A_∞ 構造と L-S カテゴリー数

岩 瀬　則 夫

Lusternik-Schnirelmann カテゴリー（略して L-S カテゴリー）は、多様体上の smooth な実関数の critical/stationary points の個数の下限を与える自然数として、Lusternik と Schnirelmann [84] によって 1934 年に定義されたホモトピー不変量である。ただし今日では、彼等の定義より 1 少ない（=正規化された）値で定める文献が増えてきている。それはちょうど、自然数を 1 から始めるか 0 から始めるかといった違いにあたる。本稿においては正規化された L-S カテゴリーを「L-S の猫」と呼ぶことにする。これらの不変量は、後で述べる定義から一般の位相空間に対しても定義され、空間の「複雑さ」を表す量となる。

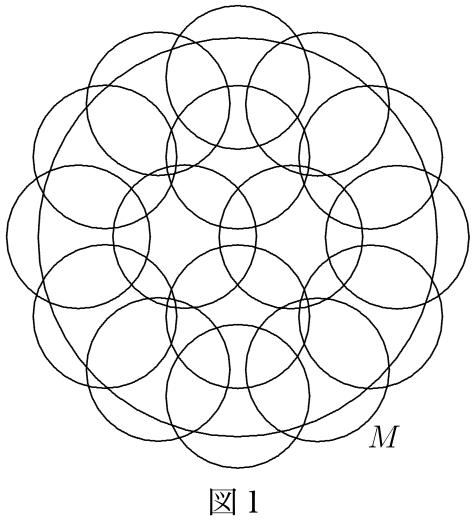

図 1

0　幾何的な猫たち

問題 0.1 閉多様体 M 上の *smooth function* $f : M \to \mathbb{R}$ の *critical points* は、最小限、いったいいくつあるであろうか？

その最少数を $\mathrm{Crit}(M)$ で表すことにする。　もしさらにこの critical points に「非退化」という条件を付け加えた場合、上の問題は次のように変化する。

問題 0.2 閉多様体 M 上の *Morse function* $f : M \to \mathbb{R}$ の *critical points* は、最小限、いったいいくつあるであろうか？

Morse function ならば critical points はハンドル分解に対応し、従ってそのホモトピー論的な下限としては M の胞体分解での胞体の個数が対応する。しかし始めに述べたような、critical points での Hessian の退化があり得る状況では、次が成立する。

定理 0.3 (Takens 1968 [126]) 閉多様体 M に対し $\mathrm{Crit}(M) \le \mathrm{Dim}(M){+}1$ が成立する。

この場合はむしろ embedded closed balls による被覆の枚数に対応するようである。さて閉多様体 M は、いったい何枚の embedded closed balls で覆い尽くせるであろうか？　その最少数を $\mathrm{Ball}(M)$ で表すと、[126] の証明から次の不等式が得られる。

定理 0.4 ([126]) 閉多様体 M に対し $\mathrm{Ball}(M) \leq \mathrm{Crit}(M) \leq \mathrm{Dim}(M){+}1$ が成立する。

定義 0.5 単体分割可能な *compact* 空間 X の単体分割は、いったい何枚の可縮な部分複体で覆い尽くせるであろうか？　その最少数から1を引いた数を $\mathrm{gCat}(X)$ で表す。　これも位相不変量であるがホモトピー不変ではない幾何的な猫の一種である。

Brittenham [15] によれば 1930 年代初め、J. H. C. Whitehead は S^3 にホモトピー同値な 3 次元閉多様体 M から一点を除いた残りが contractible open submanifold となり、これが open ball と同相であることを示すことで、Poincaré 予想の証明に至る計画を立てた。現実にはこれは失敗し、contractible open manifold であって open ball と同相でないものが存在することが J. H. C. Whitehead 自身によって発見された。(一点ではなく embedded open disk を M から取り除けば、 残りは 2 次元球面を境界にもつ 3 次元の可縮なコンパクト多様体となる。)

よく似た問題として、Morse function の critical values についての次の問題が挙げられる。

問題 0.6 閉多様体 M 上の *Morse function* $f : M \to \mathbb{R}$ の *critical values* の個数 $\nu(f)$ は、最小限、いったいいくつあるであろうか？

その最少数を $\mathrm{CV}(M)$ で表すことにする。これは同時に接着可能なハンドルの組が何組あるかという問題として捉え直すことができる。このように考えた場合、猫と同様に次が成立することがわかる。

定理 0.7 閉多様体 M に対し $\mathrm{CV}(M) \leq \mathrm{Dim}(M){+}1$ が成立する。

第 1 章　L-S カテゴリ数

1　Lusternik と Schnirelmann の猫たち

1.1　古典的な猫たち

さて幾何的な猫 $\mathrm{gCat}(-)$ をホモトピー不変量としたものが Lusternik と Schnirelmann の猫たちである：まず次の言葉を用意する。位相空間 X の部分集合 A は、その包含写像 $i : A \hookrightarrow X$ が定置写像に homotopic であるとき categorical（猫的）と呼ばれる。　この概念を「可縮」のかわりに用いることで、次の不変量が得られる。

定義 1.1 (Lusternik-Schnirelmann [84]) 閉多様体 M は、いったい何枚の猫的な閉集合で覆い尽くせるであろうか？　その最少数から 1 を引いた数 を $\mathrm{cat}(M)$ で表す。

R. Fox [37] によれば、閉多様体 M の Lusternik-Schnirelmann の猫 $\mathrm{cat}(M)$ の定義において、「閉集合」を「開集合」に置き換えても、値は変わらない。 さらに G. W. Whitehead [138, 139], Berstein-Ganea [9] によれば、多様体 M に対しては L-S の猫の定義において、「閉集合」を「包含写像が homotopy 拡張性質を持つ（=NDR）閉集合」に置き換えても、値は変わらない。 ところが猫的な NDR 閉集合 A に対する包含写像 $i_A : A \hookrightarrow X$ の null-homotopy は、恒等写像 $1_X : X \to X$ を変形して、A を基点に潰す写像 $r_A : X \to X,\ r_A(A) = \{*\}$ にする homotopy に拡張される。 従って m+1 枚の猫的な NDR 閉集合によって X が覆われるとき、上の拡張された homotopy を並べることで m+1 重対角写像 $\Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X$ を「fat wedge」と呼ばれる部分空間 $\prod_m^{m+1} X = \{(x_0, x_1, ..., x_m) | \exists i \text{ s.t. } x_i = *\} \subseteq \prod^{m+1} X$ に圧縮する homotopy が得られる。 そこで本稿では、ホモトピー論で標準的な次の定義をL-Sの猫の定義として採用する：

定義 1.2 (G. W. Whitehead [138, 139])

$$\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, \begin{array}{l} \textit{The } m\text{+1-}\textit{fold diagonal map } \Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X \\ \textit{is compressible into } \prod_m^{m+1} X \subseteq \prod^{m+1} X \end{array} \right\}$$

（この $\prod_m^{m+1}(X) = \{(x_0, x_1, ..., x_m) | \exists_i x_i = *\}$ は「*fat wedge*」などと呼ばれる）

定理 1.3 (L-S [84], Takens [126], James [71], Whitehead [139])

(1) 閉多様体 M に対して次の不等式が成立する：

$$\mathrm{cat}(M)+1 \;\leq\; \mathrm{gCat}(M)+1 \;\leq\; \mathrm{Ball}(M) \;\leq\; \mathrm{Crit}(M) \leq \mathrm{Dim}(M) + 1$$

(2) CW 複体 X に対して不等式「$\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{gCat}(X)$」が成立する。

上の (2) に挙げた不等式を用いて、Ganea の「強い」猫が次のように与えられる：

定義 1.4 (Ganea [40]) 位相空間 X に対して、X とホモトピー同値な CW 複体 Y 全体を考え、$\mathrm{gCat}(Y)$ の最小値を $\mathrm{Cat}(X)$ で表すことにする。

Ganea は cone-length などと呼ばれる、「強い」猫のもう一つの定義を与えている。

定義 1.5 連続写像 $A \xrightarrow{h} B$ に対する写像錐 $C(h)$ とは、位相和 $\{*\} \coprod A{\times}[0,1] \coprod B$ から $(a,1) \in A{\times}[0,1]$ と $h(a) \in B$ とを、また $(a,0) \in A{\times}[0,1]$ と $*$ とを同一視して得られる等化空間である。ま

た B は、包含写像 $B \hookrightarrow \{*\} \coprod A\times[0,1] \coprod B$ と等化写像 $\{*\} \coprod A\times[0,1] \coprod B \to C(h)$ の合成写像により C の閉部分空間とみなされる。

定義 1.6 (Ganea [40]) 位相空間 X に対して、CW 複体の連続写像の有限集合 $\{h_n : A_n \to Y_{n-1}\ \ m \geq n \geq 1\}$ で、$Y_0 = \{*\}$ と $Y_n = C(h_{n-1})$ $(m \geq n \geq 1)$ をみたし $Y_m \simeq X$ となるものをすべて考える。各々の集合はいったいいくつの写像からなるのであろうか？　その最少数を $\mathrm{Cone}(X)$ で表す。

定理 1.7 (Ganea [40]) 位相空間 X に対して常に $\mathrm{Cone}(X) = \mathrm{Cat}(X)$ であり、等式 $\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\{\mathrm{Cat}(Y)\,;\, Y \simeq X \vee Z \textit{ for some } Z\}$ が成立し、従って $\mathrm{Cat}(X) \leq \mathrm{cat}(X) + 1$ である。

略証*:*　（前半） $\mathrm{Cone}(X)$ の値による帰納法を用いて「$\mathrm{Cone}(X) \geq \mathrm{Cat}(X)$」が示される。　また逆向きの不等号は、$\mathrm{Cat}(X)$ の値による帰納法で示される。

（後半） $\mathrm{cat}(X) \leq m$ となる為には、$\mathrm{Cone}(Y) \leq m$ をみたす空間 Y で $Y \simeq X \vee Z$ となるものが存在することが必要十分であることが示される。　終り*.*

系 1.7.1 $\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\{\mathrm{Cat}(Y)\,;\, Y \textit{ dominates } X\}$

Cornea は $A_n = \Sigma^n B_n$ に限定して「強い」猫の新たな定義を与えた。

定義 1.8 (Cornea [19]) 位相空間 X に対して、CW 複体の連続写像の有限集合 $\{h_n : \Sigma^n B_n \to Y_n\ \ m \geq n \geq 0\}$ で、$Y_0 = \{*\}$ と $Y_{n+1} = C(h_n)$ $(m{-}1 \geq n \geq 0)$ をみたし $Y_m \simeq X$ となるものをすべて考える。各々の集合はいったいいくつの写像からなるのであろうか？　その最少数から 1 を引いた数を $\mathrm{Cl}(X)$ で表すことにする。

定理 1.9 (Cornea [21]) 位相空間 X に対して「$\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{Cat}(X)$」が成立する。

以上のように「強い猫」は本質的には unique であることが分かっている。

さらに $\Sigma^n B_n$ として球面の一点和をとることで有理ホモトピー論における cone-length $\mathrm{cl}(X)$ に類似した不変量 $\mathrm{Cat}_S(X)$ が得られ、これを用いて $\mathrm{cat}_S(X)$ が次のように定義される。

定義 1.10 $\mathrm{cat}_S(X) = \mathrm{Min}\{\mathrm{Cat}_S(Y)\,;\, Y \textit{ dominates } X\}$*.*

定理 1.11 (L-S [84], James [71], Takens [126, 127], Ganea [40])

(1) 閉多様体 M に対して、次の不等式が成立する。

$$\mathrm{Cat}(M) \leq \mathrm{cat}(M){+}1 \leq \mathrm{Cat}(M){+}1 \leq \mathrm{gCat}(M) + 1 \leq \mathrm{Ball}(M) \leq \mathrm{Crit}(M) \leq \mathrm{Dim}(M){+}1.$$

(2) CW 複体 X に対して、次の不等式が成立する。

$$\mathrm{Cat}(X) - 1 \le \mathrm{cat}(X) \le \mathrm{Cat}(X) \le \mathrm{gCat}(X) \le \mathrm{Dim}(X).$$

定理 1.12 *(1)* 閉多様体 M に対して、次の不等式が成立する。

$$\mathrm{cat}_S(M) + 1 \le \mathrm{Cat}_S(M) + 1 \le \mathrm{CV}(M) \le \mathrm{Dim}(M) + 1.$$

(2) *CW* 複体 X に対して、不等式 $\mathrm{cat}_S(X) \le \mathrm{Cat}_S(X) \le \mathrm{Dim}(X).$ が成立する。

$|\mathrm{Cat}_S(X) - \mathrm{cat}_S(X)|$ などについては不明であり、これらについて、これ以上は立ち入らない。

1.2 弱い古典的猫たち

L-S の猫や強い猫たちに比べてより弱い不変量ではあるが、より計算の可能性が高い猫たちが幾つか知られている。そのうちの古典的なものを以下に述べる。

定義 1.13 (Whitehead [138, 139])

$$\mathrm{wcat}(X) = \mathrm{Min}\left\{m \ge 0 \,\middle|\, \bar{\Delta}^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X \to \bigwedge^{m+1} X \ \textit{is null-homotopic}\right\}$$

このとき $\bigwedge^{m+1} X = \dfrac{\prod^{m+1} X}{\prod^{m+1}_{m} X}$ に注意すれば位相空間 X に対して次が成立する。

定理 1.14 (Whitehead [138, 139]) *(1)* $\mathrm{wcat}(X) \le \mathrm{cat}(X)$.

(2) h^* を乗法的な一般コホモロジー論とする。$\tilde{h}^*(X)$ のどれかの m 個の元の積が 0 でないならば、$\mathrm{wcat}(X) \ge m$ が成立する。

略証*:* まず (1) は、$\mathrm{cat}(X) = m$ とすると、$\Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X$ が $\prod^{m+1}_{m} X$ に compressible であることから、reduced diagonal $\bar{\Delta}^{m+1} : X \to \wedge^{m+1} X$ は零ホモトープであり、従って定義から $\mathrm{wcat}(X) \le m = \mathrm{cat}(X)$ が成立する。 次に (2) は対偶を示す：$\mathrm{wcat}(X) < m$ とすると、定義から $\bar{\Delta}^{m} : X \to \wedge^{m} X$ は零ホモトープである。 さらに $\bar{h}^*(X)$ の任意の m 個の元の積は

$$\bar{h}^*(X) \otimes_{h^*} \cdots \otimes_{h^*} \bar{h}^*(X) \longrightarrow \bar{h}^*(X \wedge \cdots \wedge X) \xrightarrow{\bar{\Delta}^{m*}} \bar{h}^*(X)$$

の像に入り、$\bar{\Delta}^{m*} = 0$ なのですべて 0 である。 終り*.*

定義 1.15 位相空間 X に対して *cup-length* を定める。*cup-length* は有理ホモトピー論では $\mathrm{c}(-)$ と表示されるが、ここでは *(total) Chern class* との競合を避けて $\mathrm{cup}(-)$ と表示する：

(1) h を乗法的コホモロジー論とするとき、

$\mathrm{cup}(X; h) = \mathrm{Min}\left\{m \ge 0 \,\middle|\, \forall_{\{u_0, \cdots, u_m \in \tilde{h}^*(X)\}}\ u_0 \cdot u_1 \cdots \cdot u_m = 0\right\}$ と定める。

(2) $\mathrm{cup}(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{cup}(X;h)\,|h$ は乗法的コホモロジー論$\}$ と定める。

定理 1.16 任意の乗法的コホモロジー論 $h^*(-)$ に対し次の不等式／等式が成立する：

(1) $\mathrm{cup}(X;h) \;\le\; \mathrm{cup}(X) \;\le\; w\mathrm{cat}(X) \;\le\; \mathrm{cat}(X).$

(2) $\mathrm{cup}(X) = \mathrm{Min}\left\{m \ge 0 \,\middle|\, \tilde{\Delta}^{m+1} : X \to \wedge^{m+1}X \text{ は } \textit{stably trivial}\right\}$

証明*:* (1) は定義より明らかである。そこでここでは (2) を証明する： 始めに $m =$（右辺）とすれば、cup-length の定義より直ちに $\mathrm{cup}(X) \le m$ を得る。次に、逆向きの不等号を示す：まず、空間 X の懸垂 spectrum の多重 smash 積 $\bigwedge^i(X) = \bigwedge^i\Sigma^\infty X = \Sigma^\infty\bigwedge^i X$（$i \ge 0$）の無限 wedge 和で表される次のような乗法的 spectrum $\mathcal{E}_X$ をとり、$h_X(-) = \{(-), \mathcal{E}_X\}$ と定義する：

$$\mathcal{E}_X = (S^0) \vee (X) \vee \bigwedge^2(X) \vee \cdots \vee \bigwedge^m(X) \vee \bigwedge^{m+1}(X) \vee \cdots.$$

そして $\iota \in \tilde{h}^*_X(X) = \{(X), \mathcal{E}_X\}$ を wedge 和について $\mathcal{E}_X$ の 2 番目の因子 (X) の $\mathcal{E}_X$ への包含写像で表される要素とすると、$\iota^m = \bar{\Delta}^{m*}(\iota\otimes\cdots\otimes\iota) \in \tilde{h}^*_X(X) = \{(X), \mathcal{E}_X\}$ は $\bar{\Delta}^m : X \to \bigwedge^m X$ で代表される $\mathcal{E}_X$ の $(m{+}1)$ 番目の因子 $\bigwedge^m(X)$ の $\mathcal{E}_X$ への包含写像で表される要素なので、m の取り方から non-trivial である。従って $\mathrm{cup}(X) \ge \mathrm{cup}(X;h_X) \ge m$ を得る。 終り*.*

また位相空間が単連結の場合、これらの弱い猫たちと L-S の猫は全てを p-local で考えることにより、p-local version である $\mathrm{cup_p}(-), \mathrm{wcat}_p(-), \mathrm{cat_p}(-), \mathrm{Cat_p}(-)$ とその間の不等式を得る。

$$\mathrm{cup_p}(X) \le \mathrm{cup}(X), \quad \mathrm{wcat}_p(X) \le \mathrm{wcat}(X), \quad \mathrm{cat_p}(X) \le \mathrm{cat}(X), \quad \mathrm{Cat_p}(X) \le \mathrm{Cat}(X),$$

$$\mathrm{cup_p}(X) \;\le\; \mathrm{wcat}_p(X) \;\le\; \mathrm{cat_p}(X) \;\le\; \mathrm{Cat_p}(X).$$

2 L-S の猫の計算

2.1 L-S の猫の一般的性質

例 2.1 *(1)* $\mathrm{cat}(\{*\}) = 0.$ より一般に可縮な空間 D に対し $\mathrm{cat}(D) = 0$ が成立する。

(2) $\mathrm{cat}(S^n) = 1.$ より一般に懸垂空間 ΣV に対し $\mathrm{cat}(\Sigma V) \le 1$ が成立する。

(3) 位相空間 X が位相空間 Y を支配すれば、$\mathrm{cat}(X) \ge \mathrm{cat}(Y)$ が成立する。特に、位相空間 X が位相空間 Y とホモトピー同値ならば、$\mathrm{cat}(X) = \mathrm{cat}(Y)$ が成立する。

(4) (James [71]) Fibre 束 (E,p,B,F) は $\mathrm{cat}(E)+1 \leq (\mathrm{cat}(F)+1)\cdot(\mathrm{cat}(B)+1)$ をみたす。

(5) (Fox [37]) 位相空間 X, Y に対して、$\mathrm{cat}(X\times Y) \leq \mathrm{cat}(X) + \mathrm{cat}(Y)$ が成立する。

定理 2.2 (Ganea [40]) $(d-1)$ 連結（$d \geq 2$）な位相空間 X は $\mathrm{Cat}(X) \leq \dfrac{\mathrm{Dim}(X)}{d}$ を満たす。

略証*:* X の $(d-1)$-skeleton は $\{*\}$ であるとしてよい。まず $k \geq 0$ に対し X_k を X の $((k+1)d-1)$-skeleton とする。商空間 X_{k+1}/X_k の次元と連結性の関係から、これは何らかの空間 K_k の懸垂である：$X_0 = \{*\}$、$X_1 \simeq \Sigma K_1$ また $X_{k+1}/X_k \simeq \Sigma K_k$。よって $X_1 \simeq X_0 \cup_{h_0} C(K_0),\ h_0 = * : K_0 \to \{*\}$ である一方で Blakers-Massey の定理から商写像 $(X_{k+1}, X_k) \to (X_{k+1}/X_k, \{*\})$ が同型

$$\pi_q(X_{k+1}, X_k) \cong \pi_q(X_{k+1}/X_k), \quad q \leq (k+2)d-2$$

を誘導する。 $\mathrm{Dim}(K_k) \leq (k+1)d-2$ より、skeleta についての帰納法を用いて bijection

$$[C(K_k), K_k; X_{k+1}, X_k] \cong [\Sigma K_k, X_{k+1}/X_k] = [\Sigma K_k, \Sigma K_k]$$

を得る。 右辺の ΣK_k の恒等写像に対応する写像 $\chi_k \in [C(K_k), K_k; X_{k+1}, X_k]$ を左辺から選び、$h_k = \chi_k|_{K_k} : K_k \to X_k$ とおけば $X_{k+1} \simeq X_k \cup_{h_k} C(K_k),\ h_k : K_k \to X_k\ (k \geq 1)$ を得る。これは $\mathrm{Cat}(X_m) \leq m$（$m \geq 0$）を意味する。そこで $\mathrm{Dim}(X) = nd + r,\ 0 \leq r < d$ とすると、$\mathrm{Dim}(X) \leq (n+1)d - 1$ より $\mathrm{Cat}(X) = \mathrm{Cat}(X_n) \leq n \leq \frac{\mathrm{Dim}(X)}{d}$ を得る。 終り.

懸垂空間 ΣA は co-group-like なコホップ空間であり、$i_t : \Sigma A \hookrightarrow \Sigma A \vee \Sigma A$ を第 t 成分への包含写像（$t = 1, 2$）、$p_t : \Sigma A \vee \Sigma A \to \Sigma A$ を第 t 成分への射影（$t = 1, 2$）とすると、$p_{s*} i_t = \delta_{s,t} \cdot 1_{\Sigma A}$（$\delta s, t$ は Kronecker の delta）が成立する。また $\mathrm{ev}^X : \Sigma\Omega(X) \to X$ は代入写像とする。

定理 2.3 (Ganea [41]) 位相空間 A, B に対する次の群の系列は、*split* する短完全列である：

$$1 \to [\Sigma B, \Omega(\Sigma A) * \Omega(\Sigma A)] \xrightarrow{[e_1, e_2]_*} [\Sigma B, \Sigma A \vee \Sigma A] \xrightarrow{p_{1*} \times p_{2*}} [\Sigma B, \Sigma A] \times [\Sigma B, \Sigma A] \to 1.$$

（$i_{1*} \times i_{2*}$ が *splitting*） ただし $[e_1, e_2]$ は $e_1 = i_1 \circ \mathrm{ev}^{\Sigma A}$ と $e_2 = i_2 \circ \mathrm{ev}^{\Sigma A}$ との一般 *Whitehead* 積である。$\Sigma A \times \Sigma A$ 上にあるこの fibration を diagonal map $\Delta : \Sigma A \to \Sigma A \times \Sigma A$ によって ΣA 上に誘導してできる Ganea [41] の fibration $\Omega(\Sigma A) * \Omega(\Sigma A) \xrightarrow{p_1^{\Omega\Sigma A}} \Sigma\Omega\Sigma A \xrightarrow{e_1^{\Sigma A}} \Sigma A$ は、Hopf 空間 $\Omega\Sigma A$ に対する Sugawara の Hopf fibration に一致し、次の split 短完全列を導く：

$$1 \to [\Sigma B, \Omega(\Sigma A) * \Omega(\Sigma A)] \xrightarrow{p_1^{\Omega\Sigma A}{}_*} [\Sigma B, \Sigma\Omega\Sigma A] \xrightarrow{e_1^{\Sigma A}{}_*} [\Sigma B, \Sigma A] \to 1,$$

（ $\sigma(\Sigma A)_* : [\Sigma B, \Sigma A] \to [\Sigma B, \Sigma\Omega\Sigma A]$ が splitting） ただし $\sigma(\Sigma X)$ は $\sigma(\Sigma X)(t, x) = (t, \ell_x),\ \ell_x(u) =$

(u,x) により与えられる。従っていかなる写像 $f:\Sigma B\to\Sigma A$ に対しても、$e_1^{\Sigma A}\circ\sigma(\Sigma A)\circ f\simeq f\simeq e_1^{\Sigma A}\circ\Sigma\,\mathrm{ad}\,f=e_1^{\Sigma A}\circ\Sigma\Omega f\circ\sigma(\Sigma B)$, $\mathrm{ad}(f)(b)=f\circ\ell_b$ が成立する。

定義 2.4 (B-H [10]) 任意の写像 $f:\Sigma B\to\Sigma A$ に対し $p_1^{\Omega\Sigma A}\circ g\simeq\sigma(\Sigma A)\circ f-\Sigma\Omega f\circ\sigma(\Sigma B)$ をみたす $g:\Sigma B\to\Omega(\Sigma A)*\Omega(\Sigma A)$ が *up to homotopy* で一意的に存在する（*Saito [107]*）。この g を $H_1(f)$ で表し、*Berstein-Hilton* の（一次の）*Hopf* 不変量と言う。

注 2.5 *Berstein-Hilton* による本来の（高次）*Hopf* 不変量 H_m は *Whitehead* の *criterion* に従い、ホモトピー集合 $[C\Sigma B,\Sigma B;\prod^{m+1}X,\prod_m^{m+1}X]$（$m{=}1\,\&\,X{=}\Sigma A$ の場合は $[C\Sigma B,\Sigma B;\Sigma A{\times}\Sigma A,\Sigma A{\vee}\Sigma A]$）に値を持つ。一方で定義 *2.4* における H_1 の定義もループ空間の A_∞ 構造を用いて一般化され高次 *Hopf* 不変量のもう一つの定義を与える。これら二つの定義が等価であることも *I [63], Stanley [117]*）により明らかにされたが、新しい定義にはいくらかの利点がある。なぜなら我々は A_∞ 構造の強力な性質を使えるようになるからである。

定理 2.6 (B-H [10]) 任意の写像 $f:S^q\to S^r$ に対して、接着空間 $Q=S^r\cup_f e^{q+1}$ の *L-S* の猫は「$\mathrm{cat}(Q)=1$ *iff* $H_1(f)=0$」かつ 「$\mathrm{cat}(Q)=2$ *iff* $H_1(f)\neq 0$」をみたす。

2.2 L-S の猫の計算と問題

例 2.7 *(1)* $\mathrm{cat}(S^{n_1}{\times}S^{n_2}{\times}\cdots{\times}S^{n_r})=r,\ n_i\geq 1,\ (1\leq i\leq r)$. 特に $\mathrm{cat}(T^r)=r,\ r\geq 1.$

(2) (Singhof [113, 114]) $n\geq 1$ に対して

$$\mathrm{cup}(U(n))=\mathrm{cat}(U(n))=\mathrm{Cat}(U(n))\ (=n=\mathrm{cup}(U(n);\mathbb{Z}),$$

$$\mathrm{cup}(SU(n))=\mathrm{cat}(SU(n))=\mathrm{Cat}(SU(n))\ (=n{-}1=\mathrm{cup}(SU(n);\mathbb{Z}).$$

(3) (James-Singhof [73]) $2\leq n\leq 5$ に対して

$$\mathrm{cup}(SO(n))=\mathrm{cat}(SO(n))=\mathrm{Cat}(SO(n))\ (=\mathrm{cup}(SO(n);\mathbb{Z}).$$

(4) (I-Mimura [66], I-Mimura-Nishimoto [67]) $3\leq n\leq 8$ に対して

$$\mathrm{cup}(Spin(n))=\mathrm{cat}(Spin(n))=\mathrm{Cat}(Spin(n))\ (=\mathrm{cup}(Spin(n);KO)?)$$

(5) (Schweitzer [111], Fernándes Suárez-Gómez Tato-Tanré-Strom [34], I-M [66])

$$\mathrm{cup}(Sp(n))=\mathrm{cat}(Sp(n))=\mathrm{Cat}(Sp(n))\ (=2n{-}1),\ n\leq 3.$$

問題 2.8 2次元 *torus* T^2 上に、T^2 を覆う3枚の *closed disks* を図示せよ。

次の問題の肯定的な解答は通常 Arnold の予想と呼ばれる。

問題 2.9 (Arnold 196x (p.66 of [16])) *Symplectic* 多様体 M 上の *Symplecto-morphism* $\phi : M \to M$ の固定点の個数 $\mathrm{Fix}(\phi)$ は常に $\mathrm{Crit}(M)$ 以上あるか？

また次の問題の肯定的な解答は通常 Ganea の予想と呼ばれる。

問題 2.10 (Ganea 1971 [42]) $\mathrm{cat}(X{\times}S^n)$ の値は $\mathrm{cat}(X)+1$ となるか？

定理 2.11 (Singhof 1979 [116], Rudyak 1997 [104]) 閉多様体 M が次元 $\mathrm{Dim}(M) = d$ と *L-S* の猫 $\mathrm{cat}(M) = m$ に関する不等式 $m \geq \dfrac{d{+}1}{2}$ をみたすならば、*Ganea* の予想は正しい。つまりすべての $n \geq 1$ について $\mathrm{cat}(M{\times}S^n) = m + 1$ が成立する。

定理 2.12 (Hofer 1988 [52], Floer 1989 [35, 36]) 任意の *Symplectic* 多様体 M に対して、$\mathrm{Fix}(\phi) \geq \mathrm{cup}(M){+}1$ が成立する。

定理 2.13 (Jessup 1990 [74], Hess 1991 [49]) 有理ホモトピー論的には *Ganea* の予想は正しい。

そして'90 年代末以後、これらの問題は急展開を迎えた。

定理 2.14 (Liu-Tian 1998 [83], Fukaya-Ono 1999 [39]) M を *Symplectic* 多様体とする。固定点が非退化である場合に *Arnold* 予想が成立する。

定理 2.15 (I 1998 [61]) *Ganea* の予想を満たさない単連結な位相空間が存在する。

定理 2.16 (Rudyak 1999 [106], Oprea-Rudyak 1999 [102]) 任意の *Symplectic* 多様体 M に対し、$\pi_1(M)$ と $\pi_2(M)$ に関する弱い条件（$\pi_2 = 0$ なら良い）の下で $\mathrm{cat}(M) = \mathrm{Crit}(M){-}1 = \mathrm{Dim}(M)$ が成立し、*Arnold* 予想は（この場合）正しい。

定理 2.17 (I 2001 [63]) *Ganea* の予想を満たさない単連結な閉多様体が存在する。

定理 2.18 (I [63], Lambrechts-Stanley-Vandembroucq [85]) 単連結閉多様体で、その *once-punctured* 部分多様体と同じ *L-S* の猫の値を持つものが存在する。

定理 2.19 (I [64]) 球面上の球面束の構造を持つ閉多様体の猫は *Hopf* 不変量で完全に記述され、*Ganea* の予想が成立する場合と成立しない場合がともに現れる。

定理 2.20 (Oprea-Rudyak [103]) 3次元閉多様体は *Ganea* の予想を満たす。

第 2 章　A_∞ 構造

3　A_∞ 形式

3.1　Stasheff の胞体

定義 3.1 さて *Stasheff* の胞体は次の様な凸集合で与えられる（*[?, ?, 93, 65]*）：

$$K(n{+}1) = \left\{(t_0, t_1, \cdots, t_n) \in \prod_{i=0}^n [0, i] \,\middle|\, \sum_{i=0}^k t_i \leq k,\ \ \sum_{i=0}^n t_i = n\right\}, \quad n \geq 0.$$

注 3.2 $K(1) = \{(0)\}$, $K(2) = \{(0,1)\}$, $K(3) = \{(0, t, 2-t) \mid 0{\leq}t{\leq}1\} \approx [0,1]$ である。

定義 3.3 その境界作用素が次で与えられる（通常は $m{<}n$ に対して定義する）：

$$\partial_{j+1} : K(n{-}m{+}1) \to \mathrm{Map}(K(m{+}1), K(n{+}1)), \quad 0{\leq}j{\leq}m{\leq}n,$$

$$\partial_{j+1}(u_0, \cdots, u_{n-m})(t_0, \cdots, t_m) = (t_0, \cdots, t_{j-1}, u_0, \cdots, u_{n-m-1}, u_{n-m}{+}t_j, t_{j+1}, \cdots, t_m).$$

注 3.4 $L_{j+1}(r{+}1, s{+}1) = \partial_{j+1}(K(s{+}1))(K(r{+}1)) \subset K(r{+}s{+}1)$ に対し次が成立する：

$$\partial K(n{+}1) = \bigcup_{\substack{0 \leq j \leq n-s \\ 1 \leq s \leq n-1}} L_{j+1}(n{-}s{+}1, s{+}1).$$

$K(n{+}1)$ $(n \geq 0)$ 内に点 $\beta_{n+1} = (0, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}, \frac{n+1}{2})$（$\beta_1 = (0), \beta_2 = (0,1)$）をとる。

定義 3.5 退化作用素 $s_{j+1} : K(n{+}1) \to K(n)$, $(0 \leq j \leq n)$ が帰納的に与えられる：

$$s_{j+1}((1{-}t)\xi + t\beta_{n+1}) = (1{-}t)s_{j+1}(\xi) + t\beta_n,\ \xi = \partial_{k+1}(\tau)(\rho) \in \partial K(n{+}1),\ 0{\leq}t{\leq}1.$$

$$s_{j+1}(\xi) = \begin{cases} \partial_k(\tau)\circ s_{j+1}(\rho), & 0 \leq j < k, \\ \partial_{k+1}(s_{j-k+1}(\tau))(\rho), & k \leq j \leq k{+}t, \\ \partial_{k+1}(\tau)\circ s_{j-t}(\rho), & j > k{+}t. \end{cases} \quad (\tau \in K(t{+}1),\ \rho \in K(n{-}t{+}1)).$$

3.2　位相小圏 $\mathcal{A}_\infty$ と $\tilde{\mathcal{A}}_\infty$

圏 $\mathcal{D}$ は、その任意の二つの対象 $A, B \in O(\mathcal{D})$ に対して、その間の射全体 $\mathcal{D}(A, B)$ が位相空間をなすとき、（広い意味の）位相圏であると呼ばれる。

また圏 $\mathcal{D}$ は、その対象全体 $O = O(\mathcal{D})$ および射全体 $M = M(\mathcal{D})$ が集合をなすとき、小圏であると呼ばれる。　さらにそれらが位相空間であるとき、位相小圏であると呼ばれる。　ここでは、前節で与えた Stasheff の胞体を用いた位相小圏を定義する。

定義 3.6 圏 $\mathcal{A}_\infty$ は、自然数全体 $\{\underline{1},\underline{2},\underline{3},\cdots\}$ が対象で $\underline{m{+}1}$ から $\underline{n{+}1}$ への射の全体が

$$\coprod_{\substack{a_0,\cdots,a_m\geq 0\\ a_0+\cdots+a_m=n-m}} K(a_0{+}1)\times\cdots\times K(a_m{+}1)$$

で、射 $(\rho_0,\cdots,\rho_\ell):\underline{\ell{+}1}\to\underline{m{+}1}$ と $(\sigma_0,\cdots,\sigma_m):\underline{m{+}1}\to\underline{n{+}1}$ との合成 $(\tau_0,\cdots,\tau_\ell):\underline{\ell{+}1}\to\underline{n{+}1}$ が次で与えられる。　$(\rho_i\in K(r_i+1), i\leq\ell;\sigma_j\in K(a_j+1), j\leq m)$

$$\tau_i=\partial_{0+1}(\sigma'_0)\circ\cdots\circ\partial_{r_i+1}(\sigma'_{r_i})(\rho_i)\in K(r_i{+}a'_0{+}\cdots{+}a'_{r_i}{+}1),$$
$$(\sigma'_j=\sigma_{r_0+\cdots+r_{i-1}+i+j},\quad a'_j=a_{r_0+\cdots+r_{i-1}+i+j}).$$

問題 3.7 上の $\mathcal{A}_\infty$ が位相小圏となることを示せ。

この位相小圏 $\mathcal{A}_\infty$ を用いて、次の二つの圏を構成する（$1\leq m\leq\infty$）：

定義 3.8 圏 $\mathcal{A}_m$ は、集合 $\{\underline{1},\underline{2},\cdots,\underline{m}\}$ を対象の全体とする $\mathcal{A}_\infty$ の充満部分圏である。

定義 3.9 圏 $\tilde{\mathcal{A}}_m$ は、集合 $\{\underline{1},\underline{2},\cdots,\underline{m}\}$ が対象の全体で $\underline{\ell{+}1}$ から $\underline{n{+}1}$ への射の全体が

$$\begin{cases}\displaystyle\coprod_{\substack{a_0,\cdots,a_\ell\geq 0\\ a_0+\cdots+a_\ell=n-\ell}} K(a_0{+}1)\times\cdots\times K(a_\ell{+}1), & \ell\leq n,\\ \{(i_1,i_2,\cdots,i_{\ell-n})\,|\,0<i_1<i_2<\cdots<i_{\ell-n}<\ell\}, & \ell>n\geq 1.\end{cases}$$

（$1\leq m\leq\infty$）で与えられ、$(i_1,i_2,\cdots,i_{\ell-n})$ が退化作用素の合成写像 $s_{i_1+1}s_{i_2+1}\cdots s_{i_{\ell-n}+1}$ に対応する。

問題 3.10 圏 $\tilde{\mathcal{A}}_m$ $(1\leq m\leq\infty)$ にうまく射の合成を定義して位相小圏とせよ。

注 3.11 *Stasheff* によるオリジナルの A_∞ 形式は、小圏 $\tilde{\mathcal{A}}_\infty$ を用いるものであったが、*Boardman-Vogt, Klein-Schwänzl-Vogt* によれば、小圏 $\mathcal{A}_\infty$ を用いて定義したものと同値である。　ただし、その同値性の明確な証明は現在まで出版されていない様である。

3.3　A_∞ 形式

二つの位相圏 $\mathcal{D}$ と $\mathcal{E}$ の間の関手 $F:\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ が連続関手であるとは F の誘導する写像

$$F:\mathcal{D}(A,B)\to\mathcal{E}(F(A),F(B)),\quad A,B\in O(\mathcal{D}).$$

が連続写像なこととする。　まず Stasheff [?] による $\tilde{\mathcal{A}}_m$ を用いる定義を記述する。

定義 3.12 位相空間 $X\in O(\mathcal{K})$ に対して、連続な反変関手 $\underline{\tilde{X}}:\tilde{\mathcal{A}}_m^{\mathrm{op}}\to\mathcal{K}$ が三条件

(1) $\underline{\tilde{X}}(\underline{n}) = \prod^n X$, *the n-fold product,*

(2) $\underline{\tilde{X}}(\beta_2) : X{\times}X \to X,\ (\beta_2 \in K(1{+}1))$, *a multiplication with two-sided homotopy unit and inversion,*

(3) $\underline{\tilde{X}}(j_1, \cdots, j_{\ell-n})(x_0, \cdots, x_n) = (y_0, \cdots, y_\ell)$, $\quad y_j = \begin{cases} *, & \text{if } j = j_i, \\ x_{j+i}, & \text{if } j_i < j < j_{i+1}. \end{cases}$

を満たすとき、X を $\tilde{A}_m$-空間、$\underline{\tilde{X}}$ を X の $\tilde{A}_m$-形式（$1 \leq m \leq \infty$）などという。

次に Stasheff [119] による A_m-形式（$1 \leq m \leq \infty$）の定義を圏論的に記述する。

定義 3.13 位相空間 $X \in O(\mathcal{K})$ に対して、連続な反変関手 $\underline{X} : \mathcal{A}_m^{\mathrm{op}} \to \mathcal{K}$ が二条件

(1) $\underline{X}(\underline{n}) = \prod^n X$ *the n-fold product,*

(2) $\underline{X}(\beta_2) : X{\times}X \to X,\ (\beta_2 \in K(1{+}1))$, *a multiplication with two-sided homotopy unit and inversion.*

を満たすとき、X を A_m-空間、$\underline{X}$ を X の A_m-形式（$1 \leq m \leq \infty$）などという。

さらに Boardman-Vogt[12], Klein-Schwänzl-Vogt [78] による co-A_m-形式（$1 \leq m \leq \infty$）の定義を圏論的に記述する。

定義 3.14 位相空間 $Y \in O(\mathcal{K})$ に対して、連続な共変関手 $\underline{Y} : \mathcal{A}_m \to \mathcal{K}$ が二条件

(1) $\underline{Y}(\underline{n}) = \bigvee_n Y$ *the n-fold wedge sum (one-point-sum),*

(2) $\underline{Y}(\beta_2) : Y \to Y{\vee}Y,\ (\beta_2 \in K(1{+}1))$, *a co-multiplication with two-sided homotopy unit $*$ and inversion.*

を満たすとき、Y を *co-A_m*-空間、$\underline{Y}$ を Y の *co-A_m*-形式（$1 \leq m \leq \infty$）などという。

注 3.15 これに対する *Stasheff [?]* の定義の双対は無意味である。　もう少し正確には、$\mathcal{A}_m$ の代わりに $\tilde{\mathcal{A}}_m$ を用いた時点で *co-A_m*-空間の非存在が直ちに得られる（$m \geq 2$）。

例 3.16 *(1)* いかなる位相群も $\tilde{A}_\infty$-空間である。

(2) 連結 *CW* 複体のホモトピー型を持ついかなる位相モノイドも $\tilde{A}_\infty$-空間である。

(3) $\tilde{A}_\infty$-空間に基点付きホモトピーでホモトピー同値な空間は $\tilde{A}_\infty$-空間である。

(4) いかなる $\tilde{A}_\infty$-空間も A_∞-空間である。

(5) A_∞-空間にホモトピー同値な空間は A_∞-空間である。

(6) いかなる単連結 *CW* 複体 X のループ空間 ΩX も A_∞-空間である。

(7) いかなる懸垂空間 ΣX も *co*-A_∞-空間である。

略証*:* (1) は自明である。 (2) は位相モノイド X のホモトピー逆元の存在のみが自明でないが、これは shearing map $\varphi : X{\times}X \to X{\times}X,\ \varphi(x,y) = (x,xy)$ がホモトピー群の同型を誘導し、J. H. C. Whitehead の定理からホモトピー同値写像となる事実に従う。(3), (5) は A_m-写像に対する I-M [65] の証明と同様に得られる。(6) はループ空間 $\Omega(X)$ が J. C. Moore のループ空間 ΩX（位相モノイド）にホモトピー同値（基点は保たない）で Toda [128] によって CW 複体のホモトピー型を持つことから (2) と (5) に帰着する。(4), (7) は省略する。 終り.

定理 3.17 (Stasheff [?]) 任意の $\tilde{A}_\infty$-空間は、ループ空間にホモトピー同値である。

定理 3.18 (Klein-Schwänzl-Vogt [78]) 任意の 2-連結 *co*-A_∞-空間は、単連結な空間の懸垂空間にホモトピー同値である。

注 3.19 上記の事実に *Klein-Schwänzl-Vogt* の与えた証明は２種類の異なる構成を用い、*little cube* のアイデアを取り入れるなどかなり入り組んだものとなっている。

3.4 標準的な A_∞ 構造

定義 3.20 連続な共変関手 $\underline{\tilde{K}} : \tilde{\mathcal{A}}_\infty \to \mathcal{K}$ を次で定める。

$$\begin{aligned}
\underline{\tilde{K}}(\underline{n{+}1}) &= K(n{+}1), \quad n \geq 0,\\
\underline{\tilde{K}}(\sigma_0,\cdots,\sigma_m) &= \ \partial_{0+1}(\sigma_0){\circ}\cdots{\circ}\partial_{m+1}(\sigma_m) : K(m{+}1) \to K(n{+}1),\\
&\qquad\qquad (\sigma_i \in K(a_i{+}1), \quad a_0+\cdots+a_m = n-m)\\
\underline{\tilde{K}}(i_1,i_2,\cdots,i_{\ell-n}) &= s_{i_1+1}s_{i_2+1}s_{i_{\ell-n}+1} : K(\ell{+}1) \to K(n{+}1),
\end{aligned}$$

さてここで次の機械を用意する。

定義 3.21 $\mathcal{D}$ を位相小圏とし、共変関手 $\underline{A} : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ と $\underline{B} : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ それに反変関手 $\underline{C} : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{K}$ が連続関手であるとき、次の二つの空間を定義する。

(1) $\underline{A} \wedge_{\mathcal{D}} \underline{C} = \displaystyle\coprod_{\underline{d}\in\mathcal{D}} \underline{A}(\underline{d}){\times}\underline{C}(\underline{d})/\sim, \quad (\underline{A}(\chi)(a_{\underline{d}}), c_{\underline{d'}}) \sim (a_{\underline{d}}, \underline{A}(\chi)(c_{\underline{d'}})),\ (\chi : \underline{d} \to \underline{d'}),$

(2) $\hom_{\mathcal{D}}(\underline{A},\underline{B}) = \left\{ (\phi_{\underline{d}})_{\underline{d}\in\mathcal{D}} \in \prod^{\underline{d}\in\mathcal{D}} \mathcal{K}(\underline{A}(\underline{d}),\underline{B}(\underline{d})) \,\middle|\, \begin{array}{l} \forall(\chi : \underline{d} \to \underline{d'}) \\ \underline{B}(\chi){\circ}\phi_{\underline{d}} = \phi_{\underline{d'}}{\circ}\underline{A}(\chi) \end{array} \right\}.$

問題 3.22 $\mathcal{D}$ を位相小圏とし、共変関手 $\underline{A}:\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{K}$ と $\underline{B}_1,\underline{B}_2:\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{K}$ それに反変関手 $\underline{C}_1,\underline{C}_2:\mathcal{D}\to\mathcal{K}$ が連続関手であるとき、次を示しなさい。

(1) 自然変換 $\underline{c}:\underline{C}_1\to\underline{C}_2$ に対し、写像 $\underline{A}\wedge_{\mathcal{D}}\underline{c}:\underline{A}(\underline{d})\times\underline{C}_1\to\underline{A}(\underline{d})\times\underline{C}_2$ がうまく定義されて連続写像となる：

$$(\underline{A}\wedge_{\mathcal{D}}\underline{c})(a_{\underline{d}},c_{\underline{d}})=(a_{\underline{d}},\underline{c}(\underline{d})(c_{\underline{d}}))$$

(2) 自然変換 $\underline{b}:\underline{B}_1\to\underline{B}_2$ に対し、写像 $\hom_{\mathcal{D}}(\underline{A},\underline{b}):\hom_{\mathcal{D}}(\underline{A},\underline{B}_1)\to\hom_{\mathcal{D}}(\underline{A},\underline{B}_2)$ がうまく定義されて連続写像となる：

$$\hom_{\mathcal{D}}(\underline{A},\underline{b})(\phi_{\underline{d}})(a_{\underline{d}})=(\underline{b}(\underline{d})(\underline{d}(a_{\underline{d}})))$$

(3) より一般に上の *(1)* でさらに自然変換 $a:\underline{A}\to\underline{A}'$ が任意に与えられた時、写像 $\underline{a}\wedge_{\mathcal{D}}\underline{c}:\underline{A}(\underline{d})\times\underline{C}_1\to\underline{A}'(\underline{d})\times\underline{C}_2$ がうまく定義されて連続写像となる：

$$(\underline{a}\wedge_{\mathcal{D}}\underline{c})(a_{\underline{d}},c_{\underline{d}})=(\underline{a}(a_{\underline{d}}),\underline{c}(\underline{d})(c_{\underline{d}}))$$

(4) より一般に上の *(2)* でさらに自然変換 $a:\underline{A}\to\underline{A}'$ が任意に与えられた時、写像 $\hom_{\mathcal{D}}(\underline{a},\underline{b}):\hom_{\mathcal{D}}(\underline{A}',\underline{B}_1)\to\hom_{\mathcal{D}}(\underline{A},\underline{B}_2)$ がうまく定義されて連続写像となる：

$$\hom_{\mathcal{D}}(\underline{a},\underline{b})(\phi_{\underline{d}})(a_{\underline{d}})=(\underline{b}(\phi_{\underline{d}}(\underline{a}(\underline{d})(a_{\underline{d}}))))$$

定義 3.23 反変関手 $\underline{\tilde{X}}:\tilde{\mathcal{A}}_m^{op}\to\mathcal{K}$ を $\tilde{A}_m$ 形式とする $\tilde{A}_m$ 空間 X をとる（$1{\le}m{\le}\infty$）。 反変関手 $\tilde{E}^k(\underline{\tilde{X}}):\tilde{\mathcal{A}}_{k+1}^{op}\to\mathcal{K}$（$0{\le}k{\le}m$）、$\tilde{D}^k(\underline{\tilde{X}}),\tilde{B}^k(\underline{\tilde{X}}):\tilde{\mathcal{A}}_{k+1}^{op}\to\mathcal{K}$（$0{\le}k{\le}m{+}1$）と自然変換 $\tilde{p}^k_{\underline{\tilde{X}}}:\tilde{E}^k(\underline{\tilde{X}})\to\tilde{B}^k(\underline{\tilde{X}})$ を次で定める（ただし $\sigma_i\in K(a_i{+}1)$, $\sum_i a_i=n{-}m$）：

(1)
$$\tilde{E}(\underline{\tilde{X}})(\underline{n{+}1})=\underline{X}(\underline{n})=X^n,\quad n{\ge}0,$$
$$\tilde{E}(\underline{\tilde{X}})(\sigma_0,\cdots,\sigma_m)(x_1,\cdots,x_n)=\underline{\tilde{X}}(\sigma_1,\cdots,\sigma_m)(x_{a_0+1},\cdots,x_n),$$
$$\tilde{E}(\underline{\tilde{X}})(i_1,i_2,\cdots,i_{\ell-n})(x_1,\cdots,x_n)=(y_1,\cdots,y_\ell),$$
$$y_j=\begin{cases}*, & \textit{if } j=j_i,\\ x_{j+i}, & \textit{if } j_i<j<j_{i+1}.\end{cases}$$

(2)
$$\tilde{D}(\underline{\tilde{X}})(\underline{n{+}1})=\begin{cases}\underline{\tilde{X}}(\underline{n{-}1})=X^n, & n{\le}m,\\ X^m\times\{*\}^{n-m}, & n{>}m,\end{cases}$$
$$\tilde{D}(\underline{\tilde{X}})(\sigma_0,\cdots,\sigma_m)=\tilde{E}(\underline{\tilde{X}})(\sigma_0,\cdots,\sigma_m)|_{\tilde{D}(\underline{\tilde{X}})(\underline{n+1})}$$
$$\tilde{D}(\underline{\tilde{X}})(i_1,i_2,\cdots,i_{\ell-n})=\tilde{E}(\underline{\tilde{X}})(i_1,i_2,\cdots,i_{\ell-n})|_{\tilde{D}(\underline{\tilde{X}})(\underline{n+1})}$$

(3) $\tilde{B}(\underline{\tilde{X}})(\underline{n{+}1}) = \begin{cases} \underline{\tilde{X}}(\underline{n{-}1}) = X^{n-1}, & n{\geq}1, \\ \emptyset, & n{=}0, \end{cases}$

$\tilde{B}(\underline{\tilde{X}})(\sigma_0, \cdots, \sigma_m)(x_1, \cdots, x_{n-1}) = \underline{\tilde{X}}(\sigma_1, \cdots, \sigma_{m-1})(x_{a_0+1}, \cdots, x_{n-a_m-1}),$

$\tilde{B}(\underline{\tilde{X}})(i_1, i_2, \cdots, i_{\ell-n})(x_1, \cdots, x_{n-1}) = (y_1, \cdots, y_{\ell-1}),$

$y_j = \begin{cases} *, & \textit{if } j = j_i, \\ x_{j+i}, & \textit{if } j_i < j < j_{i+1}. \end{cases}$

(4) $\tilde{p}_{\underline{\tilde{X}}}(\underline{n{+}1})(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_{n-1}).$

このように定めた関手等に対して定義 3.21 を用いて新たに空間と写像を作る。

定義 3.24 $\tilde{E}^k(X) = \underline{\tilde{K}} \wedge_{\tilde{\mathbb{A}}_{k+1}} \tilde{E}(\underline{\tilde{X}})$, $\tilde{B}^k(X) = \underline{\tilde{K}} \wedge_{\tilde{\mathbb{A}}_{k+1}} \tilde{B}(\underline{\tilde{X}})$, $\tilde{p}^k_X = \underline{\tilde{K}} \wedge_{\tilde{\mathbb{A}}_{k+1}} \tilde{p}^{\underline{\tilde{X}}}$（$0 \leq k \leq m$）とおき、$X$ の標準的な $\tilde{A}_m$ 構造と言う。

定理 3.25 (Stasheff [?], Mimura [93]) 反変関手 $\underline{\tilde{X}} : \tilde{\mathcal{A}}^{op}_m \to \mathcal{K}$ を $\tilde{A}_m$ 形式とする $\tilde{A}_m$ 空間 X（$1{\leq}m{\leq}\infty$）に対し、以下が成立する。

(1) $\tilde{B}^1(X) = \{*\}$ かつ $\tilde{E}^1(X) = X$ であり、$\tilde{p}_{\underline{\tilde{X}}}$ は自明な写像である。

(2) $\tilde{E}^k(X)$ は $\tilde{E}^{k+1}(X)$ の中で可縮（$k < m$）となり、従って $m = \infty$ のとき $\tilde{E}^\infty(X)$ は可縮である。

(3) $\tilde{p}^k_X : \tilde{E}^k(X) \to \tilde{B}^k(X)$（$k \leq m$）は X を *fibre* とする *quasi-fibration* である。

(4) $\tilde{D}^k(X)$ $(\supset \tilde{E}^k(X))$ は可縮（$k \leq m$）であり、$\tilde{B}^{k+1}(X)$（$k \leq m$）は接着空間 $\tilde{B}^k(X) \cup_{\tilde{p}^k_X} \tilde{D}^k(X) \simeq C(\tilde{p}^k_X)$ に同相である。

ただし $E \xrightarrow{p} B$ が $F \xhookrightarrow{i} E$ を *fibre* とする *quasi-fibration* とは、$p{\circ}i = *$ かつ同型 $\pi_*(E, F) \xrightarrow{p_*} \pi_*(B)$ が誘導されることである。

定義 3.26 CW 複体 X に対して、上記の *(1)*〜*(3)* の 3 条件（$\tilde{E}^k(X)$, $\tilde{B}^k(X)$, $\tilde{p}^k_X : \tilde{E}^k(X) \to \tilde{B}^k(X)$ を $E^k(X)$, $B^k(X)$, $p^k_X : E^k(X) \to B^k(X)$ に置き換える）を満たす $\{(E^k(X), B^k(X), p^k_X) \,|\, 0{\leq}k{\leq}m\}$ が存在する時、これを X の A_m 構造と言う。

定理 3.27 (Stasheff [?]) CW 複体 X が A_m-構造 $\{B^{k+1}(X) \,|\, k \leq m\}$ を持つならば、X は $\tilde{A}_m$-空間 X' にホモトピー同値であり、X' の $\tilde{A}_m$-構造 $\tilde{B}^{k+1}(X')$ から X' への写像は X の A_m-構造 $B^{k+1}(X)$ から X への写像を経由する *compatible* な構造を与える。

系 3.27.1 CW 複体 X に対して、ΩX の $\tilde{A}_\infty$-構造 $\{B^{k+1}(X)\}$ は $B^\infty(X) \simeq X$ をみたす。

例 3.28 *(1)* $\tilde{B}^{k+1}(S^0)=\mathbb{R}P^k$、$\tilde{B}^{k+1}(S^1)=\mathbb{C}P^k$、$\tilde{B}^{k+1}(S^3)=\mathbb{H}P^k$（$0\le k\le\infty$）。

(2) $\tilde{B}^1(S^7)=*$、$\tilde{B}^2(S^7)=S^8$、$\tilde{B}^3(S^7)=\mathbb{O}P^2$ *(Cayley plane)*。

注 3.29 古典的な射影空間との類比から、$\tilde{B}^{k+1}(X)$ を $\tilde{P}^k(X)$ によって表すことがある。

系 3.29.1 $\mathrm{Cat}(\tilde{P}^m(\Omega X))\le m$ であり、従って $\mathrm{cat}(\tilde{P}^m(\Omega X))\le m$ である。

定理 3.30 (Cornea [19]) $\mathrm{cat}(X)=m$ のとき、$i\le m$ ならば $\mathrm{cat}(\tilde{P}^i(\Omega X))=i$ であり、$i\ge m$ ならば $\mathrm{cat}(\tilde{P}^i(\Omega X))=m$ である。

定理 3.31 (Ganea [40], Gilbert [43], I [61], Sakai [109]) 空間 X に対して $\mathrm{cat}(X)\le m$ となる為には $e^X_m:\tilde{P}^m(\Omega X)\hookrightarrow\tilde{P}^\infty(\Omega X)\simeq X$ が右ホモトピー逆写像を持つことが必要十分である：

$$\mathrm{cat}(X)=\mathrm{Min}\{m\ge 0\,|\,\exists_{\sigma:X\to P^m(\Omega X)}\ \textit{such that}\ e^X_m\circ\sigma\sim 1=X\}.$$

定理 3.32 (Fox [37]), I [61]) 常に $\mathrm{cat}(X{\times}Y)\le\mathrm{cat}(X){+}\,\mathrm{cat}(Y)$ であり、等号が成立する為には $\bigcup_{i+j<m+n}\tilde{P}^i(\Omega X){\times}\tilde{P}^j(\Omega Y)\hookrightarrow\tilde{P}^\infty(\Omega X){\times}\tilde{P}^\infty(\Omega Y)\simeq X{\times}Y$（$\mathrm{cat}(X){=}m,\ \mathrm{cat}(Y){=}n$ は共に 1 以上）が右ホモトピー逆写像を 持たない ことが必要十分である。

略証*:* まず $\bigcup_{i+j<m+n}\tilde{P}^i(\Omega X){\times}\tilde{P}^j(\Omega Y)\hookrightarrow\tilde{P}^\infty(\Omega X){\times}\tilde{P}^\infty(\Omega Y)\simeq X{\times}Y$ が右ホモトピー逆写像を持つとする：k についての帰納法で $\mathrm{Cat}(\bigcup_{i+j<k}\tilde{P}^i(\Omega X){\times}\tilde{P}^j(\Omega Y))\le k$ が得られるから、$\mathrm{cat}(\bigcup_{i+j<k}\tilde{P}^i(\Omega X){\times}\tilde{P}^j(\Omega Y))\le k-1$ であり、$X{\times}Y$ は仮定から $\bigcup_{i+j<m+n}\tilde{P}^i(\Omega X){\times}\tilde{P}^j(\Omega Y)$ に支配されるので $\mathrm{cat}(X{\times}Y)<\mathrm{cat}(X){+}\,\mathrm{cat}(Y)$ がわかる。

次に $\mathrm{cat}(X{\times}Y)<\mathrm{cat}(X){+}\,\mathrm{cat}(Y)$ とすると、定理3.31から $X{\times}Y$ は $\tilde{P}^j(\Omega(X{\times}Y))$ に支配される。ここで、$\bigcup_{i+j\le k}\tilde{P}^i(\Omega X){\times}\tilde{P}^j(\Omega Y)$ は $\tilde{P}^\infty(\Omega X){\times}\tilde{P}^\infty(\Omega Y)\simeq X{\times}Y$ の標準的ではない A_∞-構造を与え、定理 3.27 から標準的な写像 $\tilde{P}^j(\Omega(X{\times}Y))\hookrightarrow\tilde{P}^\infty(\Omega X){\times}\tilde{P}^\infty(\Omega Y)$ は $\bigcup_{i+j\le k}\tilde{P}^i(\Omega X){\times}\tilde{P}^j(\Omega Y)\hookrightarrow\tilde{P}^\infty(\Omega X){\times}\tilde{P}^\infty(\Omega Y)$ を経由する。　従って $\bigcup_{i+j\le k}\tilde{P}^i(\Omega X){\times}\tilde{P}^j(\Omega Y)$ は $X{\times}Y$ を支配する。　終り*.*

系 3.32.1 (I [61]) $\mathrm{cat}(X{\times}S^n)=\mathrm{cat}(X)$ となる為には、写像 $\tilde{P}^m(\Omega X){\times}\{*\}{\cup}\tilde{P}^{m-1}(\Omega X){\times}S^n\hookrightarrow\tilde{P}^\infty(\Omega X){\times}S^n\simeq X{\times}S^n$（$m=\mathrm{cat}(X)\ge 1$）が右ホモトピー逆写像を持つことが必要十分である。

略証*:* まず $\tilde{P}^m(\Omega X){\times}\{*\}{\cup}\tilde{P}^{m-1}(\Omega X){\times}\tilde{P}^1(\Omega S^n){\cup}\cdots{\cup}\tilde{P}^1(\Omega X){\times}\tilde{P}^{m-1}(\Omega S^n){\cup}\{*\}{\times}\tilde{P}^{m-1}(\Omega S^n)\subseteq\tilde{P}^m(\Omega X){\times}\{*\}\cup\tilde{P}^{m-1}(\Omega X){\times}\tilde{P}^\infty(\Omega S^n)\subset\tilde{P}^\infty(\Omega X){\times}\tilde{P}^\infty(\Omega S^n)$ に注意する。　従って定理 3.32 から、$\mathrm{cat}(X{\times}S^n)=\mathrm{cat}(X)$ ならば、$\tilde{P}^m(\Omega X){\times}\{*\}{\cup}\tilde{P}^{m-1}(\Omega X){\times}\tilde{P}^\infty(\Omega S^n)\hookrightarrow\tilde{P}^\infty(\Omega X){\times}\tilde{P}^\infty(\Omega S^n)\simeq X{\times}S^n$ が右ホモトピー逆写像を持つ。　従って $\tilde{P}^m(\Omega X){\times}\{*\}{\cup}\tilde{P}^{m-1}(\Omega X){\times}S^n\hookrightarrow\tilde{P}^\infty(\Omega X){\times}S^n\simeq$

$X{\times}S^n$ が右ホモトピー逆写像を持つ。　逆は明か。 終り.

定理 3.33 (Ganea) $\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{Cat}(X) \leq \mathrm{cat}(X){+}1$.

略証: $\mathrm{cat}(X) = m$ とし、$\sigma : X \to \tilde{P}^m(\Omega X)$ を定理 3.31 により与えられるものとする。$\sigma : X \to \tilde{P}^m(\Omega X)$ と包含写像 $\tilde{P}^i(\Omega X) \hookrightarrow \tilde{P}^m(\Omega X)$ のホモトピー pull-back を B_i とし、$\sigma : X \to \tilde{P}^m(\Omega X)$ と写像 $\tilde{E}^{i+1}(\Omega X) \to \tilde{P}^i(\Omega X) \hookrightarrow \tilde{P}^m(\Omega X)$ のホモトピー pull-back を A_i とし、σ のホモトピー fibre を F する。　このとき、$X_i = B_i/F, Y_i = A_i/F$ とおけば、$X_0 \simeq \{*\}, X_m \simeq X{\vee}\Sigma F$ であり、$Y_i \to X_i \to X_{i+1}$ は up to homotopy で cofibration となる。従って $\mathrm{Cat}(X) \leq m{+}1 = \mathrm{cat}(X){+}1$ が成立する。 終り.

定理 3.34 (Varadarajan,Hardie) $F \to E \to B$ を *fibration* とする。　このとき次式が成立する：

$$\mathrm{cat}(E){+}1 \leq (\mathrm{cat}(F){+}1){\cdot}(\mathrm{cat}(B){+}1)$$

略証: $\mathrm{cat}(B) = m, \mathrm{cat}(F) = n$ とすると、定理 3.31 より必要なら B を $\tilde{P}^m(\Omega B)$ に取り替えることにより $\mathrm{Cone}(()B) = m$ と仮定してよい。　そこで $\{h_i : H_i \to B_i \,|\, 0{\leq}i{\leq}m\}$ を B の cone decomposition とし、$E_i = p^{-1}(B_i)$ とおく：

$$B_{i+1} = B_i \cup C(H_i), B_0 = \{*\} \text{ and } B_m = B,$$

$$E_{i+1} = E_i \cup C(H_i){\times}F, E_0 = F \text{ and } E_m = E.$$

さてここで帰納法を用いて $\mathrm{cat}(E_i){+}1 \leq (\mathrm{cat}(F){+}1){\cdot}(i{+}1)$ を示す。

($i = 0$ の場合)　明らか。

($i{\leq}j$ まで正しかったとして $i{=}j{+}1$ の場合)　$E_{j+1} = E_j \cup C(H_j){\times}F$ であり、この式の中の F を定理 3.31 より $F' = \tilde{P}^n(\Omega F)$ に取り替えれば、$E'_{j+1} = E_j \cup C(H_j){\times}F'$ は E を支配する。　そこで $\{k_i : K'_i \to F'_i \,|\, 0{\leq}i{\leq}m\}$ を F' の cone decomposition とする：

$$F'_{i+1} = F'_i \cup C(K_i), F'_0 = \{*\} \text{ and } F'_n = F',$$

さらに $E'_{j,i} = E_j \cup C(H_j){\times}F'_i$ とおけば、次のような E_{j+1} の cone decomposition を得る：

$$E'_{j,i+1} = E_{j,i} \cup C(H_j){\times}C(K'_i), E'_{j,0} = E_j \text{ and } E'_{j,n} = E'_{j+1},$$

従って $\mathrm{cat}(E) \leq \mathrm{cat}(E') \leq (\mathrm{cat}(F){+}1){\cdot}i + \mathrm{cat}(F){+}1 = (\mathrm{cat}(F){+}1){\cdot}(i{+}1)$ となり帰納法が成立する。
終り.

第3章　L-Sの猫の決定

4　二つのスタンス

4.1　計算可能な不変量を用いて良い状況での結果を得る

定義 4.1 *Toomer* 不変量とその改良版を導入する。*Toomer* 不変量は有理ホモトピー論では $\mathrm{e}(-)$ と表示されるが、*Adams* e 不変量との競合を避けて $\mathrm{wgt}(-)$ と表示する：

(1) h を乗法的なコホモロジー論とする。

$$a)\ \mathrm{wgt}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, (e^X_m)_* : h^*(X) \to h^*(\tilde{P}^m(\Omega X)) \text{ は単射} \right\}$$

$$a)\ \mathrm{Mwgt}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, \begin{array}{l}(e^X_m)_* : h^*(X) \to h^*(\tilde{P}^m(\Omega X)) \text{ は } h^*h\text{-} \\ \textit{modules} \text{ の間の } \textit{split mono}\end{array} \right\}$$

$$a)\ \mathrm{Awgt}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, \begin{array}{l}(e^X_m)_* : h^*(X) \to h^*(\tilde{P}^m(\Omega X)) \text{ は } h^*h\text{-} \\ \textit{algebras} \text{ の間の } \textit{split mono}\end{array} \right\}$$

(2) $b)\ \mathrm{wgt}(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{wgt}(X;h) \,|\, h \text{ は乗法的なコホモロジー論}\}$

$b)\ \mathrm{Mwgt}(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{Mwgt}(X;h) \,|\, h \text{ は乗法的なコホモロジー論}\}$

$b)\ \mathrm{Awgt}(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{Awgt}(X;h) \,|\, h \text{ は乗法的なコホモロジー論}\}$

(3) $c)\ \mathrm{wgt_p}(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{wgt}(X;h) \,|\, h \text{ は乗法的な } p\text{-}local \text{ コホモロジー論}\}$

$c)\ \mathrm{Mwgt}_p(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{Mwgt}(X;h) \,|\, h \text{ は乗法的な } p\text{-}local \text{ コホモロジー論}\}$

$c)\ \mathrm{Awgt}_p(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{Awgt}(X;h) \,|\, h \text{ は乗法的な } p\text{-}local \text{ コホモロジー論}\}$

定理 4.2 $\mathrm{cup}(X;h) \leq \mathrm{wgt}(X;h) \leq \mathrm{Mwgt}(X;h) \leq \mathrm{Awgt}(X;h) \leq \mathrm{cat}(X)$ が成立する。

さて Rudyak と Strom は Fadell-Husseini [30] (1992) の与えた位相不変量 category weight をホモトピー不変量となるように再定義し、L-S の猫を近似計算する仕組みを与えた：

定義 4.3 (Rudyak 1997 [104, 105], Strom 1998 [122]) $u \in \tilde{h}^*(X)$ に対して

$$\mathrm{wgt}(u;h) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, (e^X_m)_*(u) \neq 0 \right\}$$ と定義する（h は乗法的コホモロジー論)。

定理 4.4 (Rudyak [104, 105], Strom [122]) h を乗法的なコホモロジー論とする。

(1) $\underline{uv \neq 0 \textit{ in } h^*(X)}$ ならば $\mathrm{wgt}(u;h) + \mathrm{wgt}(v;h) \leq \mathrm{wgt}(uv;h)$ が成立する。

(2) $\mathrm{wgt}(X;h) = \mathrm{Max}\{\mathrm{wgt}(u;h) \mid u \in \tilde{h}^*(X)\}$ が成立する。

定義 4.5 $\{(E_r^{**}(X;h), d_r) \mid r \geq 1\}$ を $X \simeq \tilde{P}^\infty(\Omega X)$ の *filtration* $\left\{\tilde{P}^m(\Omega X) \mid m \geq 0\right\}$ に *associate* し、$h^*(X)$ に収束する *Rothenberg-Steenrod* 型の *spectral sequence* とする。

定理 4.6 (Whitehead [138], Ginsburg [44], McCleary [91]) X を単連結とする。

(1) $h^*(\Omega X)$ が h^* 上 *free* ならば、$E_2^{**}(X;h) \cong \mathrm{Cotor}^{*,*}_{h^*(\Omega X)}(h^*, h^*)$

(2) $d_r : E_r^{s,t}(X;h) \to E_r^{s+r,t-r+1}(X;h)$ であり、$H(E_r^{*,*}(X;h), d_r) \cong E_{r+1}^{*,*}(X;h)$

(3) $E_\infty^{*,*}(X;h) \cong E_0 h^*(X), \qquad E_\infty^{s,t}(X;h) \cong F_s h^{s+t}(X)/F_{s+1}h^{s+t}(X)$

$$F_m h^n(X) = \ker\left\{(e_m^X)_* : h^n(X) \to h^n(\tilde{P}^m(\Omega X))\right\}$$

(4) *(Whitehead)* $r > \mathrm{cat}(X)$ ならば $E_r^{s,t}(X;h) \cong E_\infty^{s,t}(X;h)$ である。

(5) *(Ginsburg)* $s > \mathrm{cat}(X)$ ならば $E_\infty^{s,t}(X;h) = 0$ である。

注 4.7 任意の $[u]\ (\neq 0) \in E_\infty^{s,*}(X;h),\ (u \in \tilde{h}^*(X))$ に対して $\mathrm{wgt}(u;h) = s$ である。

例 4.8 *(1)* $\mathrm{wgt}(L^n(p)) = \mathrm{cat}(L^n(p)) = \mathrm{Dim}(L^n(p)) = n$（$p > 1$ は任意）である。

(2) *Symplectic* 多様体 M が $\pi_2(M)$=0 を満たせば $\mathrm{wgt}(M) = \mathrm{cat}(M) = 2n$ である。

(3) $\mathrm{wgt}(Sp(2); H\mathbb{Z}/2) = 2 < 3 = \mathrm{Mwgt}(Sp(2); H\mathbb{Z}/2) = \mathrm{cat}(Sp(2))$ である。

4.2 二つの「安定」な猫

最近になって、cup(−) とは異なる形で安定化された L-S の猫たちが導入された：

定義 4.9 (Rudyak [105]) $r\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0 \mid \exists_{(stably)\ \sigma : X \to P^m(\Omega X)}\ e_m^X \circ \sigma \sim 1_X\}$.

定義 4.10 (Vandembroucq [134])

$$Q\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0 \mid \exists_{\sigma : X \to (QP)^m(\Omega X)}\ (Qe)_m^X \circ \sigma \sim 1_X\},$$

ただし、*fibration* $E^{m+1}(\Omega X) \longrightarrow P^m(\Omega X) \xrightarrow{e_m^X} X$ を安定化関手 $Q = \Omega^\infty\Sigma^\infty$ を用いて *fibrewise* に安定化したものが $Q(E^{m+1}(\Omega X)) \longrightarrow (QP)^m(\Omega X) \xrightarrow{(Qe)_m^X} X$ である。

定理 4.11 (Rudyak [105, 106], Vandembroucq [134]) *(1)* $Q\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{cat}(X)$.

(2) 有理化された空間 X_0 は $\mathrm{wgt}(X_0) = r\mathrm{cat}(X_0) \leq Q\mathrm{cat}(X_0) = \mathrm{cat}(X_0)$ をみたす。

(3) $\mathrm{cup}(X) \leq \mathrm{wgt}(X) = \mathrm{Mwgt}(X) = r\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{Awgt}(X) \leq \mathrm{cat}(X)$.

注 4.12 一般に $\mathrm{cat}(X)$ の近似としては、$\mathrm{cup}(X;h)$ より $\mathrm{wgt}(X;h)$ の方が、$\mathrm{wgt}(X;h)$ より $\mathrm{Mwgt}(X;h)$ の方が、また $\mathrm{Mwgt}(X;h)$ より $\mathrm{Awgt}(X;h)$ の方が良い近似を与える。

4.3 高次の Hopf 不変量と L-S の猫

Berstein-Hilton [10] (1960) は R 係数のホモトピー群の元に対して高次の Hopf 不変量

$$H_m : \pi_n(X;R) \to \pi_{n+1}(\textstyle\prod^m X, \prod^m_{m-1} X; R), \quad n{\geq}2,\ m{\geq}1,$$

を用いて基点以外に二つだけ胞体を持つ複体の L-S 猫を決定した。 Stanley と I はこの高次 Hopf 不変量を ΩX の A_∞ 構造を用いて集合に値を持つ不変量として再定義した：

定義 4.13 (I 1998,2002 [?, 63], Stanley 2000 [117]) $\sigma : X \to \tilde{P}^m(\Omega X)$ を定理 *3.23* で定まる $\mathrm{cat}(X) \leq m$ の構造を与える写像とする。 任意の $f : \Sigma V \to X$ に対して次の可換図を考える：（$e^X_m{\circ}\Sigma\,\mathrm{ad}(f) = ev{\circ}\Sigma\,\mathrm{ad}(f) = f = 1_X{\circ}f = e^X_m{\circ}\sigma{\circ}f$）

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma V \arrow[d, "f"] \arrow[ddr, "\Sigma\,\mathrm{ad}(f)"] \arrow[dddrrr, "f"] \arrow[dddl, dotted, "H^\sigma_m(f)"'] \arrow[dddr, dotted] & & & \\
 & X \arrow[ddr, "\sigma"'] & & & \\
 & & \Sigma\Omega X \arrow[d, hook] \arrow[drr, "ev"] & & \\
\tilde{E}^{m+1}(\Omega X) \arrow[rr, "p^{\Omega X}_{m+1}"'] & & \tilde{P}^m(\Omega X) \arrow[rr, "e^X_m"'] & & X.
\end{tikzcd}$$

そこで $\sigma{\circ}f$ と $\Sigma\,\mathrm{ad}(f)$ の差 $d^\sigma_m(f) = \sigma{\circ}f - \Sigma\,\mathrm{ad}(f)$ の持ち上げ（$p^{\Omega X}_{m+1}{\circ}H^\sigma_m(f) = d^\sigma_m(f)$）を $H^\sigma_m(f) \in [\Sigma V, \tilde{E}^{m+1}(\Omega X)]$ とし、$\mathcal{H}^\sigma_m(f) = \Sigma^\infty H^\sigma_m(f) \in \{\Sigma V, \tilde{E}^{m+1}(\Omega X)\}$ とする。

問題 4.14 ΣV がホモトピー可換な *co-Hopf* 空間ならば H^σ_m が準同型となるか？

定理 4.15 (I [63]) V が *co-Hopf* 空間ならば任意の σ に対して H^σ_m は準同型である。

略証*:* $f, g : \Sigma V \to X$ に対してその adjoints を $\mathrm{ad}(f), \mathrm{ad}(g) : V \to \Omega X$ とする：

$$\Sigma\,\mathrm{ad}(f) : \Sigma V \to \Sigma\Omega X, \quad \Sigma\,\mathrm{ad}(g) : \Sigma V \to \Sigma\Omega X, \quad \Sigma\,\mathrm{ad}(f{+_S}g) : \Sigma V \to \Sigma\Omega X$$

ここで $+_S$ は suspension 構造によるホモトピー集合の積である。　ところが ΣV と V は、V の co-Hopf 構造によるホモトピー集合の積をもつので、これを $+_V$ で表せば

$$\mathrm{ad}(f{+_S}g) \sim \mathrm{ad}(f{+_V}g) \sim \mathrm{ad}(f){+_V}\,\mathrm{ad}(g)$$

を得る。　従ってこれらの懸垂をとることで次のホモトピーを得る。

$$\Sigma\,\mathrm{ad}(f{+_S}g) \sim \Sigma(\mathrm{ad}(f){+_V}\,\mathrm{ad}(g)) \sim \Sigma\,\mathrm{ad}(f){+_S}\Sigma\,\mathrm{ad}(g)$$

従って $\Sigma\,\mathrm{ad}(f{+_S}g) \sim \Sigma\,\mathrm{ad}(f) +_S \Sigma\,\mathrm{ad}(g)$ となり、定義から $H^{\sigma}_m(f+g) \sim H^{\sigma}_m(f) + H^{\sigma}_m(g)$ が成立する。　終り.

問題 4.16 任意の σ に対して $H^{\sigma}_m(f\circ(\Sigma g)) = H^{\sigma}_m(f)\circ(\Sigma g)$ が成立することを確かめよ。

例えば $\tilde{A}_m$ 空間 G に対して $X = \tilde{P}^m(G)$ とおけば、標準的な構造写像 $\sigma : \tilde{P}^m(G) \to \tilde{P}^m(\Omega\tilde{P}^m(G))$ に対して $H^{\sigma}_m : [\Sigma V, \tilde{P}^m(G)] \to [\Sigma V, \tilde{E}^{m+1}(\Omega\tilde{P}^m(G))]$ が定まる（I [63]）。

定理 4.17 球面 S^{n-1} *($n = 1, 2, 4, 8$)* はノルムを保つ（非結合的）積を持つ $\mathbb{R}$ 代数の単元の全体としての積構造を持つ。　このとき高次 *Hopf* 不変量 $H^S_m : \pi_{n(m+1)-1}(\tilde{P}^m(S^{n-1})) \to \mathbb{Z}$ が 1 となる元の存在が S^{n-1} の A_{m+1} 構造の存在と同値である。

略証*:*　まず $H^S_m : \pi_{n(m+1)-1}(\tilde{P}^m(S^{n-1})) \to \pi_{n(m+1)-1}(\tilde{E}^{m+1}(\Omega\tilde{P}^m(S^{n-1})))$ であり、

$$\pi_{n(m+1)-1}(\tilde{E}^{m+1}(\Omega\tilde{P}^m(S^{n-1}))) \cong \pi_{n(m+1)-1}(S^{n(m+1)-1}) \cong \mathbb{Z}$$

となるから、$H^S_m : \pi_{n(m+1)-1}(\tilde{P}^m(S^{n-1})) \to \mathbb{Z}$ と考えて良い。

$H^S_m(f) = 1$ となる $f : S^{n(m+1)-1} \to \tilde{P}^m(S^{n-1})$ が存在すれば、f のホモトピー fibre が Serre spectral sequence を用いて $S^{n-1})$ にホモトピー同値であることが分かり、X の Stasheff の意味の A_{m+1}-構造が作られる。　よって定理 3.27 から X は $\tilde{A}_{m+1}$-空間である。　逆は明らかである。　終り.

4.4　必要十分条件を用いて決定的な結果を得る

定義 4.18 (I [63]) 位相空間 X は $\mathrm{cat}(X) = m$ をみたす空間であるとする。高次の（非安定および安定）*Hopf* 不変量は

$$\begin{cases} H^S_m(\alpha) = \{H^{\sigma}_m(\alpha) \mid \sigma \textit{ is a structure of } \mathrm{cat}(X) = m\} \subseteq [\Sigma V, \tilde{E}^{m+1}(\Omega X)], \\ \mathcal{H}^S_m(\alpha) = \{\mathcal{H}^{\sigma}_m(\alpha) \mid \sigma \textit{ is a structure of } \mathrm{cat}(X) = m\} \subseteq \{\Sigma V, \tilde{E}^{m+1}(\Omega X)\}. \end{cases}$$

という集合として各々定義される。

問題 4.19 $d\cdot\mathrm{cat}(X){+}d{-}2 \geq \mathrm{Dim}(X) \geq d\cdot\mathrm{cat}(X)$ ならば σ は一意的であることを示せ。

例 4.20 $X = S^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n, \mathbb{H}P^n$（各々 $n \geq 1$）は上の条件をみたす。

定理 4.21 (I [63]) *CW 複体 X が $\mathrm{cat}(X) = m$ ($m \geq 1$) かつ $(d{-}1)$ 連結 ($d \geq 2$) で条件「$\mathrm{Dim}(X) \leq d\,\mathrm{cat}(X){+}d{-}2$」を満たすとき $W = X \cup_\alpha D^{e+1} \overset{i}{\hookleftarrow} X$（$e \geq d$）とおく。*

(1) 「$\mathrm{cat}(W) = \mathrm{cat}(X){+}1$ である」為には「$H^S_m(\alpha) \neq 0$ である」が必要十分である。

(2) また $\mathrm{cat}(W) = \mathrm{cat}(X){+}1$ のとき、「すべての $n \geq 1$ に対して $\mathrm{cat}(W{\times}S^n) = \mathrm{cat}(W){+}1$ である」為には「$\mathcal{H}^S_m(\alpha) \neq 0$ である」が必要十分である。

略証*:* (2) は省略し、(1) のみを示す：$\tilde{P}^m(\Omega i)\circ\sigma : X \to \tilde{P}^m(\Omega X) \hookrightarrow \tilde{P}^m(\Omega W)$ が W に extend できるための障害が

$$\tilde{P}^m(\Omega i)\circ\sigma\circ\alpha \simeq \tilde{P}^m(\Omega i)\circ\sigma\circ\alpha - \Sigma\,\mathrm{ad}\,(i\circ\alpha) \simeq \tilde{P}^m(\Omega i)\circ\sigma\circ\alpha - \tilde{P}^m(\Omega i)\circ\Sigma\,\mathrm{ad}\,\alpha$$
$$\simeq \tilde{P}^m(\Omega i)\circ(\sigma\circ\alpha - \Sigma\,\mathrm{ad}\,\alpha) \simeq p^m_{\Omega W}\circ\tilde{E}^{m+1}(\Omega i)\circ H^\sigma_m(\alpha)$$

で与えられ、$p^m_{\Omega W*}$ は単射であるので本質的には $\tilde{E}^{m+1}(\Omega i)\circ H^\sigma_m(\alpha)$ である。　ここで $m{\geq}1$ で $\Omega i : \Omega X \hookrightarrow \Omega W$ は $e{-}1$ 連結かつ ΩW は連結であるので、$\tilde{E}^{m+1}(\Omega i)$ は $e{+}1$ 連結となる。　従って $\tilde{E}^{m+1}(\Omega i)_*$ も単射であり、$\tilde{P}^m(\Omega i)\circ\sigma$ が W に extend できるための障害は $H^\sigma_m(\alpha)$ で与えられる。終り.

定理 4.22 (I [61]) *CW 複体の族 $\{Q_\ell\,;\,\ell{\geq}2$ は素数$\}$ で次を満たすものが存在する。*

$$\begin{cases}\mathrm{cat}(Q_2{\times}S^n) = \mathrm{cat}(Q_2) & \textit{for all } n \geq 1,\\ \mathrm{cat}(Q_\ell{\times}S^n) = \mathrm{cat}(Q_\ell) & \textit{for all } n \geq 2 \textit{ and } \ell > 2.\end{cases}$$

$\ell = 2$ の場合 の略証*:* $\sigma \in \pi_{15}(S^8)$ を Hopf 不変量 1 を与える元とすると、$H_1(\sigma) = 1 \in \pi_{15}(\Omega S^8{*}\Omega S^8) \cong \mathbb{Z}$ である。　S^{15} に対する Hopf 不変量 1 の元の非存在は、Toda [129] によって証明され，特に $[\iota_{15}, \iota_{15}] \in \pi_{29}(S^{15})$ は懸垂準同型 $E : \pi_{28}(S^{14}) \to \pi_{29}(S^{15})$ の像に含まれる自明でない元である。　問題 4.16 に挙げた事実から $H_1(\sigma\circ[\iota_{15}, \iota_{15}]) = i_*[\iota_{15}, \iota_{15}]$（$i : S^{15} \hookrightarrow \Omega S^8{*}\Omega S^8$ は bottom cell の包含写像）となり、$\Omega S^8{*}\Omega S^8$ は無限個の球面の一点和にホモトピー同値であるから i_* は split mono である。　従って $H_1(\sigma\circ[\iota_{15}, \iota_{15}]) \neq 0$ であり、Berstein-Hilton の定理から $Q_2 = S^8 \cup_{\sigma\circ[\iota_{15},\iota_{15}]} e^{30}$ は $\mathrm{cat}(Q_2) = 2$ をみたす。

一方で Whitehead 積の懸垂は必ず 0 になることから、$\Sigma([\iota_{15}, \iota_{15}]) = 0$ である。　また $Q_2{\times}S^n = Q_2{\times}\{*\} \cup S^8{\times}S^n \cup_{\psi_n} e^{n+30}$ という CW 分割を考えると $\mathrm{cat}(Q_2{\times}\{*\} \cup S^8{\times}S^n) = 2$ であり、ψ_n は

$\sigma\circ[\iota_{15},\iota_{15}]$ と $\iota_n\in\pi_n(S^n)$ の相対 Whitehead 積で与えられる。　従って $\mathrm{cat}(Q_2{\times}S^n)=3$ となる為には、$H_2^S(\psi_n)$ が 0 を含んではならない。　しかし $H_2^S(\psi_n)\ni S^{n-1}{*}H_1(\sigma\circ[\iota_{15},\iota_{15}])=\pm\Sigma^n[\iota_{15},\iota_{15}]=0$（$n\geq 1$）となるので、$\mathrm{cat}(Q_2{\times}S^n)=\mathrm{cat}(Q_2)=2$（$n\geq 1$）が成立する。　終り.

$\mathbb{C}P^3$ は S^4 上の S^2 束の構造を持つことに注意して、うまく自明でない co-Hopf 写像 $\beta:S^q\to S^3$ を選び、$\Sigma\beta:S^{q+1}\to S^4$ を smooth map で近似する。　$E(\beta)$ を $\Sigma\beta$ による $\mathbb{C}P^3$ の引き戻しとして定義すれば、$E(\beta)=S^2\cup_{\eta\circ\beta}e^{q+1}\cup_{\psi(\beta)}e^{q+3}$ となる。　これに対して H_3^S の計算を自明でない Toda bracket（cf. [130]）を用いて実行することで次の二つの定理を得る。

定理 4.23 (I [63], L-S-V [85]) 単連結な閉多様体 N で次を満たすものが存在する。

$$\mathrm{cat}(N\smallsetminus\{*\})=\mathrm{cat}(N).$$

定理 4.24 (I [63]) 単連結な閉多様体 M で次の条件を満たすものが存在する。

$$\mathrm{cat}(M{\times}S^n)=\mathrm{cat}(M)\quad \textit{for all } n\geq 2,$$

従って、[92] に挙げられた Problems 642 と 643 は閉多様体に限定しても共に否定的に解決されたことになる。 しかし、これらすべての計算例は次の予想を支持している。

問題 4.25 (I [61]) $n(X)=\mathrm{Max}\{n\mid \mathrm{cat}(X{\times}S^n){=}\mathrm{cat}(X){+}1\ \textit{or}\ n{=}0\}$ は次をみたすか？

$$\mathrm{cat}(X{\times}S^n)=\begin{cases}\mathrm{cat}(X){+}1 & \textit{for all } n\leq n(X),\\ \mathrm{cat}(X) & \textit{for all } n>n(X).\end{cases}$$

これについては最近、次の結果がアナウンスされた。

定理 4.26 (Stanley-Strom-I. [69]) 単連結有限複体 X が十分大きな $n(X)$ に対し $\mathrm{cat}(X{\times}S^{n'(X)})=\mathrm{cat}(X)$ をみたすならば次式が成立する。

$$\mathrm{cat}(X{\times}S^n)=\begin{cases}\mathrm{cat}(X){+}1 & \textit{for all } n\leq n(X),\\ \mathrm{cat}(X) & \textit{for all } n\geq n'(X),\end{cases}$$

ただし $n'(X)$ は X の連結性、次元そして *L-S* の猫に依存する非常に大きな自然数である。

さらに Lie 群 Spin(9) に対する結果 $\mathrm{cat}(\mathrm{Spin}(9))=8$ が Kono-I. [81] によりアナウンスされ、その中で $\mathrm{cat}(\mathrm{Spin}(9))=\mathrm{Mwgt}(\mathrm{Spin}(9);\mathbb{F}_2)=8>6=\mathrm{wgt}(\mathrm{Spin}(9);\mathbb{F}_2)$ が示されている。この事実は $\mathrm{Mwgt}(\ ;\mathbb{F}_2)$ が実際に $\mathrm{wgt}(\ ;\mathbb{F}_2)$ より強い不変量であることを裏付けている。

文　献

[1] J. F. Adams, *On the non-existence of elements of the Hopf invariant one*, Ann. of Math., **72** (1960), 20–104.

[2] M. Arkowitz, *Co-H-spaces*, Handbook of algebraic topology, 1143-1173, North Holland, Amsterdam, 1995.

[3] M. Arkowitz and D. Stanley, *The cone length of a product of co-H-spaces and a problem of Ganea*, Bull. London Math. Soc. **33** (2001), 735–742.

[4] H. Bass, *Projective modules over free groups are free*, J. of Algebra **1** (1964), 367–373.

[5] H. Bass, *Algebraic K-theory*, Benjamin, Amsterdam,1968.

[6] M. Bendersky, *A functor which localizes the higher homotopy groups of an arbitrary CW-complex*, Lecture Notes in Math. 418, Springer Verlag, Berlin (1975), 13–21.

[7] I. Berstein, *Homotopy mod C of spaces of category 2*, Comment. Math. Helv. **35** (1961), 9–14.

[8] I. Berstein and E. Dror, *On the homotopy type of non-simply connected co-H-space*, Ill. Jour. Math. **20** (1976), 528–534.

[9] I. Berstein and T. Ganea, *The category of a map and of a cohomology class*, Fund. Math. **50** (1961/62), 265–279.

[10] I. Berstein and P. J. Hilton, *Category and generalized Hopf invariants*, Illinois. J. Math. **4** (1960), 437–451.

[11] J. M. Boardman and B. Steer, *On Hopf invariants*, Comment. Math. Helv. **42** (1967), 180–221.

[12] J. M. Boardman and R. M. Vogt, *Homotopy-everything H-spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 1117–1122.

[13] A. K. Bousfield and D. M. Kan, *Homotopy Limits, Completions and Localizations*, Lecture Notes in Math. 304, Springer Verlag, Berlin (1972).

[14] A. Borel, *Topics in the homology theory of fibre bundles*, Lect. Notes in Math. **36**, Springer Verlag, Berlin (1967).

[15] M. Brittenham, *Life gets better as n gets larger (topology-style) The (continuing) saga of the Poincare Conjecture*, http://www.math.unl.edu/ mbritten/ldt/poincare.html.

[16] F. E. Browder, *Problems of present day mathematics*, in "Mathematical developments arising from Hilbert problems" (De Kalb, IL, 1974), 35–79, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1976.

[17] W. Browder, *Torsion in H-spaces*, Ann. of Math. **74** (1961), 24–51.

[18] P. M. Cohn, *Free ideal rings*, J. of Algebra **1** (1964), 47–69.

[19] O. Cornea, *Cone-length and Lusternik-Schnirelmann category*, Topology **33** (1994), 95–111.

[20] O. Cornea, *There is just one rational cone-length*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 835–848.

[21] O. Cornea, *Strong LS category equals cone-length*, Topology **34** (1995), 377–381.

[22] M. C. Crabb, J. R. Hubbuck and Kai Xu, *Fields of spaces*, Adams Memorial Symposium on Algebraic Topology, 1 (1990), 241–254, LMS. Lecture Note 175, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[23] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea and D. Tanré, "Lusternik-Schnirelmann category", Mathematical Surveys and Monographs **103**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[24] M. Clapp and L. Montejano, *Lusternik-Schnirelmann category and minimal coverings with contractible sets*, Manuscripta Math. 58 (1987), no. 1-2, 37–45.

[25] M. Clapp and D. Puppe, *Invariants of the Lusternik-Schnirelmann type and the topology of critical sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **298** (1986), 603–620.

[26] C. R. Curjel, *A note on spaces of category* ≤ 2, Math. Z. **80** (1963), 293–299.

[27] C. R. Curjel, On the homology decomposition of polyhedra, Illinois J. Math. **4** (1963), 121–136.

[28] B. Eckmann, P. Hilton, *Décomposition homologique d'un polyèdre simplement connexe*, C. R. Acad. Sci. Paris **248** (1959), 2054–2056.

[29] S. Eilenberg and T. Ganea, *On the Lusternik-Schnirelmann category of abstract groups*, Ann. of Math. (2), **65** (1957), 517–518.

[30] E. Fadell and S. Husseini, *Category weight and Steenrod operations* (Spanish), Bol. Soc. Mat. Mexicana (2), **37** (1992), 151–161.

[31] Y. Felix, S. Halperin and J.-M. Lemaire, *The rational LS category of products and of Poincaré duality complexes*, Topology **37** (1998), 749–756.

[32] Y. Felix, S. Halperin and J.-C. Thomas, "Rational Homotopy Theory", Springer Verlag, Berlin, 2001, Graduate Texts in Math. **205**.

[33] L. Fernández-Suárez, A. Gómez-Tato and D. Tanré, *Hopf-Ganea invariants and weak LS category*, Top. Appl. **115** (2001), 305–316.

[34] L. Fernández-Suárez, A. Gómez-Tato, J. Strom and D. Tanré, *The Lusternik-Schnirelmann category of* Sp(3), Trans. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 587–595 (electronic).

[35] A. Floer, *Cuplength estimates on Lagrangian intersections*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 335–356.

[36] A. Floer, *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*, Comm. Math. Phys. **120** (1989), 575–611.

[37] R. H. Fox, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, Ann. of Math. (2) **42** (1941), 333–370.

[38] R. H. Fox, *Free differential Calculus I*, Ann. of Math. **57** (1953), 547–560.

[39] K. Fukaya and K. Ono, *Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant*, Topology **38** (1999), 933–1048.

[40] T. Ganea, *Lusternik-Schnirelmann category and strong category*, Illinois. J. Math. **11** (1967), 417–427.

[41] T. Ganea, *Cogroups and suspensions*, Invent. Math. **9** (1970), 185–197.

[42] T. Ganea, *Some problems on numerical homotopy invariants*, In: "Symposium on Algebraic Topology", 23–30, Lecture Notes in Math. **249**, Springer Verlag, Berlin, 1971.

[43] W.J. Gilbert, *Some examples for weak category and conilpotency*, Illinois J. Math. **12** (1968), 421-432.

[44] M. Ginsburg, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, Ann. of Math. (2), **77** (1963), 538–551.

[45] D. Gonçalves, *Mod* 2 *homotopy associative H-spaces*, Geometric Applications of Homotopy Theory I, (Proc. Conf., Evanston Ill. 1977), Lect. Notes in Math. **657**, Springer Verlag, Berlin (1978) 198–216.

[46] J. C. Gómez-Larrañaga and F. González-Acuña, *Lusternik-Schnirelmann category of 3-manifolds*, Topology **31** (1992), 791–800.

[47] K. A. Hardie, *A note on fibrations and category*, Michigan Math. J. **17**, (1970), 351–352.

[48] H. W. Henn, *On almost rational co-H-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **87**, (1983), 164–168.

[49] K. Hess, *A proof of Ganea's Conjecture for Rational Spaces*, Topology **30** (1991), 205–214.

[50] P. Hilton, G. Mislin and J. Roitberg, *On co-H-spaces*, Comment. Math. Helv. **53** (1978), 1–14.

[51] Y. Hirashima, *A convenient axiom to convenient categories for homotopy theory*, Math. J. Okayama U. **42** (2000) 115–122.

[52] H. Hofer, *Lusternik-Schnirelman-theory for Lagrangian intersections*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **5** (1988), 465–499.

[53] J. R. Hubbuck, *On homotopy-commutative H-spaces*, Topology **8** (1969) 119–126.

[54] J. R. Hubbuck, *Two examples on finite H-spaces*, Geometric Applications of Homotopy Theory I, (Proc. Conf., Evanston Ill. 1977), Lect. Notes in Math. **657**, Springer Verlag, Berlin (1978) 282–291.

[55] J. R. Hubbuck, *Products with the seven sphere and homotopy associativity*, Mem. Fac. Sci. Kyushu U. Ser. A **40** (1986), 91–100.

[56] J. R. Hubbuck, *Self maps of H-spaces*, Advances in homotopy theory (Cortona, 1988), 105–110, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 139, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[57] J. R. Hubbuck and N. Iwase, *A p-complete version of the Ganea conjecture on co-H-spaces*, In: "Lusternik-Schnirelmann category and related topics" (South Hadley, MA, 2001), 127–133, Contemp. Math. **316**, 2002.

[58] N. Iwase: *On the ring structure of* $K^*(XP^n)$ (Japanese), Master Thesis, Kyushu University, Fukuoka, 1983.

[59] N. Iwase: *On the A_n-structures of mappings* (Japanese), Research on unstable homotopy theory (Japanese) (Kyoto 1983), Sūri Kaiseki Kenkyūsho Kōkyūroku, **505** (1983), 63–75.

[60] N. Iwase, *On the K-ring structure of X-projective n-space*, Mem. Fac. Sci. Kyushu U. (A) Math. **38** (1984), 285-297.

[61] N. Iwase, *Ganea's conjecture on Lusternik-Schnirelmann category*, Bull. London Math. Soc. **30** (1998), 623–634.

[62] N. Iwase, *Co-H-spaces and the Ganea conjecture*, Topology **40** (2001), 223–234.

[63] N. Iwase, *A_∞-method in Lusternik-Schnirelmann category*, Topology **41** (2002), 695–723.

[64] N. Iwase, *Lusternik-Schnirelmann category of a sphere-bundle over a sphere*, Topology **42** (2003), 701–713.

[65] N. Iwase and M. Mimura, *Higher homotopy associativity*, Algebraic Topology, (Arcata CA 1986), 193–220, Lecture Notes in Math. **1370**, Springer Verlag, Berlin, 1989.

[66] N. Iwase and M. Mimura, *L-S categories of* 1 *connected compact simple Lie groups of low rank*, In: "Algebraic Topology: Categorical Decomposition Techniques", (Isle of Skye, 2001), 199–212, *Progr. Math.*, 215, Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.

[67] N. Iwase, M. Mimura and T. Nishimoto, *On the cellular decomposition and the Lusternik-Schnirelmann category of $Spin(7)$*, Topology Appl. **133** (2003), 1–14.

[68] N. Iwase, M. Mimura and T. Nishimoto, *L-S categories of non-*1 *connected compact simple Lie groups*, preprint, 2004.

[69] N. Iwase, D. Stanley and J. Strom, *Implications of the Ganea Condition*, Algebr. Geom. Topol., **4** (2004), 829–839.

[70] I. M. James, *The topology of Stiefel manifolds*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976, London Math. Soc. Lec. Notes **24**.

[71] I. M. James, *On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann*, Topology **17** (1978), 331-348.

[72] I. M. James, *Lusternik-Schnirelmann Category*, In: "Handbook of algebraic topology", 1293-1310, North Holland, Amsterdam, 1995.

[73] I. James and W. Singhof, *On the category of fiber bundles, Lie groups, and Frobenius maps*, In: "Higher homotopy structures in topology and mathematical physics" (Poughkeepsie, NY, 1996), 177–189, Contemp. Math. **227**, 1999.

[74] B. Jessup, *Rational L-S category and a conjecture of Ganea*, Trans. Amer. Math. Soc. **317** (1990), 655–660.

[75] H. Kadzisa, Cone-decompositions of the unitary groups, preprint, 2003.

[76] H. Kadzisa, Cone-decompositions of the special unitary groups, preprint, 2003.

[77] D. M. Kan, *On monoids and their dual*, Bol. Soc. Math. Mex. **3** (1958), 52–61.

[78] J. Klein, R. Schwänzl and R. M. Vogt, *Comultiplication and suspension*, Topology Appl. **77** (1997), 1–18.

[79] K. Komatsu, *On links whose complements have the Lusternik-Schnirelmann category one*, Hiroshima Math. J. **24** (1994), 473–483.

[80] K. Komatsu and T. Matumoto, *Knot-link theory and Lusternik-Schnirelmann category*, In: "Algebra and topology 1992" (Taejŏn), 211–216, Korea Adv. Inst. Sci. Tech., Taejŏn, 1992.

[81] A. Kono and N. Iwase, *Lusternik-Schnirelmann category of* Spin(9), preprint.

[82] M. A. Krasnosel′skiĭ, *On special coverings of a finite-dimensional sphere* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 103 (1955), 961–964.

[83] G. Liu and G. Tian, *Floer homology and Arnold conjecture*, J. Differential Geom. **49** (1998), 1–74.

[84] L. Lusternik and L. Schnirelmann, "Méthodes Topologiques dans les Problèmes Variationnels", Hermann, Paris, 1934.

[85] P. Lambrechts, D. Stanley and L. Vandembroucq, *Embedding up to homotopy of two-cones into Euclidean space*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 3973–4013.

[86] S. Mac Lane, "Homology", Springer Verlag, Berlin, 1963.

[87] S. MacLane, "Categories for the working mathematician", Springer Verlag, Berlin, GTM series **5**, 1971.

[88] T. Matumoto, *Lusternik-Schnirelmann category and knot complement*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **37** (1990), 103–107.

[89] T. Matumoto, *Lusternik-Schnirelmann category and knot complement II*, Topology **34** (1995), 177–184.

[90] J. P. May, *Fiberwise localization and completion*, Trans. Amer. Math. Soc. **258** (1980), 127–146.

[91] J. McCleary, "A User's Guide to Spectral Sequences", Math. Lec. Ser. 12, Publish or Perish Inc., Wilmington Delaware (1985).

[92] J. van Mill and G. M. Reed, "Open problems in topology", edited by J. van Mill and G.M. Reed, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.

[93] M. Mimura, "Hopf Spaces" (Japanese), Kinokuniya Shoten, Tokyo, 1986.

[94] M. Mimura and T. Nishimoto, *On the cellular decomposition of the exceptional Lie group* G_2, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 2451–2459.

[95] L. Montejano, *A quick proof of Singhof's* $\mathrm{cat}(M{\times}S^1) = \mathrm{cat}(M) + 1$ *theorem*, Manuscripta Math. **42** (1983), 49–52.

[96] L. Montejano, *Lusternik-Schnirelmann category: a geometric approach*, Geometric and algebraic topology, 117–129, Banach Center Publ., 18, PWN, Warsaw, 1986.

[97] L. Montejano, *Lusternik-Schnirelmann category and Hilbert cube manifolds*, Topology Appl. **27** (1987), 29–35.

[98] L. Montejano, *Geometric category and Lusternik-Schnirelmann category*, Geometric topology and shape theory (Dubrovnik, 1986), 183–192, Lecture Notes in Math., 1283, Springer, Berlin, 1987.

[99] L. Montejano, *Categorical and contractible covers of polyhedra; some topological invariants related to the Lusternik-Schnirelmann category*, Conference on Differential Geometry and Topology (Sardinia, 1988). Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **58** (1988), 177–264.

[100] N. Oda, *Pairings and copairings in the category of topological spaces*, Publ. RIMS Kyoto U. **28** (1992), 83–97.

[101] S. Oka, *The stable homotopy groups of spheres I*, Hiroshima Math. J. **1** (1971), 305–337.

[102] J. Oprea and Y. Rudyak, *On the Lusternik-Schnirelmann category of symplectic manifolds and the Arnold conjecture*, Math. Z. **230** (1999), 673–678.

[103] J. Oprea and Y. Rudyak, *Detecting elements and Lusternik-Schnirelmann category of* 3*-manifolds*, In: "Lusternik-Schnirelmann category and related topics" (South Hadley, MA, 2001), 181–191, Contemp. Math. **316**, 2002.

[104] Y. B. Rudyak, *On the Ganea conjecture for manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2511–2512.

[105] Y. B. Rudyak, *On category weight and its applications*, Topology **38** (1999), 37–55.

[106] Y. Rudyak, *On analytical applications of stable homotopy (the Arnold conjecture, critical points)*, Math. Z. **230** (1999), 659–672.

[107] S. Saito, *Notes on Co-H-spaces*, J. Fac. Sci. Shinshu U. **6** (1971), 101–106.

[108] S. Saito, *On higher coassociativity*, Hiroshima Math. J. **6** (1976), 589–617.

[109] M. Sakai, *A proof of the homotopy push-out and pull-back lemma*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 2461–2466.

[110] H. Scheerer, *On rationalized H- and co-H-spaces*, Manuscripta Math. **51** (1984), 63–87.

[111] P. A. Schweitzer, *Secondary cohomology operations induced by the diagonal mapping*, Topology **3** (1965), 337–355.

[112] C. S. Seshadri, *Triviality of vector bundles over the affine space* K^2, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S. **44** (1958), 456–458.

[113] W. Singhof, *On the Lusternik-Schnirelmann category of Lie groups*, Math. Z. **145** (1975), 111–116.

[114] W. Singhof, *On the Lusternik-Schnirelmann category of Lie groups II*, Math. Z. **151** (1976), 143–148.

[115] W. Singhof, *Generalized higher order cohomology operations induced by the diagonal mapping*, Math. Z. **162** (1978), 7–26.

[116] W. Singhof, *Minimal coverings of manifolds with balls*, Manuscripta Math. **29** (1979), 385–415.

[117] D. Stanley, *Spaces with Lusternik-Schnirelmann category n and cone length $n+1$*, Topology **39** (2000), 985–1019.

[118] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces, I & II*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 275–292; 293–312.

[119] J. D. Stasheff, *H-spaces from a Homotopy Point of View*, Lecture Notes in Math. **161**, Springer Verlag, Berlin 1970.

[120] N. E. Steenrod, *Cohomology operations*, Annals of Mathematical Studies **50**, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1962).

[121] J. Strom, *Two special cases of Ganea's conjecture*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 679–688.

[122] J. Strom, *Essential category weight and phantom maps*, In: "Cohomological methods in homotopy theory" (Bellaterra, 1998), 409–415, Progr. Math., 196, Birkhäuser, Basel, 2001.

[123] M. Sugawara, *On a condition that a space is an H-space*, Math. J. Okayama U. **5** (1956/57), 109–129.

[124] M. Sugawara, *A condition that a space is group-like*, Math. J. Okayama U. **7** (1957), 123–149.

[125] D. Sullivan, "Geometric Topology, Part I", Localization and Galois Symmetry (3.1-4.42), M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1970.

[126] F. Takens, *The minimal number of critical points of a function on a compact manifold and the Lusternik-Schnirelman category*, Invent. Math. **6** (1968), 197–244.

[127] F. Takens, *The Lusternik-Schnirelman categories of a product space*, Compositio Math. **22** (1970), 175–180.

[128] H. Toda, *Topology of standard path spaces and homotopy theory. I*, Proc. Japan Acad. **29** (1953), 299–304.

[129] H. Toda, *Non-existence of mappings of S^{31} into S^{16} with Hopf invariant 1*, J. Inst. Polytech. Osaka City U. Ser. A **8** (1957), 31–34.

[130] H. Toda, "Composition methods in homotopy groups of spheres", Princeton U. Press, Princeton N.J., Ann. of math. studies **49**, 1962.

[131] G. Toomer, *Lusternik-Schnirelmann category and the Moore spectral sequence*, Math. Z. **138** (1974), 123–143.

[132] G. Toomer, *Two applications of homology decompositions*, Canad. J. Math. **27** (1975), 323–329.

[133] L. Vandembroucq, *Suspension of Ganea fibrations and a Hopf invariant*, Topology Appl. **105** (2000), 187–200.

[134] L. Vandembroucq, *Fibrewise suspension and Lusternik-Schnirelmann category*, Topology **41** (2002), 1239–1258.

[135] K. Varadarajan, *On fibrations and category*, Math. Z. **88** (1965), 267–273.

[136] K. Varadarajan, *The Finiteness Obstruction of C.T.C. Wall*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[137] C. T. C. Wall, *An obstruction to finiteness of CW-complexes*, Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 269–270.

[138] G. W. Whitehead, *The homology suspension*, In: “Colloque de topologie algébrique, Louvain, 1956”, Georges Thone, Liége; 89–95, Masson & Cie, Paris, 1957.

[139] G. W. Whitehead, “Elements of Homotopy Theory”, Springer Verlag, Berlin, 1978, Graduate Texts in Mathematics **61**.

[140] K. Xu, *Space of rings*, PhD Thesis at University of Aberdeen (1989).

[141] A. Zabrodsky, “Hopf spaces”, Notas de Matemática (59), North-Holland Publ. Co., Amsterdam, North-Holland Mathematics Studies, **22** (1976).

5 Appendix

5.1 多様体の L-S category

(1) $\mathrm{cat}(\mathbb{F}P^n) = n,\ n{\geq}0\ (\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ or $\mathbb{H})$. (2) $\mathrm{cat}(\mathbb{O}P^n) = n,\ 0{\leq}n{\leq}2$.

(3) $\mathrm{cat}(M^2) = \begin{cases} 1, & \pi_1(M^2) = 0, \\ 2, & \pi_1(M^2) \neq 0. \end{cases}$ (4) $\mathrm{cat}(M^3) = \begin{cases} 1, & \pi_1(M^3) = 0, \\ 2, & \pi_1(M^3) = \mathbb{Z}, \\ 3, & \text{otherwise.} \end{cases}$

(5) $\mathrm{cat}(S^n) = 1,\ n{\geq}1$. (6) (Rudyak) $\mathrm{cat}(L^n(p)) = n,\ n{\geq}1, p{>}1$.

(7) (Rudyak) Symplectic 多様体 (M^{2n}, ω) が $\pi_2(M){=}0$ をみたせば $\mathrm{cat}(M^{2n}) = 2n,\ n{\geq}1$.

(8) (I) S^{t+1} 上の S^r 束 E と $Q = E \smallsetminus \{pt\} \simeq S^r \cup_\alpha e^{t+1}$ の L-S カテゴリ数

r	t	α	$\mathrm{cat}(Q{\times}S^n)$	$\mathrm{cat}(Q)$	$\mathrm{cat}(E)$	$\mathrm{cat}(E{\times}S^n)$
$r{=}1$	$t{=}0$		2	1	2	3
	$t{=}1$	$\alpha{=}\pm 1$	1	0	1	2
		$\alpha{=}0$	2	1	2	3
		$\alpha{\neq}0, \pm 1$	3	2	3	4
	$t{>}1$		2	1	2	3
$r{>}1$	$t{<}r$		2	1	2	3
	$t{=}r$	$\alpha{=}\pm 1$	1	0	1	2
		$\alpha{\neq}\pm 1$	2	1	2	3
	$t{>}r$	$H_1(\alpha){=}0$	2	1	2	3
		$H_1(\alpha){\neq}0\ \&\ \Sigma^r H_1(\alpha){=}0$	3 or 2	2	2	3
		$\Sigma^r H_1(\alpha){\neq}0$			3	3 or 4

(9) (Singhof, James, FGST, IM, IMN) コンパクト単純 Lie 群の L-S カテゴリ数

階数	1		2		3		4		$5 \leq n$	
A_n	$SU(2)$	1	$SU(3)$	2	$SU(4)$	3	$SU(5)$	4	$SU(n{+}1)$	n
	$PU(2)$	3	$PU(3)$	6	$PU(4)$	9	$PU(5)$	12	$PU(n{+}1)$	?
B_n	$Spin(3)$	1	$Spin(5)$	3	$Spin(7)$	5	$Spin(9)$	9	$Spin(2n{+}1)$	?
	$SO(3)$	3	$SO(5)$	8	$SO(7)$	11	$SO(9)$	20	$SO(2n{+}1)$	?
C_n	$Sp(1)$	1	$Sp(2)$	3	$Sp(3)$	5	$Sp(4)$	?	$Sp(n)$	?
	$PSp(1)$	3	$PSp(2)$	8	$PSp(3)$	?	$PSp(4)$	?	$PSp(n)$	?
D_n					$Spin(6)$	3	$Spin(8)$	6	$Spin(2n)$	?
					$SO(6)$	9	$SO(8)$	12	$SO(2n)$	?
					$PO(6)$	9	$PO(8)$	18	$PO(2n)$	?
例外			G_2	4			F_4	?	E_n	?

(10) (Singhof) 複素 Stiefel 多様体 $W_{n,r} = U(n)/U(n{-}r)$ は $\mathrm{cat}(W_{n,r}) = r$ をみたす。

5.2 L-S の猫たちに関連した（私的な）問題

問題 5.1 (Ganea) 多様体の L-S の猫の値を計算せよ。

問題 5.2 $\mathrm{Awgt}(M) = \mathrm{cat}(M) = \mathrm{Cat}(M)$ を満たす多様体 M のクラスを決定せよ。

問題 5.3 任意の *compact Lie* 群 G に対して $\mathrm{Awgt}(G) = \mathrm{cat}(G) = \mathrm{Cat}(G)$ となるか？

定理 5.4 (Cornea) $\underset{\overrightarrow{\longrightarrow}}{\mathrm{hocolim}}(X_n){\simeq}X$ のとき $\mathrm{cat}(X) \le 2\mathrm{Max}\{\mathrm{cat}(X_n)\,;\, n{\ge}1\}$ となる。

問題 5.5 $\underset{\overrightarrow{\longrightarrow}}{\mathrm{hocolim}}(X_n){\simeq}X$ のとき $\mathrm{cat}(X) \le \mathrm{Max}\{\mathrm{cat}(X_n)\,;\, n{\ge}1\} + 1$ となるか？

問題 5.6 $\underset{\overleftarrow{\longleftarrow}}{\mathrm{holim}}(X_n){\simeq}X$ のとき $\mathrm{cat}(X) \le \mathrm{Max}\{\mathrm{cat}(X_n)\,;\, n{\ge}1\} + 1$ となるか？

定義 5.7 $\mathrm{cat_p}(X) = \mathrm{Min}\{m \ge 0\,;\, \exists_{\sigma : X \to P^m(\Omega X)}\ s.t.\ \ e^X_m{\circ}\sigma$ は p-同値$\}$ とおく。

問題 5.8 $\mathrm{cat_p}(X) = \mathrm{cat}(X_{(p)})$ となる為には X が単連結であることが必要十分か？

定理 5.9 (Cornea) $\mathrm{cat}(X) \le 2{\cdot}\,\mathrm{Max}\{\mathrm{cat_p}(X)\,;\, p \ge 0$ は素数$\}$ となる。

問題 5.10 $\mathrm{cat}(X) \le \mathrm{Max}\{\mathrm{cat_p}(X)\,;\, p \ge 0$ は素数$\} + 1$ となるか？

定義 5.11 $n(X) = \mathrm{Max}\{n \ge 0\,;\, \mathrm{cat}(X{\times}S^n){=}\mathrm{cat}(X){+}1\ \ or\ n{=}0\}$ とおく。

定理 5.12 (I) 任意の $n{\ge}0$ に対して $2n \le n(X) \le 2n{+}1$ を満たす X が存在する。

問題 5.13 常に $\mathrm{cat}(X{\times}S^n) = \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{cat}(X){+}1 & for\ all\ n \le n(X), \\ \mathrm{cat}(X) & for\ all\ n > n(X). \end{array}\right\}$ が成立するのか？

定理 5.14 (Roitberg) 有限型の無限次元複体 X と Y で、同じ *Mislin genus* を持ち異なる L-S の猫の値を取るものが存在する。

問題 5.15 有限複体 X と Y が、同じ *Mislin genus* を持つならば L-S の猫の値も同じか？

定義 5.16 $\Lambda\mathrm{wgt}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \ge 0 \,\middle|\, \begin{array}{l} (e^X_m)^* \ :\ K^*(X) \ \to\ K^*(\tilde{P}^m(\Omega X)) \text{ は } \lambda\text{-}rings \\ \text{の間の } split\ mono \end{array} \right\}$

問題 5.17 コンパクト *Lie* 群 G に対して、$\Lambda\mathrm{wgt}(G) = \mathrm{cat}(G) = \mathrm{Cat}(G)$ となるか？

5.3 co-Hopf 空間 = Hopf 空間の双対 = L-S の猫の値が 1 の空間

基点を two-sided homotopy unit とする連続な積を持つ空間を Hopf 空間と言い、またその積を Hopf 構造という。 Hopf 空間に支配された空間はまた Hopf 空間であり、従って Lie 群に支配された空間は Hopf 空間である。 特に $SO(8) \approx S^7 \times SO(7)$ であり S^7 は Hopf 空間である。

事実 5.18 連結な *CW* 複体が *Hopf* 構造を持つ為には、適当なループ空間に支配されることが必要十分である。

定理 5.19 (I. James) 連結な *CW* 複体が *Hopf* 構造をもてば、その構造は *two-sided homotopy inversion* をもつ。

定理 5.20 (A. Zabrodsky) 連結な *CW* 複体が *Hopf* 構造をもてば、その構造は *two-sided strict unit* をもつものに取り替えられる。

従って連結 CW 複体では、Hopf 構造を持つことと $\tilde{A}_2$-構造をもつことは同値である。

定理 5.21 (J. F. Adams) 球面 S^n が *Hopf* 構造を持つ為には n が $0, 1, 3, 7$ のいづれかであることが必要十分である。

定理 5.22 (W. Browder) 連結な有限 *CW* 複体が *Hopf* 構造をもてば、その空間はいくつかの S^1 と、$H^1 = 0$ を満たす連結な有限 *CW* 複体の直積にホモトピー同値である。

定理 5.23 (J. Hubbuck) 連結な有限 *CW* 複体が *homotopy abelian* な *Hopf* 構造をもてば、その空間は適当な次元の *torus* にホモトピー同値である。

定理 5.24 (J. Lin, R. Kane) 単連結な有限 *CW* 複体 X が *Hopf* 構造を持てば、そのループ空間 ΩX はホモロジー群に *torsion* 元を持たない。 さらに X は複素 K 群にも *torsion* 元を持たない。

予想 1 連結 *CW* 複体では、A_m-形式を持つことと $\tilde{A}_m$-形式をもつことは、*up to homotopy* で同値である。

基点を two-sided homotopy unit とする連続な co-積を持つ空間を co-Hopf 空間と言い、またその co-積を co-Hopf 構造という。 するとやはり co-Hopf 空間に支配された空間はまた co-Hopf 空間である。 従って懸垂空間に支配された空間は co-Hopf 空間である。

さて、上記の諸事実の双対はどうなるのであろうか？

定理 5.25 (Ganea) 連結な *CW* 複体が *co-Hopf* 構造を持つ為には、適当な懸垂空間に支配される

ことが必要十分である。

問題 5.26 連結な CW 複体が *co-Hopf* 構造を持てば、その空間は *homotopy inversion* をもつ *co-Hopf* 構造を持つだろうか？

事実 5.27 自明でない連結な CW 複体の *co-Hopf* 構造は *strict unit* を決してもたない。

事実 5.28 *co-Hopf* 構造と *Hopf* 構造を共に持つ空間には S^1, S^3, S^7 があり、これらに限る。

問題 5.29 連結な CW 複体が *co-Hopf* 構造を持てば、その空間はいくつかの S^1 と、$\pi_1 = 0$ を満たす連結な有限 CW 複体の一点和にホモトピー同値だろうか？

最後の問題 5.29 は、その肯定的な解答が期待され co-Hopf 空間に関する Ganea 予想と呼ばれ、問題 5.26 と問題 5.29 は同値であることが直ちに分かる。

定理 5.30 (Berstein-Dror, Hilton-Mislin-Roitberg) 上記の問題 *5.26* と問題 *5.29* は、*co-Hopf* 構造についての適当な（結合性などの）条件のもとで成立する。

定理 5.31 (Henn, Hubbuck-I) いかなる素数 $p \geq 0$ に対しても、上記の問題 *5.26* と問題 *5.29* は、*almost* p-完備な圏で考えれば有限複体に対して成立する。

定義 5.32 *co-Hopf* 空間 X のホモロジー群が次元 1 と $n+1, \cdots, n+r$ (n は自然数) に集中し、$H_{n+r}(\tilde{X})$ がねじれ元を持たないとき、安定次元が r 以下であるという。

定理 5.33 (Saito-Sumi-I, I) 安定次元 2 までの連結な CW 複体が *co-Hopf* 構造を持てば、問題 *5.26* と問題 *5.29* は成立するが、安定次元 5 の連結な CW 複体でこれらを満たさないものが存在する。ただし、安定次元 3 と 4 については不明である。