F_i が X の閉集合であったとする。

対応 $f:X\to Y$ が有限個の写像の族 $f_i:F_i\to Y$ を用いて $f|_{F_i}=f_i$ により定義されるとき、 f が連続写像である必要十分条件が次で与えられる。

(1) 任意の i,j に対して「$f_i|_{F_i\cap F_j}=f_j|_{F_i\cap F_j}$」が成立し、 f は一意となる。

(2) 任意の i に対して、 写像 f_i は連続である。

開部分集合の和集合で表される場合： 対応 $f:X\to Y$ が写像の族 $f_\lambda:U_\lambda\to Y$ を用いて $f|_{U_\lambda}=f_\lambda$ により定義されるとき、 f が連続写像である必要十分条件が次で与えられる。

(1) 任意の λ,μ に対して「$f_\lambda|_{U_\lambda\cap U_\mu}=f_\mu|_{U_\lambda\cap U_\mu}$」が成立し、 f は一意となる。

(2) 任意の λ に対して、 写像 f_λ は連続である。

商空間である場合： 商写像 $p:\widetilde{X}\twoheadrightarrow X$ に対し、 対応 $f:X\to Y$ が写像 $\widetilde{f}:\widetilde{X}\to Y$ を用いて $f\circ p=\widetilde{f}$ により定義されるとき、 対応 f が連続写像である必要十分条件が次で与えられる。

(1) 任意の $a,b\in\widetilde{X}$ に対して「$p(a)=p(b)\implies\widetilde{f}(a)=\widetilde{f}(b)$」が成立し、 f は一意となる。

(2) 合成写像 $f\circ p:\widetilde{X}\to Y$ は連続である。

1.4　直積と対角線写像

二つの空間 X,Y の直積 $X\times Y$ は次の性質を持つ。　ただし、 記号 $\approx$ は同相を表す。

命題 1.10　(1) 自然な同相 $X\times\{*\}\approx X\approx\{*\}\times X$ が存在する。

(2) 自然な同相 $(X\times Y)\times Z\approx X\times(Y\times Z)$ が存在する。

(3) 自然な同相 $X\times Y\approx Y\times X$ が存在する。

そこで、 例えば $X_1,...,X_n$ の直積は括弧の付け方を区別せず $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ あるいは $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}X_i$ などと表す。　特に$X_1=\cdots=X_n=X$のとき、 $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}X_i$ を $\prod^{n}X$ などと表すことがある。

定義 1.11 次で与えられる連続写像を空間 X の対角線写像と呼ぶ。

（対角線写像） 式 $\Delta^X(x)=(x,x)$ で写像 $\Delta=\Delta^X:X\to X\times X$ を定義する。

（多重対角線写像） 写像 $\Delta_n=\Delta_n^X:X\to\prod^n X$ を次式で帰納的に定義する。

$$(1)\ \Delta_2^X=\Delta^X \qquad (2)\ \Delta_{i+1}^X=(\Delta_i^X\times 1_X)\circ\Delta^X:X\to X\times X\to(\prod^i X)\times X=\prod^{i+1} X$$

1.5　位相和と折重ね写像

二つの空間 X,Y に対して、 これらを含む大きな空間E があると仮定する。　このとき、 E の中では X,Y には共通部分がある可能性があるが、 これを区別し共通部分が無いものと考えての和集合 (位相和) を定義する。　これは直積の双対的な概念を与えるものである。

定義 1.12 空間 X,Y に対して、$X\amalg Y=X\times\{1\}\cup Y\times\{2\}\subseteq W\times\{1,2\}$ という形の部分空間 $X\amalg Y$ を位相和と呼ぶ。　ただし、 集合 $\{1,2\}$ は離散位相によりコンパクト生成空間とみなす。

このとき、 直積と同様に次の性質が導かれる。

命題 1.13　(1) 自然な同相 $X\amalg\emptyset\approx X\approx\emptyset\amalg X$ が存在する。

(2) 自然な同相 $(X\amalg Y)\amalg Z\approx X\amalg(Y\amalg Z)$ が存在する。

(3) 自然な同相 $X\amalg Y\approx Y\amalg X$ が存在する。

そこで、 例えば $X_1,X_2,...,X_n$ の位相和は括弧の付け方を区別せず $X_1\amalg X_2\amalg\cdots\amalg X_n$ あるいは $\coprod_{i=1}^n X_i$ などと表す。　特に $X_1=X_2=\cdots=X_n=X$ のとき、 $\coprod_{i=1}^n X_i$ を $\coprod^n X$ などと表すことがある。

定義 1.14 次で与えられる連続写像を空間 X の折重ね写像と呼ぶ。

（折重ね写像） 式 $\nabla^X(x,t)=x$ で写像 $\nabla=\nabla^X:X\amalg X=X\times\{1,2\}\to X$ を定義する。

（多重折重ね写像） 写像 $\nabla_n=\nabla_n^X:\coprod^n X\to X$ を次式で帰納的に定義する。

$$(1)\ \nabla_2^X=\nabla^X \qquad (2)\ \nabla_{i+1}^X=\nabla^X\circ(\nabla_i^X\amalg 1_X):\coprod^{i+1}X=(\coprod^i X)\amalg X\to X\amalg X\to X$$

1.6　空間の結 (join)

標準 n-単体と呼ばれるコンパクトな凸集合 $\mathbf{\Delta}^n$ の構造をもう少し詳しく調べてみる。

定義 1.15 $\mathbf{\Delta}^n=\left\{(t_0,\cdots,t_n)\in[0,1]^{n+1}\;\middle|\;\sum_{i=0}^n t_i=1\right\}$

さて、ユークリッド空間内の空でない二つの図形 $X_0 \subseteq E_0, X_1 \subseteq E_1$ を $E = E_0{\times}\mathbb{R}{\times}E_1$に次のように埋め込むことで、$X_0, X_1$ を E の中の (一般の位置にある) 図形と考えることができる：

$$X_0 \subseteq E_0 \approx E_0{\times}\{0\}{\times}\{0\} \subseteq E_0{\times}\mathbb{R}{\times}E_1 = E,$$
$$X_1 \subseteq E_1 \approx \{0\}{\times}\{1\}{\times}E_1 \subseteq E_0{\times}\mathbb{R}{\times}E_1 = E.$$

このとき、次の様に定義されるユークリッド空間 E 内の図形 $X_0{*}X_1$ を X_0, X_1 の「結」と呼ぶ。

$$X_0{*}X_1 = \{tx + (1-t)y \in E \mid x \in X_0, y \in X_1, 0 \leq t \leq 1\}$$

問題 1.16 $\mathbf{\Delta}^n$ は $\mathbf{\Delta}^{n-1}$ と一点との結に同相であることを示せ。

一般の空間 X_0, X_1 に対して、次の様に定義される空間 $X_0{*}X_1$ を X_0, X_1 の「結」と呼ぶ。

$$X_0{*}X_1 = (X_0 \amalg \mathbf{\Delta}^1{\times}X_0{\times}X_1 \amalg X_1)/\sim_{join}, \tag{1.1}$$

ただし、$\sim_{join}$ は次の関係で生成される同値関係である：

$$X_0 \ni x_0 \sim_{join} (1,0;x_0,x_1) \in \mathbf{\Delta}^1{\times}X_0{\times}X_1, \qquad X_1 \ni x_1 \sim_{join} (0,1;x_0,x_1) \in \mathbf{\Delta}^1{\times}X_0{\times}X_1.$$

問題 1.17 ユークリッド空間内の空でない二つの図形 $X_0 \subseteq E_0, X_1 \subseteq E_1$ に対して、上の二種類の結の定義が同相な空間を定めることを確かめよ。

さて、$n+1$ 個の空間 $X_0,...,X_n$ に対し次の空間 $X_0{*}\cdots{*}X_n = \mathop{*}\limits_{i=0}^{n} X_i$ を$X_0,...,X_n$の「結」と呼ぶ：

$$X_0{*}\cdots{*}X_n = (\mathbf{\Delta}^n{\times}X_0{\times}\cdots{\times}X_n \amalg \coprod_{i=0}^{n} E_i)/\sim_{mjoin}, \quad E_i = X_0{*}\cdots{*}X_{i-1}{*}X_{i+1}{*}\cdots{*}X_n.$$

ただし、$\sim_{mjoin}$ は次の $n+1$ 個の関係で生成される同値関係である：

$$(t_0,...,t_{i-1},0,t_{i+1},...,t_n;x_0,...,x_n) \sim_{mjoin} [t_0,...,t_{i-1},t_{i+1},...,t_n;x_0,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n] \in E_i.$$

ただし、i は $0 \leq i \leq n$ の範囲を動く。　このとき、空間の結 $X_0{*}X_1$ は次の性質を持つ。

命題 1.18 (1) 自然な同相 $\emptyset{*}X \approx X \approx X{*}\emptyset$ が存在する。

(2) X_0, X_1, X_2 が全て空でないとき、自然な同相 $(X_0{*}X_1){*}X_2 \approx X_0{*}(X_1{*}X_2)$ が存在する。

(3) X_0, X_1 が共に空でないとき、自然な同相 $X_0{*}X_1 \approx X_1{*}X_0$ が存在する。

注 1.19 $X_0,\dots,X_n$ が全て空でないとき、自然な同相 $X_0*\cdots*X_n \approx (X_0*\cdots*X_{n-1})*X_n$ が存在する。

2 基点付きの空間

2.1 相対空間

空間 A を固定する。 例えば、$A=\emptyset$ や $A=\{*\}$ などの場合が典型的である。

定義 2.1 次で与えられる圏を $\underline{\mathcal{K}}_A$ で表し、A 相対空間と A 相対写像の圏と呼ぶ。

(A 相対空間) 空間 X と中への同相写像 $i^X : A \to X$ の組 $(X; i^X)$ を単に $X=(X;A)$ と書き A 相対空間と呼び、$A \xrightarrow{=} A$ を A 自身と同一視する。 このとき、A は始対象である。

(A 相対写像) 写像 $f : X \to Y$ が A 相対空間 $(X;A)$ から $(Y;A)$ への A 相対写像であるとは、条件 $f \circ i^X = i^Y$ を満たすことである。

A 相対空間の写像 $i : K \hookrightarrow X$ が空間 X の中への同相のとき、$(X,K;A)$ などと表して (A 相対) 空間対と呼び、$(X,A;A)$ を $X=(X;A)$ などと略記する。 また A 相対空間 $M \subseteq K, L \subseteq X$ を三系 $(X;K,L)=(X;K,L;A)$ あるいは対の包含関係 $(Y,M) \subseteq (X,K)$ などで表す。

さらに (A 相対) 空間対 $(X,K), (X',K')$ に対し、(A 相対) 写像 $f : X \to X'$ が (A 相対) 対写像とは、$f(K) \subseteq K'$ が成立することであり、$f : (X,K)=(X,K;A) \to (X',K';A)=(X',K')$ などと表す。 A 相対空間の圏 $\underline{\mathcal{K}}_A$ での空間対と対写像のなす圏を $\underline{\mathcal{K}}^2_A$ で表す。 このとき、圏 $\underline{\mathcal{K}}^2_A$ での対写像 $g : (X,K) \to (X',K')$ と $(Y,L) \subseteq (X,K)$ に対して、g の $\underline{\mathcal{K}}^2_A$での$(Y,L)$ への制限を $g|_{(Y,L)} : (Y,L) \to (X',K')$ などと表す。 特に $g|_X$ で $\underline{\mathcal{K}}_A$ での写像$g : X \to X'$ を、$g|_K$ で $\underline{\mathcal{K}}_A$ での写像 $g|_K : K \to K'$ を表す。 また $g|_{X\smallsetminus K}$ で $\underline{\mathcal{K}}$ での写像 $g|_{X\smallsetminus K} : X\smallsetminus K \to X'\smallsetminus K'$ を表す。

(相対同相) $g|_{X\smallsetminus K} : X\smallsetminus K \to X'\smallsetminus K'$が 同相写像であるとき、$g$ を相対同相と呼ぶ。

定義 2.2 特に $A=\{*\}$ (一点空間) として得られる $\{*\}$ 相対空間の圏を $\underline{\mathcal{K}}_*$ で表す。

さて、直積空間 $X\times Y$ の部分空間 $X\vee Y = X\times *_Y \cup *_X \times Y$ を一点に潰してできる空間を $X\wedge Y$ で表すと、$(\ \ )\wedge Y$ は圏 $\underline{\mathcal{K}}_*$上の共変関手となる。 また、空間 X から Y への基点を保つ写像の全体$\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{K}}_*}(X,Y)$ は $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{K}}}(X,Y)$ の部分集合であり、これは位相空間 $\mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X,Y)$ に強化することができるので、その部分空間としての位相を導入しコンパクト生成空間としたものを $\mathcal{M}^{\mathcal{K}_*}_{\underline{\mathcal{K}}_*}(X,Y)$で表す。

定理 2.3 関手 $\mathcal{M}^{\mathcal{K}_*}_{\underline{\mathcal{K}}_*}(Y,\ \ )$ は関手 $(\ \ )\wedge Y$ の右随伴関手である。

また、$(\ )_+ : \underline{\mathcal{K}} \to \underline{\mathcal{K}}_*$ を基点となる一点を位相和するという関手とし、$I : \underline{\mathcal{K}}_* \to \underline{\mathcal{K}}$ を基点を忘れる忘却関手とすると、I は $(\ )_+$ の右随伴関手となる：$\mathcal{M}^{\mathcal{K}_*}_{\underline{\mathcal{K}}_*}(X_+, Y) \approx \mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X, I(Y))$.

2.2 一点和と折畳み写像

基点付きの空間 X, Y に対して、位相和をとると基点が二つになってしまう。　そこで、基点付きの空間の圏 $\underline{\mathcal{K}}_*$ では X, Y の圏論的な和集合として、次のような「一点和」を採用する。

定義 2.4 空間 X, Y に対し $X \vee Y = (X \amalg Y)/\sim_{sum} (*_X \sim_{sum} *_Y)$ により一点和 $X \vee Y$ を定める。

このとき、位相和と同様に次の性質が導かれる。

命題 2.5　(1) 自然な同相 $X \vee * \approx X \approx * \vee X$ が存在する。

(2) 自然な同相 $(X \vee Y) \vee Z \approx X \vee (Y \vee Z)$ が存在する。

(3) 自然な同相 $X \vee Y \approx Y \vee X$ が存在する。

そこで、例えば $X_1, X_2, ..., X_n$ の一点和は括弧の付け方を区別せず $X_1 \vee X_2 \vee \cdots \vee X_n$ あるいは $\bigvee_{i=1}^{n} X_i$ などと表す。　特に $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$ のとき、$\bigvee_{i=1}^{n} X_i$ を $\bigvee^{n} X$ などと表すことがある。

定義 2.6 次で与えられる連続写像を空間 X の折畳み写像と呼ぶ。

(折畳み写像) 写像 $\bar{\nabla} = \bar{\nabla}^X : X \vee X \to X$ を、商写像 $X \amalg X \to (X \amalg X)/\sim_{base} = X \vee X$ により $\nabla^X : X \amalg X \xrightarrow{\nabla} X$ が $X \vee X$ の上に誘導する写像とする。

(多重折畳み写像) 写像 $\bar{\nabla}_n = \bar{\nabla}^X_n : \bigvee^{n} X \to X$ を次式で帰納的に定義する。

$$(1)\ \bar{\nabla}^X_2 = \bar{\nabla}^X \qquad (2)\ \bar{\nabla}^X_{i+1} = \bar{\nabla}^X \circ (\bar{\nabla}^X_i \vee 1_X) : \bigvee^{i+1} X = (\bigvee^{i} X) \vee X \to X \vee X \to X$$

問題 2.7 各 $X_i \in \underline{\mathcal{K}}_*$ のとき、次を示せ：　$\bigvee_{i=1}^{n} (X_i)_+ = (\coprod_{i=1}^{n} X_i)_+$.

2.3 smash 積と簡約対角線写像

二つの空間 X, Y に対し、空間 $X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$ (smash product) は次の性質を持つ。

命題 2.8　(1) 自然な同相 $X \wedge S^0 \approx X \approx S^0 \wedge X$ が存在する。

(2) 自然な同相 $(X \wedge Y) \wedge Z \approx X \wedge (Y \wedge Z)$ が存在する。

(3) 自然な同相 $X\wedge Y \approx Y\wedge X$ が存在する。

そこで例えば $X_1, X_2, ..., X_n$ の smash 積は括弧の付け方を区別せず、 $X_1\wedge X_2\wedge\cdots\wedge X_n$ あるいは $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} X_i$ などと表す。　特に $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$ のとき $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} X_i$ を $\bigwedge\limits^{n} X$ と表すことがある。

定義 2.9 次で与えられる連続写像を空間 X の簡約対角線写像と呼ぶ。

(簡約対角線写像) 式 $\Delta^X(x) = [(x,x)]$ で写像 $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}^X : X \to X\times X \to X\wedge X$ を定義する。

(簡約多重対角線写像) 写像 $\bar{\Delta}_n = \bar{\Delta}^X_n : X \to \bigwedge\limits^{n} X$ を次式で帰納的に定義する。

$$(1)\ \bar{\Delta}^X_2 = \bar{\Delta}^X \qquad (2)\ \bar{\Delta}^X_{i+1} = (\bar{\Delta}^X_i\wedge 1_X)\circ\bar{\Delta}^X : X \to X\wedge X \to (\bigwedge^{i} X)\wedge X = \bigwedge^{i+1} X$$

基点付き空間 X の直積 $\prod^m X$ には、次の様な特別な部分空間を定義することができる。

定義 2.10 $\prod^m_{m-1} X = \{(x_1,\cdots,x_m) \in \prod^m X \mid$ どれか一つの x_i は基点に等しい$\}$ (fat wedge)

問題 2.11 各 $X_i \in \underline{\mathcal{K}}_*$ のとき、次を示せ： $\bigwedge^m X \approx \prod^m X/\prod^m_{m-1} X$, (smash product)

2.4 空間の約結 (reduced join)

$n{+}1$ 個の空間 $X_0, ..., X_n \in \underline{\mathcal{K}}_*$ に対して次の $X_0\bar{*}\cdots\bar{*}X_n = \mathop{\bar{*}}\limits_{i=0}^{n} X_i$を$X_0,...,X_n$ の「約結」と呼ぶ：

$$X_0\bar{*}\cdots\bar{*}X_n = (\boldsymbol{\Delta}^n\times X_0\times\cdots\times X_n \amalg \coprod_{i=0}^{n} \bar{E}_i)/\sim_{mjoin}, \quad \bar{E}_i = X_0\bar{*}\cdots\bar{*}X_{i-1}\bar{*}X_{i+1}\bar{*}\cdots\bar{*}X_n.$$

ただし、$\sim_{rjoin}$ は次の $n{+}1$ 個の関係で生成される同値関係である：

$$(t_0,...,t_i{=}0,...,t_n; x_0,...,x_n) \sim_{rjoin} [t_0,...,t_{i-1},t_{i+1},...,t_n; x_0,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n] \in \bar{E}_i,\ n{\geq}i{\geq}0,$$

$$(t_0,...,t_n; x_0,...,x_i{=}*,...,x_n) \sim_{rjoin} [t_0,...,t_{i-1}{+}t_i,t_{i+1},...,t_n; x_0,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n] \in \bar{E}_i,\ i{>}0,$$

$$(t_0,...,t_n; x_0{=}*,...,x_n) \sim_{rjoin} [t_1,...,t_{n-1},t_n+t_0; x_1,...,x_{n-1},x_n] \in \bar{E}_0.$$

このとき、空間の約結 $X_0\bar{*}X_1$ は次の性質を持つ。

命題 2.12 (1) X_0, X_1, X_2 に対し、自然な同相 $(X_0\bar{*}X_1)\bar{*}X_2 \approx X_0\bar{*}(X_1\bar{*}X_2)$ が存在する。

(2) $X_0, ..., X_n$ に対し、自然な同相 $X_0\bar{*}\cdots\bar{*}X_n \approx (X_0\bar{*}\cdots\bar{*}X_{n-1})\bar{*}X_n$ が存在する。

問題 2.13 各 $X_i \in \underline{\mathcal{K}}_*$ のとき、次を示せ： $\mathop{\bar{*}}\limits_{i=0}^{n} X_i \approx \Sigma^n(\bigwedge\limits_{i=0}^{n} X_i)$ (同相).

問題 2.14 各 $X_i \in \underline{\mathcal{K}}_*$ のとき、次を示せ： $I(\mathop{\bar{*}}\limits_{i=0}^{n} X_i) \simeq \mathop{*}\limits_{i=0}^{n} I(X_i)$ (ホモトピー同値).

第１章　　ホモトピー論

3　ホモトピー論の基礎

3.1　写像のホモトピーと空間のホモトピー同値

A 相対空間対の圏 $\underline{\mathcal{K}}^2_A$ の対写像 $f, f_0, f_1 : (X,K) = (X,K;A) \to (Y,L;A) = (Y,L)$ を考える。

（相対ホモトピック） $f \sim_{\mathrm{rel}A} g : (X,K;A) \to (Y,L;A) \iff \exists_{\text{連続写像}F:X\times[0,1]\to Y}$ s.t. $F(k,t) \in L$, $(k,t) \in K\times[0,1]$ & $F(x,0) = f(x), x \in X$ & $F(x,1) = g(x), x \in X$ & $F(a,t) = f(a) = g(a)$, $(a,t) \in i^X(A)\times[0,1]$. 特に A について明示する必要が無いときには、 $\sim$ でホモトピーを表す。

（相対レトラクト） fがレトラクト写像 $\iff \exists_{g:(Y,L;A)\to(X,K;A)}$ s.t. $f\circ g \sim_{\mathrm{rel}A} 1_{(Y,L;A)}$.

（相対ホモトピー同値） f がホモトピー同値写像 $\iff \exists_{g:(Y,L;A)\to(X,K;A)}$ s.t. $f\circ g \sim_{\mathrm{rel}A} 1_{(Y,L;A)}$ & $g\circ f \sim 1_{(X,K;A)}$. また、このとき g を f のホモトピー逆写像という。

空間対 (X,K) から空間対 (Y,L) へのレトラクト写像が存在するとき、 (X,K) は (Y,L)を支配すると言う。　また空間 (X,K) から空間 (Y,L) へのホモトピー同値写像が存在するとき、 (X,K) と (Y,L) はホモトピー同値であると呼ばれ、記号で $(X,K) \simeq_{\mathrm{rel}A} (Y,L)$ などと表される。

（可縮） X が可縮 $\iff X \simeq *$

問題 3.1 (相対) ホモトピー同値であるという関係は同値関係であることを示せ。

3.2　接着空間とその双対

$i : A \hookrightarrow X$ を中への同相とする対 (X,A) と写像 $f : A \to Y$ に対し、対 (Z,Y) を次で定める。

$$Z = (X \amalg Y)/\sim_{attach}, \qquad A \ni a \sim_{attach} f(a) \in Y.$$

この商集合 Z に $X \amalg Y$ からの商位相を入れてできた空間を f による接着空間と呼び、記号 $X \cup_f Y$ で表す。　このとき、自然な包含写像 $j : Y \hookrightarrow X \cup_f Y$ は (閉部分空間に像を持つ) 中への同相写像となり、対 $(X \cup_f Y, Y)$ を定める。　さらに、対 (X,A)は自然に対 $(X \amalg Y, A \amalg Y)$ に埋め込まれ、商写像との合成を取ることで、写像 $f' : (X,A) \to (X \cup_f Y, Y)$ が誘導され $f'|_X\circ i = j\circ f$ を満たす。

問題 3.2 写像 $f' : (X,A) \to (X \cup_f Y, Y)$ が相対同相であることを示せ。

(柱 − cylinder) 空間 X に対して、$I(X) = ([0,1]\times X \amalg \{*\})/\sim_{syl}$ とする。 ただし、$\sim_{syl}$ は $(t, *_X) \sim_{syl} *$ により生成される同値関係である。 このとき、自然な包含写像 $i_t : X \approx \{t\}\times X \subseteq [0,1]\times X \to I(X)$ $(0 \le t \le 1)$ は中への同相を与え、従って $X\vee X \xrightarrow{i_0\vee i_1} i_0(X)\cup i_1(X) \subseteq I(X)$ も中への同相である。 I は明らかに共変関手である。

(写像柱 − mapping cylinder) 写像 $f : X \to Y$ に対して、対 $(I(X), i_1(X))$ と写像 $f : i_1(X) = X \to Y$ をとれば、対 $(I(X)\cup_f Y, Y)$ が得られ $(I(X), i_1(X))$ と相対同相となる。 このとき $I_f = I(X)\cup_f Y$ とおくと、中への同相写像 $i : X \xrightarrow{i_0} I(X) \to I_f$ と $j : Y \hookrightarrow I(X)\cup_f Y = I_f$ が付随する。 特に $f = 1_X$ のとき $I_f = I(X)$ である。

(二重写像柱 − double mapping cylinder) 写像 $f : X \to Y$ と $g : X \to Z$ に対して、対 $(I(X), X\vee X)$ と写像 $F = f\vee g : X\vee X \to Y\vee Z$ をとれば、対 $(I(X)\cup_F (Y\vee Z), Y\vee Z)$ が得られ $(I(X), X\vee X)$ と相対同相となる。 このとき $I(f,g) = I(X)\cup_F (Y\vee Z)$ とおくと、中への同相写像 $j : Y\vee Z \hookrightarrow I(X)\cup_F (Y\vee Z) = I(f,g)$ と商写像 $q : I(X) \twoheadrightarrow I(f,g)$ が付随する。 また $I(f,g)\approx I(g,f)$ であり、特に $f = 1_X$ のとき $I(f,g) = I(g)$ である。

(錐 − cone) 空間 X に対して、自明な写像 $* : X \to *$ から対 $(I_{(*:X\to *)}, X)$ を得る。 このとき $C(X) = I_{(*:X\to *)}$ とおくと、対 $(C(X), X)$ を得る。 C は明らかに共変関手である。

(写像錐 − mapping cone) 写像 $f : X \to Y$ に対して対 $(C(X), X)$ と写像 $f : X \to Y$ から対 $(C(X)\cup_f Y, Y)$ を得る。 このとき $C_f = C(X)\cup_f Y$ とおくと、対 (C_f, Y) を得る。

(懸垂 − suspension) 空間 X に対して、自明な写像 $* : X \to *$ から対 $(C_{(*:X\to *)}, *)$ を得る。 このとき $\Sigma(X) = C_{(*:X\to *)}$ とおくと、対 $(\Sigma(X), *)$ を得る。 Σ は明らかに共変関手である。

補題 3.3 (HPO) 写像 $f : X \to Y, g : X \to Z, h : Y \to W, k : Z \to W$ に対し、次が成立する。

$$\left[\begin{array}{c} {}^{\exists}H : I(X) \to W \\ \text{s.t. } h\circ f \sim_H k\circ g \end{array}\right] \underset{(J\circ q = H)}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cc} \begin{array}{l} {}^{\exists}J : I(f,g) \to W \\ \text{s.t. } J\circ j_0 = h, J\circ j_1 = k \end{array} & \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "j_0"] \arrow[ddr, "h"] & \\ Z \arrow[r, "j_1"] \arrow[drr, "k"'] & I(f,g) \arrow[dr, "J"] & \\ & & W \end{tikzcd} \end{array}\right]$$

双対的に商写像 $p : Y \twoheadrightarrow B$ と写像 $f : X \to B$ に対し、商写像 $q : Z \twoheadrightarrow X$ を次で与える。

$$Z = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = p(y)\} \subseteq X \times Y, \qquad q(x, y) = x.$$

この部分集合 $Z \subseteq X \times Y$ からの相対位相を入れてできた空間を f による fibre 積と呼び、記号 $X \times_f Y$ で表す。 さらに、$X \times_f Y$ から Y への自然な射影 $\hat{f} : X \times_f Y \to Y$ により、商写像の間の可換図式 $p \circ \hat{f} = f \circ q$ が誘導される。 以下の５種類の構成では、X が弧状連結である (X の任意の２点を始点と終点とする道が存在する) ことを仮定する。

(余柱 – track) 空間 X に対して、$T(X) = \{f : [0, 1] \to X\}$ とする。 このとき、代入写像 $p_t : T(X) \to X$ ($p_t(f) = f(t), 0 \leq t \leq 1$) は商写像であり、従って $\hat{p} : T(X) \twoheadrightarrow X \times X$ ($\hat{p}(f) = (f(0), f(1))$) も商写像である。 T は明らかに共変関手である。

(写像余柱 – mapping track) 写像 $f : Y \to X$ に対して、商写像 $p_1 : T(X) \twoheadrightarrow X$ と写像 $f : Y \to X$ をとれば、商写像 $Y \times_f T(X) \twoheadrightarrow Y$ が得られる。 このとき $T_f = Y \times_f T(X)$ とおくと、商写像 $p : T_f \subseteq T(X) \overset{p_0}{\twoheadrightarrow} X$ と $q : T_f \twoheadrightarrow Y$ が付随する。 特に $f = 1_X$ のとき $T_f = T(X)$ である。

(二重写像余柱 – double mapping track) 写像 $f : Y \to X$ と $g : Z \to X$ に対して、商写像 $\hat{p} : T(X) \twoheadrightarrow X \times X$ と写像 $f \times g : Y \times Z \to X \times X$ をとれば、商写像 $(Y \times Z) \times_{f \times g} T(X) \twoheadrightarrow Y \times Z$ が得られる。 このとき $T(f, g) = (Y \times Z) \times_{f \times g} T(X)$ とおくと、商写像 $q : T(f, g) = (Y \times Z) \times_{f \times g} T(X) \twoheadrightarrow Y \times Z$ と中への同相写像 $j : T(f, g) \hookrightarrow I(X)$ が付随する。 また $T(f, g) \approx T(g, f)$ であり、特に $f = 1_X$ のとき $T(f, g) = T(g)$ である。

(余錐 – path) 空間 X に対して自明な写像 $* : * \to X$ から商写像 $T_{(*:* \to X)} \twoheadrightarrow X$ を得る。 このとき $P(X) = T_{(*:* \to X)}$ とおくと、商写像 $P(X) \twoheadrightarrow X$ を得る。 P は明らかに共変関手である。

(写像余錐 – mapping path/homotopy fibre) 写像 $f : Y \to X$ に対して商写像 $P(X) \twoheadrightarrow X$ と写像 $f : Y \to X$ から商写像 $Y \times_f P(X) \twoheadrightarrow Y$ を得る。 このとき、$P_f = Y \times_f P(X)$ とおくと、商写像 $P_f \twoheadrightarrow Y$ を得る。

(ループ – loop) 空間 X に対して自明な写像 $* : * \to X$ から商写像 $P_{(*:* \to X)} \twoheadrightarrow *$ を得る。 このとき $\Omega(X) = P_{(*:* \to X)}$ とおくと、商写像 $\Omega(X) \twoheadrightarrow *$ を得る。 Ω は明らかに共変関手である。

補題 3.4 (HPB) 写像 $f: Y \to X, g: Z \to X, h: W \to Y, k: W \to Z$ に対し、次が成立する。

$$
\left[\begin{array}{c} {}^{\exists}H : W \to T(X) \\ \text{s.t. } f \circ h \sim_H g \circ k \end{array}\right]
\underset{(j\circ J = H)}{\Longleftrightarrow}
\left[\begin{array}{cc} \begin{array}{l} {}^{\exists}J : W \to T(f,g) \\ \text{s.t. } q_0 \circ J = h, q_1 \circ J = k \end{array} &
\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, "J"] \arrow[drr, "k"] \arrow[ddr, "h"'] & & \\
& T(f,g) \arrow[r, "q_0"] \arrow[d, "q_1"] & Y \arrow[d, "f"] \\
& Z \arrow[r, "g"'] & X
\end{tikzcd}
\end{array}\right]
$$

3.3 Puppe 系列

まず、懸垂とループの各関手について、次の補題を用意する。

補題 3.5 (1) 写像 $f: X \to Y$ の写像錐を $j: Y \hookrightarrow C_f$ とするとき、$\Sigma f: \Sigma X \to \Sigma Y$ の写像錐はホモトピー同値を除けば $\Sigma j: \Sigma Y \to \Sigma C_f (\simeq C_{\Sigma f})$ に一致する。

(2) 写像 $f: Y \to X$ の写像余錐を $q: P_f \to Y$ とするとき、$\Omega f: \Omega Y \to \Omega X$ の写像余錐はホモトピー同値を除けば $\Omega q: \Omega L_f (\simeq P_{\Omega f}) \to \Omega Y$ に一致する。

写像 $f: X \to Y$ に対して、写像錐 $j: Y \hookrightarrow C_f$ を f の (homotopy) cofibre と呼ぶことがある。同様に写像 $f: Y \to X$ に対して、写像余錐 $q: P_f \to Y$ を写像 f の (homotopy) fibre と呼ぶ。

それでは j の cofibre、あるいは q の fibre はさらに訳の分からないものとなるのであろうか?

定理 3.6 (**Puppe**) (1) j の cofibre はホモトピー同値を除いて $j_1: C_f \to C_f/Y = \Sigma X$ に一致し、さらに、j_1 の cofibre はホモトピー同値を除いて $-\Sigma f: \Sigma X \to \Sigma Y$ に一致する。 ただし、$-\Sigma f$ は $(-\Sigma f)(t,x) = (1-t, f(x))$ により与えられる。

(2) q の fibre はホモトピー同値を除いて $q_1: \Omega X \hookrightarrow P_f$ に一致し、さらにq_1 の fibre はホモトピー同値を除いて $-\Omega f: \Omega Y \to \Omega X$ に一致する。 ただし、$-\Omega f$ は $(-\Omega f)(u)(t) = f \circ u(1-t)$ により与えられる。

従って $\delta = j_1, \partial = q_1$ とおいて、次の長い (co)fibre 列を得る:

(cofibre 列) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j} C_f \xrightarrow{\delta} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{-\Sigma j} \Sigma C_f \xrightarrow{-\Sigma\delta} \Sigma^2 X \xrightarrow{\Sigma^2 f} \Sigma^2 Y \xrightarrow{\Sigma^2 j} \Sigma^2 C_f \to \cdots,$

(fibre 列) $\cdots \to \Omega^2 P_f \xrightarrow{\Omega^2 q} \Omega^2 Y \xrightarrow{\Omega^2 f} \Omega^2 X \xrightarrow{-\Omega\partial} \Omega P_f \xrightarrow{-\Omega q} \Omega Y \xrightarrow{-\Omega f} \Omega X \xrightarrow{\partial} P_f \xrightarrow{q} Y \xrightarrow{f} X.$

3.4 fibration と co-fibration

ファイバー束を特徴づける性質として局所自明性があるが、その一つの帰結として、与えられた束準同型の底空間での変形が束準同型自体の変形に持ち上がるという事実がある。 この事実が「Homotopy Lifting Property」として知られ、これを抽象化して次の fibration が定義される。

(Fibration) 商写像 $p: Y \twoheadrightarrow B$ が fibration とは、次の条件が成立することである。

写像 $f: X \to Y$ と $G: I(X) \to B$ が等式 $G \circ i_0 = p \circ f$ を満たすなら、写像 $K: I(X) \to Y$ で等式 $p \circ K = G, K \circ i_0 = f$ を満たすものが存在する。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "i_0"] \arrow[d, "f"'] & I(X) \arrow[d, "G"] \arrow[dl, dotted, "K"] \\
Y \arrow[r, "p"'] & B
\end{tikzcd}$$

この双対となる性質が次にあげる cofibration のもつ「Homotopy Extension Property」である。

(Cofibration) 中への同相 $i: A \hookrightarrow X$ が cofibration とは、次の条件が成立することである。

写像 $f: X \to Y$ と $H: I(A) \to Y$ が等式 $p_0 \circ \mathrm{ad}(H) = f \circ i$ を満たすなら、写像 $K: I(X) \to Y$ で等式 $\mathrm{ad}(K) \circ i = \mathrm{ad}(H), p_0 \circ \mathrm{ad}(K) = f$ を満たすものが存在する。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\mathrm{ad}(H)"'] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "\mathrm{ad}(K)"] \\
T(Y) \arrow[r, "p_0"'] & Y
\end{tikzcd}
\quad
\left(\begin{tikzcd}
X \cup_i I(A) \arrow[r, hook, "i_0 \cup I(i)"] \arrow[d, "f \cup H"'] & I(X) \arrow[dl, dotted, "K"] \\
Y &
\end{tikzcd}\right)$$

ただし、$\mathrm{ad}: \mathcal{M}(I(X), Y) \xrightarrow{\approx} \mathcal{M}(X, T(Y))$ は随伴写像を対応させる同相写像である。

これらを組み合わせることで次の定理が得られる：

定理 3.7 与えられた fibration $p: Y \to B$ と cofibration $i: A \hookrightarrow X$ に対して、次が成立する。

(HLEP/HELP) 写像 $f: X \to Y$ と $H: I(A) \to Y$ と $G: I(X) \to B$ が等式 $G \circ i_0 = p \circ f, p_0 \circ \mathrm{ad}(H) = f \circ i$ および $G \circ I(i) = p \circ H$ を満たすなら、写像 $K: I(X) \to Y$ で等式 $\mathrm{ad}(K) \circ i = \mathrm{ad}(H)$, $p_0 \circ \mathrm{ad}(K) = f, p \circ K = G$ を満たすものが存在する。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\mathrm{ad}(H)"'] & X \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "\mathrm{ad}(K)"] & I(X) \arrow[d, "G"] \arrow[dl, dotted, "K"] & I(A) \arrow[l, hook', "I(i)"'] \arrow[d, "H"] \\
T(Y) \arrow[r, "p_0"'] & Y \arrow[r, "p"'] & B & Y \arrow[l, "p"]
\end{tikzcd}
\quad
\left(\begin{tikzcd}
X \cup_i I(A) \arrow[r, hook, "i_0 \cup I(i)"] \arrow[d, "f \cup H"'] & I(X) \arrow[d, "G"] \arrow[dl, dotted, "K"] \\
Y \arrow[r, "p"'] & B
\end{tikzcd}\right)$$

3.5 CW 複体と胞体近似定理

位相空間の対 (X, A) に対する胞体構造を考える。

定義 3.8 空間対 (X, A) が相対 CW 複体であるとは、次の条件を満たす X の閉部分空間族 X_i (i–骨格と呼ばれる) $i \geq -1$ が存在することである。

(1) $X_{-1} = A,\ X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$ (弱位相を持つ)

(2) $X_i = C(B_i) \cup_{f_i} X_{i-1},\ f_i : B_i = \bigvee_\lambda S_\lambda^{i-1} \to X_{i-1}$ (連続写像), $\quad i \geq 0.$

(注1) $X_0 = A \amalg$ (discrete set)

(注2) $X_i \setminus X_{i-1} = \coprod_\lambda E^i$ の各連結成分 $E^i \approx \mathbb{R}^i$ を X の i–胞体と呼び、e^i などと表すことがある。

(注3) 特に $A = \emptyset$ のとき、X を CW 複体と呼び、$A = *$ のとき、X を基点付き CW 複体と呼ぶ。

このような胞体構造を保つ写像を考える。

定義 3.9 対写像 $f : (X, A) \to (Y, B)$ が相対胞体写像であるとは、(X, A) の i–骨格を X_i とし (Y, B) の i–骨格をY_i とするとき、$f(X_i) \subseteq Y_i, \quad i \geq 0$ を満たすことである。

例 3.10 (1) $S^n = C(S^{n-1}) \cup \{*\}$ より S^n は CW 複体であり、$S^n = e^0 \cup e^n$ となる。

(2) $\mathbb{R}P^i = C(S^{i-1}) \cup \mathbb{R}P^{i-1}$ より $\mathbb{R}P^n$ は CW 複体であり、$\mathbb{R}P^n = e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^n$ となる。

(3) $\mathbb{C}P^i = C(S^{2i-1}) \cup \mathbb{C}P^{i-1}$ より $\mathbb{C}P^n$ は CW 複体であり、$\mathbb{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{2n}$ となる。

(4) $\mathbb{H}P^i = C(S^{2i-1}) \cup \mathbb{H}P^{i-1}$ より $\mathbb{H}P^n$ は CW 複体であり、$\mathbb{H}P^n = e^0 \cup e^4 \cup \cdots \cup e^{4n}$ となる。

しかし、胞体写像であるという条件はきつく、CW 複体と胞体写像の圏を考えることは却って取り扱いが困難になる。 次の胞体近似定理がホモトピー的にその難点を取り除くことを可能にする。

定理 3.11 (相対胞体近似定理) 相対 CW 複体の間の対写像 $f : (X, A) \to (Y, B)$ に対して、胞体写像 $g : (X, A) \to (Y, B)$ で $g \sim_{\mathrm{rel} A} f$ をみたすものが存在する。

系 3.11.1 (胞体近似定理) CW 複体の間の写像 $f : X \to Y$ に対して、胞体写像 $g : X \to Y$ で $g \sim f$ をみたすものが存在する。

CW 複体にホモトピー同値な空間対とその間の対写像のなす圏を $\underline{\mathcal{CW}}_2$ で表し、基点付き CW 複体にホモトピー同値な基点付き空間とその間の写像のなす圏を $\underline{\mathcal{CW}}_*$ で表す。

4 ホモトピー論から

4.1 簡約 (コ) ホモロジー論

単位元 1 を持つ環 Λ に対して、アーベル群 M が次の条件を満たす Λ の M への作用 $\Lambda \times M \ni (a,m) \mapsto a{\cdot}m \in M$ を持つとき、M を Λ–加群 (Λ を作用域とする加群) と呼ぶ。

(1) $1{\cdot}m = m, \quad m \in M,$

(2) $a{\cdot}(b{\cdot}m) = (ab){\cdot}m, \quad a, b \in \Lambda, m \in M,$

(3) $(a+b){\cdot}m = a{\cdot}m + b{\cdot}m, \quad a, b \in \Lambda, m \in M,$

(4) $a{\cdot}(m+n) = a{\cdot}m + a{\cdot}n, \quad a \in \Lambda, m, n \in M.$

また、Λ–加群 M から N への加群としての準同型 ϕ が条件 $\phi(a{\cdot}m) = a{\cdot}\phi(m)$ を満たすとき、Λ–準同型と呼ぶ。

さて、d を 2 以上の自然数または無限大 ∞ とし、$\mathbb{Z}/d = \{i \in \mathbb{Z} \,|\, 0 \leq i < d\}$ とおく。 従って、例えば $\mathbb{Z}/\infty = \bar{\mathbb{N}}$ となる。 このとき、単位元 1 を持つ可換環 R に対して、圏 ${}_R\underline{\mathcal{GM}}_d$ を次で定め、次数付き R–加群の圏と呼ぶ。

(O) 圏 ${}_R\underline{\mathcal{GM}}_d$ の対象は $\{M_i$ (R–加群) $|\, i \in \mathbb{Z}/d\}$ (これを $M_* = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d} M_i$ で表す)

(M) 圏 ${}_R\underline{\mathcal{GM}}_d$ の M_* から N_* への射は $\{\phi_i : M_i \to N_i$ (R–準同型) $|\, i \in \mathbb{Z}/d\}$ ($\phi_* = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d} \phi_i$)

次の七つの定理は、常 (コ) ホモロジーの 7 つの公理系をCW複体と簡約 (コ) ホモロジーの言葉で言い換えたものである。

定理 4.1 (関手性) 単位元を持つ可換環 R に対し、次が成立する。

(簡約ホモロジー) $\tilde{H}_*(\ ;R) = H_*(\ ,*;R)$ は圏 $\underline{\mathcal{CW}}_*$ から圏 ${}_R\underline{\mathcal{GM}}_\infty$ への共変関手である。

(簡約コホモロジー) $\tilde{H}^*(\ ;R) = H^*(\ ,*;R)$ は圏 $\underline{\mathcal{CW}}_*$ から圏${}_R\underline{\mathcal{GM}}_\infty$ への反変関手である。

定理 4.2 (ホモトピー不変性) 単位元を持つ可換環 R に対し、次が成立する。

(簡約ホモロジー) $f \sim g$ ならば同じ準同型 $\tilde{H}_*(f;R) = \tilde{H}_*(g;R)$ を誘導する。

(簡約コホモロジー) $f \sim g$ ならば同じ準同型 $\tilde{H}^*(f;R) = \tilde{H}^*(g;R)$ を誘導する。

定理 4.3 (長完全性) 単位元を持つ可換環 R に対し、次が成立する。

(簡約ホモロジー) $\tilde{H}_*(\ ;R)$ は定理 3.6 で得られたcofibre列から長完全列を誘導する。

(簡約コホモロジー) $\tilde{H}^*(\ ;R)$ は定理 3.6 で得られたcofibre列から長完全列を誘導する。

定理 4.4 (切除性) 単位元を持つ可換環 R と任意の相対 CW 複体 (X,A) に対して、次が成立する。

(簡約ホモロジー) $H_*(X,A;R)=\tilde{H}_*(X/A;R)$ であり、特に $H_*(X;R)=\tilde{H}_*(X_+;R)$ となる。

(簡約コホモロジー) $H^*(X,A;R)=\tilde{H}^*(X/A;R)$ であり、特に $H^*(X;R)=\tilde{H}^*(X_+;R)$ となる。

定理 4.5 (懸垂同型) 単位元を持つ可換環 R と任意の CW 複体 X と整数 i に対して、次が成立する。

(簡約ホモロジー) 自然同型 $\tilde{H}_i(\Sigma X;R)\cong\tilde{H}_{i-1}(X;R)$ が成立する。

(簡約コホモロジー) 自然同型 $\tilde{H}^i(\Sigma X;R)\cong\tilde{H}^{i-1}(X;R)$ が成立する。

定理 4.6 (加法性) 単位元を持つ可換環 R と任意のCW複体の族 $X_\lambda,\lambda\in\Lambda$ に対して次が成立する。

(簡約ホモロジー) 自然同型 $\tilde{H}_*(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda;R)\cong\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\tilde{H}_*(X_\lambda;R)$ が成立する。

(簡約コホモロジー) 自然同型 $\tilde{H}^*(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda;R)\cong\prod_{\lambda\in\Lambda}\tilde{H}^*(X_\lambda;R)$ が成立する。

定理 4.7 (次元性) 単位元を持つ可換環 R と整数 i に対し、次が成立する。

(簡約ホモロジー) $\tilde{H}_0(S^0;R)=R$ かつ $\tilde{H}_i(S^0;R)=0,(i\neq 0)$ である。

(簡約コホモロジー) $\tilde{H}^0(S^0;R)=R$ かつ $\tilde{H}^i(S^0;R)=0,(i\neq 0)$ である。

4.2 (余) 積の構造

Λ が可換環 R のとき、R-加群 M,N の R 上の tensor 積 $M\otimes_R N$ を次で定める。

(tensor積) $M\otimes_R N=\langle M\times N$ の要素で生成される自由R-加群$\rangle/\sim_{tensor}$,

ただし、$\sim_{tensor}$ は $(a{\cdot}m+a'{\cdot}m',b{\cdot}n+b'{\cdot}n')\sim_{tensor}ab(m,n)+ab'(m,n')+a'b(m',n)+a'b'(m',n')$ で生成される同値関係である。 このとき、(m,n) の同値類を $m\otimes n$ で表す。 この次数付き R-加群 M_*,N_* に対して、その tensor 積 $M_*\otimes_R N_*$ を次の式で定める。

（次数付きtensor積） $(M_*\otimes_R N_*)_i = \sum_{\substack{j,k\in\mathbb{Z}/d \\ i=j+k \bmod d}} M_j\otimes_R N_k$（有限直和）, $i\in\mathbb{Z}/d.$

さらに、準同型 $t=t_A : A\otimes_R A\to A\otimes_R A$ を $t(x\otimes y)=(-1)^{\deg(x)\deg(y)}y\otimes x$ で定義する。 また、$R\otimes_R A\cong A\cong A\otimes_R R$ は同一視する。 この次数付き tensor 積を用いて（余）代数の構造を定義する：

（次数付き可換結合的 R–代数） 次数付き R–加群 A が次数付き可換結合的R–代数とは、次の条件を満たす R–準同型 $\mu : A\otimes_R A\to A$ が存在することである。

(1) $\mu(x\otimes 1)=x=\mu(1\otimes x)$を満たす$1\in A_0$が存在する。 （この 1 の存在は、$R$ を次数 0 に集中した次数付き R–加群と見なしたとき、適当な準同型 $\varepsilon : R\to A$ の存在を意味する）

(2) $\mu(\mu(x\otimes y)\otimes z)=\mu(x\otimes\mu(y\otimes z))$を満たす。

(3) $\mu(x\otimes y)=\mu\circ t(x\otimes y)$ を満たす。

（次数付き可換結合的 R–余代数） 次数付き R–加群 A が次数付き可換結合的 R–余代数とは、次の条件を満たす R–準同型 $\psi : A\to A\otimes_R A$ が存在することである。

(1) $(1\otimes\eta)\circ\psi=1=(\eta\otimes 1)\circ\psi$ を満たす準同型 $\eta : A\to R$ が存在する。

(2) $(\psi\otimes 1)\circ\psi=(1\otimes\psi)\circ\psi$ を満たす。

(3) $\psi=t\circ\psi$ を満たす。

さて常（コ）ホモロジーはさらに次の構造を持つことが知られている。

定理 4.8（外部積） 単位元を持つ可換環 R に対し、次が成立する。

（簡約ホモロジー） 自然な鎖準同型 $\rho : \tilde{C}_*(X\wedge Y;R)\to\tilde{C}_*(X;R)\otimes_R\tilde{C}_*(Y;R)$ （Alexander–Whitney の写像） が存在し、$\rho_* : \tilde{H}_*(X\wedge Y;R)\to\tilde{H}_*(X;R)\otimes_R\tilde{H}_*(Y;R)$ は次を満たす。

(1) ρ は $X=\{*\}_+$ または $Y=\{*\}_+$ のとき恒等写像を与える。

(2) $(\rho_*\otimes 1)\circ\rho_*=(1\otimes\rho_*)\circ\rho_* : \tilde{H}_*(X\wedge Y\wedge Z;R)\to\tilde{H}_*(X;R)\otimes_R\tilde{H}_*(Y;R)\otimes_R\tilde{H}_*(Z;R)$

(3) 交換写像 $T : X\wedge Y\to Y\wedge X$ は $\rho_*\circ T_*=t\circ\rho_*$ を満たす。

（$\rho_*\circ\Delta_* : H_*(X;R)=\tilde{H}_*(X_+;R)\xrightarrow{\rho_*\circ\bar{\Delta}_*}\tilde{H}_*(X_+;R)\otimes_R\tilde{H}_*(X_+;R)=H_*(X;R)\otimes_R H_*(X;R)$ により、$H_*(X;R)$ は次数付き可換結合的 R–余代数となる）

（簡約コホモロジー） 自然な準同型 $\rho^*: \tilde{H}^*(X;R) \otimes \tilde{H}^*(Y;R) \to \tilde{H}^*(X \wedge Y;R)$ が次を満たす。

(1) ρ^* は $X=\{*\}_+$ または $Y=\{*\}_+$ のとき恒等写像を与える。

(2) $\rho^* \circ (\rho^* \otimes 1) = \rho^* \circ (1 \otimes \rho^*) : \tilde{H}^*(X;R) \otimes \tilde{H}^*(Y;R) \otimes \tilde{H}^*(Z;R) \to \tilde{H}^*(X \wedge Y \wedge Z;R)$

(3) 交換写像 $T: X \wedge Y \to Y \wedge X$ は $\rho^* \circ t = T_* \circ \rho^*$ を満たす。

$\Delta^* \circ \rho^* : H^*(X;R) \otimes_R H^*(X;R) = \tilde{H}^*(X_+;R) \otimes_R \tilde{H}^*(X_+;R) \xrightarrow{\bar{\Delta}^* \circ \rho^*} \tilde{H}^*(X_+;R) = H^*(X;R)$ により、 $H^*(X;R)$ は次数付き可換結合的 R–代数となり、 この合成写像を Δ^* と略記する。

上の性質から $H^*(X;R) = \bar{H}^*(X_+;R)$ と $H^*(X \times X;R) = H^*(X \vee X;R) \oplus H^*(X \wedge X;R)$ が成立し、

$$H^*(X;R) \otimes_R H^*(X;R) = H^*(X \vee X;R) \oplus \bar{H}^*(X;R) \otimes_R \bar{H}^*(X;R)$$

より、 準同型 Δ^* の $\bar{H}^*(X;R) \otimes_R \bar{H}^*(X;R)$ への制限は準同型 $\bar{\Delta}^*$ と同一視される。　同様に

$$H_*(X;R) \otimes_R H_*(X;R) = H_*(X \vee X;R) \oplus \bar{H}_*(X;R) \otimes_R \bar{H}_*(X;R)$$

より、 準同型 Δ_* の像の $\bar{H}_*(X;R) \otimes_R \bar{H}_*(X;R)$ への射影は準同型 $\bar{\Delta}_*$ と同一視される。

定理 4.9 (Eilenberg–Zilber) R が体のとき、 ρ は鎖ホモトピー同値を与え、ρ_* （ρ^*） は （コ） ホモロジー群の同型を誘導する。

4.3 一般（コ）ホモロジー論とコホモロジー作用素

Λ を次数付き可換結合的 R–代数として、 次数付きの意味での Λ の作用を受ける次数付き加群すなわち Λ–加群の圏を ${}_\Lambda\underline{\mathcal{GM}}_d$ とする。　このとき、 h^* が係数 Λ のコホモロジー論であるとは、 定理 4.1 ・定理 4.6 の簡約コホモロジーの性質が、 R を Λ に、 また、 $\tilde{H}^*(\ \ ;R)$ を $h^*(\ \ )$ に置き換えて成立することである。　ここで、 定理 4.4 は簡約でないコホモロジー論の定義とみなす。

注 4.10 定理 4.1 ・ 定理 4.7の簡約コホモロジーの性質が、 R を Λ に、 また、 $\tilde{H}^*(\ \ ;R)$ を$h^*(\ \ )$ に置き換えて成立するなら、 $h^*(\ \ ) = \tilde{H}^*(\ \ ;R) \otimes_R \Lambda$ であることが知られている。

さらに、 h^* が係数 Λ の乗法的コホモロジー論であるとは、 次の条件を満たす自然な準同型 κ が存在することである。

(1) κ は $X=\{*\}_+$ または $Y=\{*\}_+$ のとき恒等写像を与える。

(2) $\kappa \circ (\kappa \otimes 1) = \kappa \circ (1 \otimes \kappa) : h^*(X) \otimes_R h^*(Y) \otimes_R h^*(Z) \to h^*(X \wedge Y \wedge Z)$

(3) 交換写像 $T : X\wedge Y \to Y\wedge X$ は $\kappa\circ t = T_*\circ\kappa$ を満たす。

このとき、 $h^*(X_+)$ は自然に次数付き可換結合的Λ–代数の構造を持つ。

定義 4.11 (非安定) コホモロジー作用素を定義する。

(コホモロジー作用素) k, n を整数とするとき、 $\theta(X) : h^k(X) \to h^{k+n}(X)$ という形の自然変換 $\theta : h^k \to h^{k+n}$ を次数 n のコホモロジー作用素とよぶ。

(安定コホモロジー作用素) n を整数と、 次数 n のコホモロジー作用素の列 $\theta_k : h^k \to h^{k+n}$ が $\theta_k(\Sigma X) = \theta_{k-1}(X)$ を満たすとき、 $\theta = \{\theta_k\}$ を次数 n の安定コホモロジー作用素という。

h^*h を安定コホモロジー作用素の全体とし、 次数 n の安定コホモロジー作用素全体を $(h^*h)_n$ とおく。

問題 4.12 h^* が係数 Λ の乗法的コホモロジー論のとき、 h^*h が次数付き Λ–代数となることを示せ。

4.4 基本群

空間 X 上の閉じた道全体の空間 $\Omega(X)$ の連結成分は X 上のloopのホモトピーによる同値類であると見なされる。 従って、 $\Omega(X)$ の連結成分の全体 $\pi_0(\Omega(X))$ は X の基本群 $\pi_1(X)$ と同一視される。

定理 4.13 群の圏 $\underline{\mathcal{G}}$ においては、 与えられた二つの準同型 $f_1 : G_0 \to G_1$ と $f_2 : G_0 \to G_2$ に対して、 次を満たす群 $G = G_1 *_{G_0} G_2$ (融合積) と準同型 $j_1 : G_1 \to G$ と $j_2 : G_2 \to G$ が存在する。

(1) 準同型 $g_1 : G_1 \to G'$ と $g_2 : G_2 \to G'$ が条件 $g_1\circ f_1 = g_2\circ f_2$ を満たすならば、 $g\circ j_1 = g_1$ かつ $g\circ j_2 = g_2$ を満たす準同型 $g : G \to G'$ が一意的に存在する。

$$
\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & G_1 \arrow[d, "j_1"] \arrow[ddr, dotted, "\forall g_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "j_2"] \arrow[drr, dotted, "\forall g_2"'] & G \arrow[dr, dotted, "\exists g"] & \\
& & G'
\end{tikzcd}
$$

例 4.14 $G_0 = 1$ で、 群 G_1, G_2 の表示が $G_i = \langle S_i \,|\, R_i\rangle$ $(i = 1,2)$ と与えられているとき、 $G_1 * G_2 = G_1 *_{G_0} G_2$ の表示が $G_1 * G_2 = \langle S_1\cup S_2 \,|\, R_1, R_2\rangle$ で与えられる。 本講では、 Van Kampen の定理として知られる定理の最も弱い形しか必要としないので、 融合積の構成については割愛する。

定理 4.15 (**Van Kampen**) $\underline{\mathcal{CW}}_A$ の三系 $(X; K, L)$ に対して、 $K, L, K \cap L$ が全て弧状連結ならば、同型 $\pi_1(K \cup L) \cong \pi_1(K) *_{\pi_1(K\cap L)} \pi_1(L)$ が存在する。　特に $\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y)$ である。

系 4.15.1 $\underline{\mathcal{CW}}_A$ の三系 $(X; K, L)$ に対して、 K, L が単連結で $K \cap L$ が弧状連結ならば、 X は単連結である。

従って、 例えば S^1 の n 個の一点和の基本群は n 個の要素を生成元とする自由群である。

4.5　高次ホモトピー群と Hurewicz の定理

高次のホモトピー群 $\pi_n(X)$ は基本群を用いて次のように帰納的に与えられる。

(1) $\pi_0(X) = \langle X$ の連結成分の全体$\rangle$,

(2) $\pi_{i+1}(X) = \pi_i(\Omega(X)) \cong \pi_0(\Omega^{i+1}X)$.

空間 X の基本群の要素 $[u]$ を取れば、 u は連続写像 $u : S^1 \to X$ と見なせ、 1 次元ホモロジー群の間に準同型 $u_* : H_1(S^1) \to H_1(X)$ を誘導する。　そこで、 $\rho(u) = u_*([S^1])$ とおく。

定理 4.16 (**Hurewicz**) X が弧状連結のとき、 $\rho : \pi_1(X) \to H_1(X)$ は全射準同型であり、 その核は交換子群に一致する。　従って $\pi_1(X)_{ab} \cong H_1(X)$ である。

空間や写像に対する連結性を次のように定義する。

定義 4.17　(空間) 空間 X が d-連結であるとは、 X にホモトピー同値な CW 複体 Y でその d-骨格が基点のみからなるものが存在することとする。

(写像) 写像 $f : X \to Y$ が d-連結であるとは、 homotopy fibre L_f が d-連結であることとする。

(空間対) 空間対 (X, A) が d-連結であるとは、 包含写像 $i : A \hookrightarrow X$ が d-連結であることとする。

例 4.18 例えば n 次元球面 S^n は $S^n = \{*\} \cup e^n$ という CW 分割を持つから、 $n{-}1$ 連結である。

空間 X の $\pi_n(X) = \pi_0(\Omega^n(X))$ の要素 $[u]$ を取れば、 u は連続写像 $u : S^n \to X$ と見なせ、 n 次元ホモロジー群の間に準同型 $u_* : H_n(S^n) \to H_n(X)$ を誘導する。　そこで、 $\rho_n(u) = u_*([S^n])$ とおく。　このとき、定理 4.16 を拡張した次の定理が成立する：

定理 4.19 (**Hurewicz**) n が 2 以上で X が $n{-}1$ 連結のとき、 $\rho_n : \pi_n(X) \to H_n(X)$ は同型であり、 $\rho_{n+1} : \pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X)$ は全射である。

4.6 ホモトピー集合

空間対 $(X, A), (Y, B)$ に対して、(X, A) から (Y, B) への対写像の全体をホモトピーで分類して得られる集合を $[X, A; Y, B]$ で表す。　特に $A = B = \emptyset$ の場合は集合 $[X, \emptyset; Y, \emptyset]$ を $[X, Y]_{free}$ で表し (自由) ホモトピー集合といい、$A = B =$ (一点集合) の場合は集合 $[X, *; Y, *]$ を $[X, Y]$ で表し (基点付き) ホモトピー集合と呼ぶ。　ここでは基点付きの集合の圏を $\underline{\mathcal{S}}_*$ で表すことにする。

空間 X の懸垂が $\Sigma X = X \times [0, 1]/ \sim_{susp} = X \wedge S^1$ という形で与えられ、基点付きの指数定理を用いれば、$[X \wedge S^1, Y] \cong [X, \Omega Y]$ となる。　従って次の命題を得る。

命題 4.20 基点付き空間 X, Y に対して、$[\Sigma X, Y]$ と $[X, \Omega Y]$ は自然に同一視できる。

さらに $\Sigma X = X \wedge S^1 = X \wedge$ ○ より、S^1 = ○ の中央をピンチする写像 μ: ○ $\to$ 8 = ○ $\vee$ ○ は、$1_X \wedge \mu$: $X \wedge$ ○ $\to X \wedge$ ○ $\vee X \wedge$ ○ を誘導するから、任意の写像 f, g: $X \wedge$○ $\to Y$ に対して $f + g = (f \vee g) \circ (1_X \wedge \mu)$ により二項演算が $[\Sigma X, Y]$ に与えられ、次が成立する：

命題 4.21 空間 X, Y に対して、基点付き集合 $[\Sigma X, Y] \cong [X, \Omega X]$ は、自然に群の構造を持ち、$[\Sigma^2 X, Y] \cong [\Sigma X, \Omega X] \cong [X, \Omega^2 X]$ はアーベル群の構造を持つ。

ここで $\Sigma S^i = S^{i+1}$ であることに注意すれば、任意の空間Xと整数 i に対して $\pi_i(X) \cong [S^0, \Omega^i X]$ が成立する。　ただし、$\pi_i(X) \cong [S^i, X]$ (i-次元ホモトピー群) とする。

系 4.21.1 空間 X に対して $\pi_i(X)$ は、$i = 0$ のとき基点付き集合、$i = 1$ のとき群、$i \geq 2$ のときアーベル群となる。

基点付き空間 X を固定し、$Y \in \underline{\mathcal{CW}}_*$ に対して集合 $[Y, X]$ を対応させる対応を $[\ \ , X]$ で表す。

問題 4.22 $[\ \ , X]$ は圏 $\underline{\mathcal{CW}}_*$ から圏 $\underline{\mathcal{S}}_*$ への反変関手を与えることを示せ。

基点付き空間 X を固定し、$Y \in \underline{\mathcal{CW}}_*$ に対して集合 $[X, Y]$ を対応させる対応を $[X,\ \ ]$ で表す。

問題 4.23 $[X,\ \ ]$ は圏 $\underline{\mathcal{CW}}_*$ から圏 $\underline{\mathcal{S}}_*$ への共変関手を与えることを示せ。

さて、基点付きの集合の列

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots, \qquad i \in \mathbb{Z}$$

が条件 $\mathrm{im}\, f_{i-1} = (f_i)^{-1}(*), i \in \mathbb{Z}$ を満たすとき、ここではこの列を (長) 完全列と呼ぶ。

命題 4.24　(1) 関手 $[\ \ , X]$ は、Puppe の cofibre 列を長完全列にうつす。

(2) 関手 $[X,\ \ ]$ は、Puppe の fibre 列を長完全列にうつす。

さて、$\underline{K}_*$ における指数法則を用いれば Puppe の fibre 列より次を得る。

系 4.24.1 写像 $f: Y \to X$ に対して次は長完全列である。

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(Y) \xrightarrow{f_*} \pi_{i+1}(X) \longrightarrow \pi_i(L_f) \longrightarrow \pi_i(Y) \xrightarrow{f_*} \pi_i(X) \longrightarrow \cdots$$

特に f が中への同相のとき、この系列の $\pi_i(L_f)$ を $\pi_{i+1}(X,Y)$ などと表示する。

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(Y) \xrightarrow{f_*} \pi_{i+1}(X) \longrightarrow \pi_{i+1}(X,Y) \longrightarrow \pi_i(Y) \xrightarrow{f_*} \pi_i(X) \longrightarrow \cdots$$

定義 4.25 全ての次元でホモトピー群の同型を誘導する写像を弱 (ホモトピー) 同値写像と呼ぶ。

- 空間 X, Y が弱同値とは、ある空間 Z とそこからの弱同値写像 $\phi: Z \to X$ と $\psi: Z \to Y$ が存在することである。

- 写像 $f_1: X_1 \to Y_1$, $f_2: X_2 \to Y_2$ が弱同値とは、ある写像 $f_0: X_0 \to Y_0$ とそれらの弱同値写像 $\phi_i: X_0 \to X_i$ と $\psi_i: Y_0 \to Y_i$ $(i=1,2)$ で $f_i \circ \phi_i \sim \phi_i \circ f_0$ $(i=1,2)$ を満たすものが存在することである。

弱同値な空間はホモトピー同値となるであろうか？ 次の J. H. C. Whitehead の定理が (CW 複体の場合に) これに肯定的に答えるものである。

定理 4.26 (**J. H. C. Whitehead**) 弧状連結な CW 複体 X, Y の間の写像 $f: X \to Y$ が全ての次元のホモトピー群の同型を誘導するならば、f はホモトピー同値である。

ただし、CW 複体でない場合には反例が存在する。

定義 4.27 特に fibration に弱同値な写像を弱 fibration (quasi-fibration) などと呼ぶことがある。

4.7 Blakers–Massey の定理

次の定理は Freudenthal の懸垂定理と呼ばれる。

定理 4.28 (**Freudenthal**) 懸垂の誘導する準同型 $\Sigma_*: \pi_{q-1}(S^{r-1}) \to \pi_q(S^r)$ は、$q < 2r-2$ で同型で $q = 2r-2$ で全射である。

さて、次の homotopy pullback を考える：

$$\begin{tikzcd} P(f,g) \arrow[r, "q_0"] \arrow[d, "q_1"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

系 4.28.1 このとき、次の長完全列が従う。

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(Y){\oplus}\pi_{i+1}(Z) \xrightarrow{f_*} \pi_{i+1}(X) \longrightarrow \pi_i(P(f,g)) \longrightarrow \pi_i(Y){\oplus}\pi_i(Z) \xrightarrow{f_*} \pi_i(X) \longrightarrow \cdots$$

特に f,g が中への同相のとき、この系列の $\pi_i(P(f,g))$ を $\pi_{i+1}(X;Y,Z)$ などと表示する。

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(Y){\oplus}\pi_{i+1}(Z) \xrightarrow{f_*} \pi_{i+1}(X) \longrightarrow \pi_{i+1}(X;Y,Z) \longrightarrow \pi_i(Y){\oplus}\pi_i(Z) \xrightarrow{f_*} \pi_i(X) \longrightarrow \cdots$$

Freudenthal の懸垂定理は、次の Blakers-Massey のホモトピー切除定理の特別な場合である。

定理 4.29 (**Blakers-Massey**) 空間 A が連結で空間対 (Y,A) が n 連結かつ (Z,A) が m 連結 $(n,m \geq 1)$ のとき、写像 $f:A \to Y$, $g:A \to Z$ に対し homotopy pushout $X = I(f,g)$ は、Van Kampen の定理より単連結である。 そこで自然な包含写像 $h:Y \hookrightarrow X$ と $k:Z \hookrightarrow X$ の homotopy pullback $P(h,k)$ をとる。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "j"] \arrow[drr, "f"] \arrow[ddr, "g"'] & & \\
& P(h,k) \arrow[r, "q_0"'] \arrow[d, "q_1"] & Y \arrow[d, hook, "h"] \\
& Z \arrow[r, hook, "k"'] & X
\end{tikzcd}$$

このとき、自然な包含写像 $j:A \hookrightarrow P(h,k)$ に対して次が成立する。

$$\begin{aligned}
&j_*:\pi_i(A) \cong \pi_{i+1}(X;Y,Z),\ (\text{同型}) && \text{if } i < n{+}m{-}1,\\
&j_*:\pi_{n+m-1}(A) \twoheadrightarrow \pi_{n+m}(X;Y,Z).\ (\text{全射}) && \text{if } i = n{+}m{-}1,
\end{aligned}$$

この定理から直ぐに導かれる、特に有用な次の二つの系を挙げておく。

系 4.29.1 CW 複体 K が $(r{-}2)$-連結のとき、懸垂の誘導する準同型 $\Sigma_*:\pi_{q-1}(K) \to \pi_q(\Sigma K)$ は、$q < 2r{-}2$ で同型で $q = 2r{-}2$ で全射である。 特に $K = S^{r-1}$ の場合が Freudenthal の定理である。

系 4.29.2 CW 複体 X が $(n{-}1)$-連結で次元が高々 $2n{-}1$ のとき、次の様なCW複体 K が存在する。

(1) ホモトピー同値 $X \simeq \Sigma K$ がある。

(2) K は $(n{-}1)$ 連結でかつ $\langle K$ の次元$\rangle$ = $\langle X$ の次元$\rangle{-}1$ である。

第2章　L–S カテゴリ数

5　Lusternik と Schnirelmann の猫たち

5.1　幾何的な猫たち

問題 5.1 閉多様体 M 上の smooth function $f : M \to \mathbb{R}$ の critical points は、最小限、いったいいくつあるであろうか?

その最少数を $\mathrm{Crit}(M)$ で表すことにする。 もしさらにこの critical points に「非退化」という条件を付け加えた場合、上の問題は次のように変化する。

問題 5.2 閉多様体 M 上の Morse function $f : M \to \mathbb{R}$の critical points は、最小限、いったいいくつあるであろうか?

Morse function ならば critical points はハンドル分解に対応し、従ってそのホモトピー論的な下限としては M の胞体分解での胞体の個数が対応する。 しかし始めに述べたような critical points での Hessian の退化があり得る状況では、次が成立する。

定理 5.3 (**Takens 1968 [133]**) 閉多様体 M に対し $\mathrm{Crit}(M) \le \mathrm{Dim}(M){+}1$ が成立する。

この場合はむしろ embedded closed balls による被覆の枚数に対応するようである。 さて閉多様体 M は、いったい何枚の embedded closed balls で覆い尽くせるであろうか? その最少数を $\mathrm{Ball}(M)$ で表すと、[133]の証明から次の不等式が得られる。

定理 5.4 (**Takens [133]**) 閉多様体 M に対し $\mathrm{Ball}(M) \le \mathrm{Crit}(M) \le \mathrm{Dim}(M){+}1$ が成立する。

定義 5.5 位相空間 X の単体分割は、いったい何枚の可縮な閉集合で覆い尽くせるであろうか? その最少数から 1 を引いた数を $\mathrm{gCat}(X)$ で表す。 これも位相不変量であるがホモトピー不変ではない幾何的な猫の一種である。

Brittenham [19] によれば 1930 年代初め、J. H. C. Whitehead は S^3 にホモトピー同値な 3 次元閉多様体 M から一点を除いた残りが contractible open submanifold となり、これが open ball と同相であることを示すことで、Poincaré 予想の証明に至る計画を立てた。 現実にはこれは失敗し、contractible open manifold であって open ball と同相でないものが存在することが J. H. C. Whitehead 自身によって発見された。 (一点ではなく embedded open disk を M から取り除けば、残りは 2 次元球面を境界にもつ 3 次元の可縮なコンパクト多様体となる。) よく似た問題として、次の問題があげられる。

問題 5.6 閉多様体 M 上の Morse function $f : M \to \mathbb{R}$ の critical values の個数 $\nu(f)$ は、最小限、いったいいくつあるであろうか？

その最少数を $\mathrm{CV}(M)$ で表すことにする。 これは同時に接着可能なハンドルの組が何組あるかという問題として捉え直すことができる。 このように考えた場合、猫と同様に次が成立することがわかる。

定理 5.7 閉多様体 M に対し $\mathrm{CV}(M) \leq \mathrm{Dim}(M){+}1$ が成立する。

5.2 古典的な猫たち

さて幾何的な猫 $\mathrm{gCat}(-)$ をホモトピー不変量としたものが Lusternik と Schnirelmann の猫たちである: まず次の言葉を用意する。 位相空間Xの部分集合 A は、その包含写像 $i : A \hookrightarrow X$ が定置写像に homotopic であるとき categorical (猫的) と呼ばれる。 この概念を「可縮」のかわりに用いることで、次の不変量が得られる。

定義 5.8 (Lusternik–Schnirelmann [91]) 閉多様体 M は、いったい何枚の猫的な閉集合で覆い尽くせるであろうか？ その最少数から 1 を引いた数を $\mathrm{cat}(M)$ で表す。

R. Fox [43]によれば、閉多様体 M の Lusternik-Schnirelmann の猫 $\mathrm{cat}(M)$ の定義において、「閉集合」を「開集合」に置き換えても、値は変わらない。 さらに G. W. Whitehead [145, 146], Berstein-Ganea [13] によれば、多様体 M に対しては L-S の猫の定義において、「閉集合」を「包含写像が homotopy 拡張性質を持つ (= NDR) 閉集合」に置き換えても、値は変わらない。 ところが猫的な NDR 閉集合 A に対する包含写像 $i_A : A \hookrightarrow X$ の null-homotopy は、恒等写像 $1_X : X \to X$ を変形して、A を基点に潰す写像 $r_A : X \to X, r_A(A) = \{*\}$ にする homotopy に拡張される。 従って $m{+}1$ 枚の猫的な NDR 閉集合によって X が覆われるとき、上の拡張された homotopy を並べることで $m{+}1$ 重対角写像 $\Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X$ を「fat wedge」と呼ばれる部分空間 $\prod^{m+1}_m X = \{(x_0, x_1, ..., x_m) \big| \exists i \text{ s.t. } x_i = *\} \subseteq \prod^{m+1} X$ に圧縮する homotopy が得られる。 本稿ではホモトピー論で標準的な次の定義を L-S の猫の定義として採用する:

定義 5.9 (G. W. Whitehead [145, 146])

$$\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, \begin{array}{l}\text{The } m{+}1\text{-fold diagonal map } \Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X \text{ is} \\ \text{compressible into } \prod^{m+1}_m X \subseteq \prod^{m+1} X.\end{array} \right\}$$

（この $\prod^{m+1}_m(X) = \{(x_0, x_1, ..., x_m) \big| \exists_i x_i = *\}$ は 「fat wedge」 などと呼ばれる）

定理 5.10 (**L-S [91], Takens [133], James [77], Whitehead [146]**) (1) 閉多様体 M に対して不等式 「$\mathrm{cat}(M){+}1 \leq \mathrm{gCat}(M){+}1 \leq \mathrm{Ball}(M) \leq \mathrm{Crit}(M) \leq \mathrm{Dim}(M) + 1$」 が成立する。

(2) CW 複体 X に対して不等式「$\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{gCat}(X)$」が成立する。

上の (2) に挙げた不等式を用いて、Ganea の「強い」猫が次のように与えられる:

定義 5.11 (Ganea [46]) 位相空間 X に対して、X とホモトピー同値な CW 複体 Y 全体を考え、$\mathrm{gCat}(Y)$ の最小値を $\mathrm{Cat}(X)$ で表すことにする。

Ganea は cone-length などと呼ばれる「強い」猫のもう一つの定義を与えている。

定義 5.12 連続写像 $A \xrightarrow{h} B$ に対する写像錐 C_h とは、位相和 $\{*\} \amalg A{\times}[0,1] \amalg B$ から $(a,1) \in A{\times}[0,1]$ と $h(a) \in B$ とを、また $(a,0) \in A{\times}[0,1]$ と $*$ とを、さらに $(*,t) \in A{\times}[0,1]$ と $*$ とを同一視して得られる商空間である。 また B は、包含写像 $B \hookrightarrow \{*\} \amalg A{\times}[0,1] \amalg B$ と等化写像 $\{*\} \amalg A{\times}[0,1] \amalg B \to C_h$ の合成写像ににより C の閉部分空間とみなされる。

定義 5.13 (Ganea [46]) 位相空間 X に対して、CW 複体の連続写像の有限集合 $\{h_n : A_n \to Y_{n-1} \ \ m \geq n \geq 1\}$ で、$Y_0 = \{*\}$ と $Y_n = C_{h_{n-1}}$ $(m \geq n \geq 1)$ をみたし $Y_m \simeq X$ となるものをすべて考える。各々の集合はいったいいくつの写像からなるのであろうか? その最少数を $\mathrm{Cone}(X)$ で表す。

定理 5.14 (**Ganea [46]**) 位相空間 X に対して常に $\mathrm{Cone}(X) = \mathrm{Cat}(X)$ であり、等式 $\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\{\mathrm{Cat}(Y)\,;\, Y \simeq X \vee Z \text{ for some } Z\}$ が成立し、従って $\mathrm{Cat}(X) \leq \mathrm{cat}(X) + 1$ である。

略証: (前半) $\mathrm{Cone}(X)$ の値による帰納法を用いて「$\mathrm{Cone}(X) \geq \mathrm{Cat}(X)$」が示される。 また逆向きの不等号は、$\mathrm{Cat}(X)$ の値による帰納法で示される。

(後半) $\mathrm{cat}(X) \leq m$ となる為には、$\mathrm{Cone}(Y) \leq m$ をみたす空間 Y で $Y \simeq X \vee Z$ となるものが存在することが必要十分であることが示される。 終り.

系 5.14.1 $\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\{\mathrm{Cat}(Y)\,;\, Y \text{ dominates } X\}$

Cornea は $A_n = \Sigma^n B_n$ に限定して「強い」猫の新たな定義を与えた。

定義 5.15 (Cornea [23]) 位相空間 X に対して、CW 複体の連続写像の有限集合 $\{h_n : \Sigma^n B_n \to Y_n \ \ m \geq n \geq 0\}$ で、$Y_0 = \{*\}$ と $Y_{n+1} = C_{h_n}$ $(m{-}1 \geq n \geq 0)$ をみたし $Y_m \simeq X$ となるものをすべて考える。 各々の集合はいったいいくつの写像からなるのであろうか? その最少数から 1 を引いた数を $\mathrm{Cl}(X)$ で表すことにする。

定理 5.16 (**Cornea [25]**) 位相空間 X に対して「$\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{Cat}(X)$」が成立する。

以上のように「強い猫」は本質的には unique であることが分かっている。

さらに $\Sigma^n B_n$ として球面の一点和をとることで有理ホモトピー論における cone-length $\mathrm{cl}(X)$ に類似した不変量 $\mathrm{Cat}_S(X)$ が得られ、これを用いて $\mathrm{cat}_S(X)$ が次のように定義される。

定義 5.17 $\mathrm{cat}_S(X) = \mathrm{Min}\{\mathrm{Cat}_S(Y)\,;\, Y \text{ dominates } X\}$.

定理 5.18 (**L-S [91], James [77], Takens [133, 134], Ganea [46]**) (1) 閉多様体 M に対して、次の不等式が成立する。

$$\mathrm{Cat}(M) \le \mathrm{cat}(M){+}1 \le \mathrm{Cat}(M){+}1 \le \mathrm{gCat}(M) + 1 \le \mathrm{Ball}(M) \le \mathrm{Crit}(M) \le \mathrm{Dim}(M){+}1.$$

(2) CW 複体 X に対して、次の不等式が成立する。

$$\mathrm{Cat}(X){-}1 \le \mathrm{cat}(X) \le \mathrm{Cat}(X) \le \mathrm{gCat}(X) \le \mathrm{Dim}(X).$$

定理 5.19 (1) 閉多様体 M に対して、次の不等式が成立する。

$$\mathrm{cat}_S(M){+}1 \le \mathrm{Cat}_S(M){+}1 \le \mathrm{CV}(M) \le \mathrm{Dim}(M){+}1.$$

(2) CW複体 X に対して、不等式「$\mathrm{cat}_S(X) \le \mathrm{Cat}_S(X) \le \mathrm{Dim}(X)$」が成立する。

$|\,\mathrm{Cat}_S(X){-}\,\mathrm{cat}_S(X)|$ などについては不明な点が多く、これらについてこれ以上は立ち入らない。

5.3 古典的な弱い猫たち

L-S の猫や強い猫たちに比べてより弱い不変量ではあるが、より計算の可能性が高い猫たちが幾つか知られている。 そのうちの古典的なものを以下に述べる。

定義 5.20 (Whitehead [145, 146])

$$\mathrm{wcat}(X) = \mathrm{Min}\left\{m \ge 0 \,\middle|\, \bar{\Delta}^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X \to \bigwedge^{m+1} X \text{ is null-homotopic}\right\}$$

このとき $\bigwedge^{m+1} X = \dfrac{\prod^{m+1} X}{\prod^{m+1}_m X}$ に注意すれば位相空間 X に対して次が成立する。

定理 5.21 (**G. W. Whitehead [145, 146]**) (1) $\mathrm{wcat}(X) \le \mathrm{cat}(X)$.

(2) h^* を乗法的な一般コホモロジー論とする。 $\tilde{h}^*(X)$ のどれかの m 個の元の積が 0 でないならば、$\mathrm{wcat}(X) \ge m$ が成立する。

略証: まず (1) は、$\mathrm{cat}(X) = m$ とすると、$\Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X$ が $\prod^{m+1}_m X$ に compressible であることから、reduced diagonal $\bar{\Delta}^{m+1} : X \to \wedge^{m+1} X$ は零ホモトープであり、従って定義から $\mathrm{wcat}(X) \le m = \mathrm{cat}(X)$ が成立する。 次に (2) は対偶を示す: $\mathrm{wcat}(X) < m$ とすると、定義から $\bar{\Delta}^m : X \to \wedge^m X$ は零ホモトープである。 さらに $\bar{h}^*(X)$ の任意の m 個の元の積は

$$\bar{h}^*(X) \otimes_{h^*} \cdots \otimes_{h^*} \bar{h}^*(X) \longrightarrow \bar{h}^*(X \wedge \cdots \wedge X) \xrightarrow{\bar{\Delta}^{m*}} \bar{h}^*(X)$$

の像に入り、$\bar{\Delta}^{m*}=0$ なのですべて 0 である。 終り.

定義 5.22 位相空間 X に対して cup-length を定める。 cup-length は有理ホモトピー論では $\mathrm{c}(-)$ と表示されるが、ここでは (total) Chern class との競合を避けて $\mathrm{cup}(-)$ と表示する：

(1) h を乗法的コホモロジー論とするとき、

$$\mathrm{cup}(X;h)=\mathrm{Min}\left\{m\geq 0\,\middle|\,\forall_{\{u_0,\cdots,u_m\in\tilde{h}^*(X)\}}\ u_0{\cdot}u_1{\cdot}\cdots{\cdot}u_m=0\right\}$$ と定める。

(2) $\mathrm{cup}(X)=\mathrm{Max}\,\{\mathrm{cup}(X;h)\,|h$ は乗法的コホモロジー論$\}$と定める。

定理 5.23 任意の乗法的コホモロジー論 $h^*(-)$ に対し次の不等式／等式が成立する：

(1) $\mathrm{cup}(X;h)\ \leq\ \mathrm{cup}(X)\ \leq\ \mathrm{wcat}(X)\ \leq\ \mathrm{cat}(X).$

(2) $\mathrm{cup}(X)=\mathrm{Min}\left\{m\geq 0\,\middle|\,\tilde{\Delta}^{m+1}:X\to\wedge^{m+1}X \text{ は stably trivial}\right\}$

証明: (1) は定義より明らかである。 そこでここでは (2) を証明する: 始めに $m=$ (右辺) とすれば、cup-length の定義より直ちに $\mathrm{cup}(X)\leq m$ を得る。 次に、逆向きの不等号を示す: まず、空間 X の懸垂 spectrum の多重 smash 積 $\bigwedge^i(X)=\bigwedge^i\Sigma^\infty X=\Sigma^\infty\bigwedge^i X$ $(i\geq 0)$ の無限 wedge 和で表される次のような乗法的 spectrum $\mathcal{E}_X$ をとり、$h_X(-)=\{(-),\mathcal{E}_X\}$ と定義する:

$$\mathcal{E}_X=(S^0)\vee(X)\vee{\bigwedge}^2(X)\vee\cdots\vee{\bigwedge}^m(X)\vee{\bigwedge}^{m+1}(X)\vee\cdots.$$

そして $\iota\in\tilde{h}^*_X(X)=\{(X),\mathcal{E}_X\}$ を wedge 和について$\mathcal{E}_X$ の 2 番目の因子 (X) の $\mathcal{E}_X$ への包含写像で表される要素とすると、$\iota^m=\bar{\Delta}^{m*}(\iota\otimes\cdots\otimes\iota)\in\tilde{h}^*_X(X)=\{(X),\mathcal{E}_X\}$ は $\bar{\Delta}^m:X\to\bigwedge^m X$ で代表される$\mathcal{E}_X$ の m+1 番目の因子 $\bigwedge^m(X)$ の $\mathcal{E}_X$ への包含写像で表される要素なので、m の取り方から non-trivial である。従って $\mathrm{cup}(X)\geq\mathrm{cup}(X;h_X)\geq m$ を得る。 終り.

また位相空間が単連結の場合、これらの弱い猫たちと L-S の猫は全てを p-local で考えることにより、p-local version である $\mathrm{cup_p}(-),\mathrm{wcat}_p(-),\mathrm{cat_p}(-),\mathrm{Cat_p}(-)$ とその間の不等式を得る。

$$\mathrm{cup}(X)\ \leq\ \mathrm{wcat}(X)\ \leq\ \mathrm{cat}(X)\ \leq\ \mathrm{Cat}(X),$$

$$\mathrm{cup_p}(X)\leq\mathrm{cup}(X),\quad \mathrm{wcat}_p(X)\leq\mathrm{wcat}(X),\quad \mathrm{cat_p}(X)\leq\mathrm{cat}(X),\quad \mathrm{Cat_p}(X)\leq\mathrm{Cat}(X),$$

$$\mathrm{cup_p}(X)\ \leq\ \mathrm{wcat}_p(X)\ \leq\ \mathrm{cat_p}(X)\ \leq\ \mathrm{Cat_p}(X).$$

6 L–S の猫の相対化

6.1 Categorical sequence

Fox は [43] の中で、空間 X に対する `categorical sequence' という概念を定義した： $* \simeq F_0 \subset \cdots \subset F_i \subset \cdots \subset F_m = X$ を満たす X の部分空間の列で、各々の $i > 0$ について $F_i \setminus F_{i-1}$ が X の中で可縮であるという条件を満たすものである。 Fox によればその最小値は $\mathrm{cat}(X)$ に等しい。

上のような categorical sequence の定義に対し、通常の L-S カテゴリ数の定義と同様な対角線写像を用いた定義への置き換えを与える為に、Fadell と Husseini [35] による相対 L-S カテゴリ数の定義に立ち返ってみよう： 相対 CW 複体 $(X; A)$ に対して、$m{+}1$ 枚の閉集合 U_j, $0 \le j \le m$ による X の被覆で $U_0 \supset A$ は X の中で A 相対ホモトピーで A に圧縮可能であり、$j \ge 1$ に対する U_j は X の中で可縮であるようなものがとれる最小の m を $\mathrm{cat}^{\mathrm{FH}}(X; A)$ とする。 通常の L-S カテゴリ数の場合と同様に、相対 CW 複体 $(X; A)$ に対する上記の相対 L-S カテゴリ数の定義を対角線写像を用いて以下のように書き直す。

定義 6.1 相対 CW 複体 $(X; A)$ に対して、$m{+}1$ 重対角線写像 $\Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X$ が A 相対で $\mathrm{T}^{m+1}(X; A) = A \times \prod^{m} X \cup X \times \mathrm{T}^{m} X \subseteq \prod^{m+1} X$ （対 $(X; A)$ の `fat wedge'） に圧縮可能となるような最小の m を $\mathrm{cat}^{\mathrm{FH}}(X; A)$ と定義する。

Cornea は [27] の中で Harper のアイデアを用いて、相対 L-S カテゴリ数の定義を次のように緩めても変わらないことを示した：

定理 6.2 相対 CW 複体 $(X; A)$ に対して、$m{+}1$ 重対角線写像 $\Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X$ が写像 $s : X \to \mathrm{T}^{m+1}(X; A) \subseteq \prod^{m+1} X$ に圧縮可能かつ $s|_A = \Delta^{m+1}|_A : A \to \prod^{m+1} A \subset \mathrm{T}^{m+1}(X; A)$ となるような最小の m が $\mathrm{cat}^{\mathrm{FH}}(X; A)$ と一致する。

この定義を踏まえて categorical sequence の新しい定義を次のように与える：

定義 6.3 CW 複体 X に対して、$* \simeq F_0 \subset \cdots \subset F_i \subset \cdots \subset F_m \simeq X$ を満たす CW 複体の列が categorical sequence とは、 各々の $i > 0$ について対角線写像 $\Delta_i : F_i \xrightarrow{\Delta} F_i \times F_i \subset F_m \times F_m$ が F_{i-1} 相対で $F_{i-1} \times F_m \cup F_m \times *$ に圧縮可能となることとする。 そこで、X に対して存在する categorical sequence の最小の長さ m を $\mathrm{catseq}(X)$ と定義する。 ここで F_{i-1} とその対角線写像による $F_{i-1} \times F_{i-1} \subset F_{i-1} \times F_m \cup F_i \times *$ の中の像の全体を同一視する。

Fadell と Husseini による相対 L-S カテゴリ数と Fox による categorical sequence を併せて考えることにより、我々は、次のような意味で categorical sequence の相対化を与えることができる。

定義 6.4 相対 CW 複体 $(X;A)$ に対して、$(A;A) \simeq (F_0;A) \subset \cdots \subset (F_i;A) \subset \cdots \subset (F_m;A) \simeq (X;A)$ を満たす相対 CW 複体の列が categorical sequence とは、各々の $i > 0$ について対角線写像 $\Delta_i : F_i \xrightarrow{\Delta} F_i{\times}F_i \subset F_m{\times}F_m$ が F_{i-1} 相対で $F_{i-1}{\times}F_m \cup F_m{\times}{*}$ に圧縮可能となることとする。 そこで、$(X;A)$ に対して存在する categorical sequence の最小の長さ m を $\mathrm{catseq}(X;A)$ と定義する。

6.2 三系の L–S カテゴリ数

相対 L-S カテゴリには、Berstein と Ganea によって [13] の中で与えられたもう一つの (本質的に異なる) 定義が存在し、「写像の L-S カテゴリ」とも呼ばれる:

定義 6.5 (Berstein and Ganea) CW 複体の対 (X,K) に対して、$m{+}1$ 重対角線写像 $\Delta^{m+1} : K \to \prod^{m+1} K \subset \prod^{m+1} X$ が $\mathrm{T}^{m+1} X \subseteq \prod^{m+1} X$ に圧縮可能となるような最小の m を $\mathrm{cat}^{\mathrm{BG}}(X,K)$ と定義する。

さらに近年これらの相対 L-S カテゴリ数と本質的に異なるカテゴリ数 $\mathrm{cat}^{\mathrm{AL}}(X,B)$ が Arkowitz と Lupton によって [3] の中で与えられたが、その正確な定義はここでは述べない。 ここではむしろ $\mathrm{cat}^{\mathrm{FH}}(X;A)$、$\mathrm{cat}^{\mathrm{BG}}(X,K)$ や $\mathrm{cat}^{\mathrm{AL}}(X,B)$ の関係に注目し、これらを特別な場合として包含する新しいカテゴリ数を導入する。 今から後は、相対 CW 空間の圏 $\underline{\mathcal{CW}}_A$ の中で小論を進めることとする。

定義 6.6 相対 CW 複体の三系 $(X;K,L;A) \in \underline{\mathcal{CW}}_A$ に対して、$m{+}1$ 重対角線写像 $\Delta^{m+1} : K \to \prod^{m+1} K \subseteq \prod^{m+1} X$ が A 相対で $\mathrm{T}^{m+1}(X;L) = L{\times}\prod^{m} X \cup X{\times}\,\mathrm{T}^{m} X \subseteq \prod^{m+1} X$ (対 $(X;L)$ の `fat wedge') に圧縮可能となるような最小の m を $\mathrm{cat}(X;K,L;A)$ と定義する。

系 6.6.1 相対 CW 複体 $(X;A)$ に対して、$(A;A) \simeq (F_0;A) \subset \cdots \subset (F_i;A) \subset \cdots \subset (F_m;A) \simeq (X;A)$ を満たす相対 CW 複体の列が categorical sequence となる為には、各々の $i > 0$ について $\mathrm{cat}(F_m;F_i,F_{i-1};F_{i-1}) \leq 1$ となることが必要十分である。

次の命題は定義から容易に得られる。

命題 6.7 (1) $X \supset K \supset L = A = *$ とすると、$\mathrm{cat}(X;K,*;*) = \mathrm{cat}^{\mathrm{BG}}(X,K)$ が成立する。

(2) $X = K \supset L = A \supset *$ とすると、$\mathrm{cat}(X;X,A;A) = \mathrm{cat}^{\mathrm{FH}}(X;A)$ が成立する。

(3) $p : X \to B$ をファイバー $L \subset X$ を持つファイバー空間とし、$K = X \supset L \supset A = *$ とすると、$\mathrm{cat}(X;X,L;*) = \mathrm{cat}^{\mathrm{AL}}(X,B)$ が成立する。

予想 1 $\mathrm{catseq}(X) = \mathrm{cat}(X)$.

7 L–S の猫の計算

7.1 L–S の猫の一般的性質

例 7.1 (1) $\mathrm{cat}(\{*\}) = 0$. より一般に可縮な空間 D に対し $\mathrm{cat}(D) = 0$ が成立する。

(2) $\mathrm{cat}(S^n) = 1$. より一般に懸垂空間 ΣV に対し $\mathrm{cat}(\Sigma V) \leq 1$ が成立する。

(3) 位相空間 X が位相空間 Y を支配すれば、 $\mathrm{cat}(X) \geq \mathrm{cat}(Y)$ が成立する。 特に、 位相空間 X が位相空間 Y とホモトピー同値ならば、 $\mathrm{cat}(X) = \mathrm{cat}(Y)$ が成立する。

(4) (Varadarajan [142], Hardie [53]) F を fibre とする fibre 束 $p : E \to B$ は不等式 $\mathrm{cat}(E)+1 \leq (\mathrm{cat}(F)+1)\cdot(\mathrm{cat}(B)+1)$ をみたす。

(5) (Fox [43]) 位相空間 X, Y に対して、 $\mathrm{cat}(X\times Y) \leq \mathrm{cat}(X)+\mathrm{cat}(Y)$ が成立する。

定理 7.2 (**Ganea [46]**) $(d-1)$ 連結 $(d \geq 2)$ な位相空間 X は $\mathrm{Cat}(X) \leq \dfrac{\mathrm{Dim}(X)}{d}$ を満たす。

略 証: X の $(d-1)$-skeleton は $\{*\}$ であるとしてよい。 まず $k \geq 0$ に対し X_k を X の $((k+1)d-1)$-skeleton とする。 商空間 X_{k+1}/X_k の次元と連結性の関係から、これは何らかの空間 K_k の懸垂である:$X_0 = \{*\}$、$X_1 \simeq \Sigma K_1$ また $X_{k+1}/X_k \simeq \Sigma K_k$。 よって $X_1 \simeq X_0 \cup_{h_0} C(K_0),\ h_0 = * : K_0 \to \{*\}$ である。 さて $k \geq 1$ のとき Blakers-Massey の定理から商写像 $p : (X_{k+1}, X_k) \to (X_{k+1}/X_k, \{*\})$ は $q < (k+2)d-1$ で同型となり、$q = (k+2)d-1$ で全射となる準同形 $p_* : \pi_q(X_{k+1}, X_k) \to \pi_q(X_{k+1}/X_k)$ を誘導する。 従って $\Omega(p) : \Omega(X_{k+1}, X_k) \to \Omega(X_{k+1}/X_k)$ は $(k+2)d-2$ 連結である。 $\mathrm{Dim}(K_k) \leq (k+1)d-2$ より、J. H. C. Whitehead の定理より

$$[C(K_k), K_k; X_{k+1}, X_k] = [K_k, \Omega(X_{k+1}, X_k)] \to [K_k, \Omega(X_{k+1}/X_k)] = [\Sigma K_k, \Sigma K_k]$$

は全射となる。 右辺の ΣK_k の恒等写像に対応する写像 $\chi_k \in [C(K_k), K_k; X_{k+1}, X_k]$ を左辺から選び、$h_k = \chi_k|_{K_k} : K_k \to X_k$ とおけば $X_{k+1} \simeq X_k \cup_{h_k} C(K_k),\ h_k : K_k \to X_k\ (k \geq 1)$ を得る。 これは $\mathrm{Cat}(X_m) \leq m\ (m \geq 0)$ を意味する。 そこで $\mathrm{Dim}(X) = nd + r,\ 0 \leq r < d$ とすると、$\mathrm{Dim}(X) \leq (n+1)d - 1$ より $\mathrm{Cat}(X) = \mathrm{Cat}(X_n) \leq n \leq \frac{\mathrm{Dim}(X)}{d}$ を得る。 終り.

懸垂空間 ΣA は co-group-like なコホップ空間であり、$i_t : \Sigma A \hookrightarrow \Sigma A\vee\Sigma A$ を第 t 成分への包含写像 $(t = 1, 2)$、$p_t : \Sigma A\vee\Sigma A \to \Sigma A$ を第 t 成分への射影 $(t = 1, 2)$ とすると、$p_{s*}i_t = \delta_{s,t}\cdot 1_{\Sigma A}$ ($\delta s, t$ は Kronecker の delta) が成立する。 また $\mathrm{ev}^X : \Sigma\Omega(X) \to X$ は代入写像とする。

定理 7.3 (**Ganea [47]**) 位相空間 A, B に対する次の群の系列は、短完全列である：

$$1 \to [\Sigma B, \Omega(\Sigma A)*\Omega(\Sigma A)] \xrightarrow{[e_1,e_2]_*} [\Sigma B, \Sigma A\vee\Sigma A] \xrightarrow{p_{1*}\times p_{2*}} [\Sigma B, \Sigma A] \times [\Sigma B, \Sigma A] \to 1.$$

(写像 $i_{1*}\times i_{2*}$ が $p_{1*}\times p_{2*}$ の右逆写像を与える)　ただし $[e_1, e_2]$ は $e_1{=}i_1\circ\mathrm{ev}^{\Sigma A}$ と $e_2{=}i_2\circ\mathrm{ev}^{\Sigma A}$ との一般 Whitehead 積である。　$\Sigma A\times\Sigma A$ 上にあるこの fibration を diagonal map $\Delta : \Sigma A \to \Sigma A\times\Sigma A$ によって ΣA 上に誘導してできる Ganea [47]の fibration $\Omega(\Sigma A)*\Omega(\Sigma A) \xrightarrow{p_1^{\Omega\Sigma A}} \Sigma\Omega\Sigma A \xrightarrow{e_1^{\Sigma A}} \Sigma A$ は、Hopf 空間 $\Omega\Sigma A$ に対する Sugawara の Hopf fibration に一致し、次の短完全列を導く:

$$1 \to [\Sigma B, \Omega(\Sigma A)*\Omega(\Sigma A)] \xrightarrow{p_1^{\Omega\Sigma A}{}_*} [\Sigma B, \Sigma\Omega\Sigma A] \xrightarrow{e_1^{\Sigma A}{}_*} [\Sigma B, \Sigma A] \to 1,$$

(写像 $\Sigma_*\,\mathrm{ad}_*$ と準同形 $\sigma(\Sigma A)_*$ とがともに $e_1^{\Sigma A}{}_*$ の右逆写像を与える) ただし $\sigma(\Sigma X)$は$\sigma(\Sigma X)(t,x) = (t, \ell_x)$, $\ell_x(u) = (u, x)$ により与えられる。　従っていかなる写像 $f : \Sigma B \to \Sigma A$ に対しても $e_1^{\Sigma A}\circ\sigma(\Sigma A)\circ f \simeq f \simeq e_1^{\Sigma A}\circ\Sigma\,\mathrm{ad}\,f = e_1^{\Sigma A}\circ\Sigma\Omega f\circ\sigma(\Sigma B)$, $\mathrm{ad}(f)(b) = f\circ\ell_b$ が成立する。

定義 7.4 (B-H [14]) 任意の写像 $f : \Sigma B \to \Sigma A$ に対し $p_1^{\Omega\Sigma A}\circ g \simeq \sigma(\Sigma A)\circ f - \Sigma\Omega f\circ\sigma(\Sigma B)$ をみたす $g : \Sigma B \to \Omega(\Sigma A)*\Omega(\Sigma A)$ が up to homotopy で一意的に存在する (Saito [114])。　この g を $H_1(f)$ で表し、Berstein-Hilton の (一次の) Hopf 不変量と言う。

注 7.5 Berstein-Hilton による本来の (高次) Hopf 不変量 H_m は Whitehead の criterion に従い、ホモトピー集合 $[C\Sigma B, \Sigma B; \prod^{m+1} X, \prod_m^{m+1} X]$ ($m{=}1$&$X{=}\Sigma A$ の場合は $[C\Sigma B, \Sigma B; \Sigma A\times\Sigma A, \Sigma A\vee\Sigma A]$) に値を持つ。　一方で定義 7.4 における H_1 の定義もループ空間の A_∞ 構造を用いて一般化され高次 Hopf 不変量のもう一つの定義を与える。　これら二つの定義が等価であることも I [69], Stanley [124]) により明らかにされたが、新しい定義にはいくらかの利点がある。　なぜなら我々は A_∞ 構造の強力な性質を使えるようになるからである。

定理 7.6 (**B-H [14]**) 任意の写像 $f : S^q \to S^r$ に対して、接着空間 $Q = S^r \cup_f e^{q+1}$ の L-S の猫は「$\mathrm{cat}(Q) = 1$ iff $H_1(f) = 0$」かつ「$\mathrm{cat}(Q) = 2$ iff $H_1(f) \neq 0$」をみたす。

7.2 L-S の猫の計算と問題

例 7.7　(1) $\mathrm{cat}(S^{n_1}\times S^{n_2}\times\cdots\times S^{n_r}) = r$, $n_i \geq 1$, $(1 \leq i \leq r)$. 特に $\mathrm{cat}(T^r) = r$, $r \geq 1$.

(2) (Singhof [120, 121]) $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{cup}(U(n)) = \mathrm{cat}(U(n)) = \mathrm{Cat}(U(n))\ (= n = \mathrm{cup}(U(n); \mathbb{Z}),$$

$$\mathrm{cup}(SU(n)) = \mathrm{cat}(SU(n)) = \mathrm{Cat}(SU(n))\ (= n-1 = \mathrm{cup}(SU(n); \mathbb{Z}).$$

(3) (James-Singhof [79]) $2 \le n \le 8$ に対して

$$\mathrm{cup}(SO(n)) = \mathrm{cat}(SO(n)) = \mathrm{Cat}(SO(n))\ (= \mathrm{cup}(SO(n); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

(4) (I-Mimura [72], I-Mimura-Nishimoto [73]) $3 \le n \le 8$ に対して

$$\mathrm{cup}(Spin(n)) = \mathrm{cat}(Spin(n)) = \mathrm{Cat}(Spin(n))\ (= \mathrm{cup}(Spin(n); KO)?)$$

(5) (Schweitzer [118], Fernándes Suárez-Gómez Tato-Tanré-Strom [40], I-M [72])

$$\mathrm{cup}(Sp(n)) = \mathrm{cat}(Sp(n)) = \mathrm{Cat}(Sp(n))\ (= 2n-1),\ n \le 3.$$

この章の最後に、古典的な問題とその問題に対する幾つかの解答を挙げる。

問題 7.8 2 次元 torus T^2 上に、 T^2 を覆う 3 枚の closed disks を図示せよ。

この解答は、小論の最初のページに載せてある。

次の問題の肯定的な解答は通常 Arnold 予想と呼ばれる。

問題 7.9 (**Arnold 196x (p.66 of [20])**) Symplectic 多様体 M 上の Symplecto-morphism $\phi : M \to M$ の固定点の個数 $\mathrm{Fix}(\phi)$ は常に $\mathrm{Crit}(M)$ 以上あるか？

また次の問題の肯定的な解答は通常 Ganea 予想と呼ばれる。

問題 7.10 (**Ganea 1971 [48]**) $\mathrm{cat}(X \times S^n)$ の値は $\mathrm{cat}(X) + 1$ となるか？

定理 7.11 (**Singhof 1979 [123], Rudyak 1997 [111]**) 閉多様体 M が次元 $\mathrm{Dim}(M) = d$ と L-S の猫 $\mathrm{cat}(M) = m$ に関する不等式 $m \ge \dfrac{d+1}{2}$ をみたすならば、 Ganea の予想は正しい。 つまりすべての $n \ge 1$ について $\mathrm{cat}(M \times S^n) = m+1$ が成立する。

定理 7.12 (**Hofer 1988 [58], Floer 1989 [41, 42]**) 任意の Symplectic 多様体 M に対して、 $\mathrm{Fix}(\phi) \ge \mathrm{cup}(M)+1$ が成立する。

定理 7.13 (**Hess 1991 [55]**) 有理ホモトピー論の世界では Ganea 予想は正しい。

そして '90 年代末以後、これらの問題は急展開を迎えた。

定理 7.14 (**Félix-Halperin-Lemaire 1998 [37]**) 有理ホモトピー論の世界では、 直積空間の猫は各々の空間の猫の和に一致する。

定理 7.15 (**Liu-Tian 1998 [90], Fukaya-Ono 1999 [45]**) M を Symplectic 多様体とする。 緩い条件の下で、固定点が非退化である場合に Arnold 予想が成立する。

定理 7.16 (**I 1998 [67]**) Ganea の予想を満たさない単連結な位相空間が存在する。

定理 7.17 (**Rudyak 1999 [113], Oprea-Rudyak 1999 [109]**) 任意の Symplectic 多様体 M に対し、$\pi_1(M)$ と $\pi_2(M)$ に関する弱い条件 ($\pi_2 = 0$ なら良い) の下で $\mathrm{cat}(M) = \mathrm{Crit}(M) - 1 = \mathrm{Dim}(M)$ が成立し、 Arnold 予想は (この場合) 正しい。

定理 7.18 (**I 2001 [69]**) Ganea の予想を満たさない単連結な閉多様体が存在する。

定理 7.19 (**I 2002 [69], Lambrechts-Stanley-Vandembroucq [92]**) 単連結閉多様体で、 その once-punctured 部分多様体と同じ L-S の猫の値を持つものが存在する。

定理 7.20 (**Oprea-Rudyak 2002 [110]**) 3 次元閉多様体は Ganea の予想を満たす。

定理 7.21 (**I 2003 [70]**) 球面上の球面束の構造を持つ閉多様体の猫は Hopf 不変量で完全に記述され、Ganea の予想が成立する場合と成立しない場合がともに現れる。

この講義ではこれらの発見に至った新たなホモトピー論的手法を導入し、前者が証明にいたり、後者が反例の発見にいたった過程の解説を試みたい。