Lusternik-Schnirelmann カテゴリ数
と
位相的複雑さ

岩 瀬　則 夫 (九大数理)

はじめに

第 0 章　　はじめに

1 ロボット動作設計と位相的複雑さ

1.1 ロボット動作設計

固定された点（原点）から自由な端点へ伸びる Robot Arm が $n{-}1$ 個の完全に自由に動く節を持つとき、その状態の全体は、数学的には原点から続く $n{+}1$ 個の点列で、隣り合う点が一定の距離 $r_1 > 0, \cdots, r_n > 0$ にある点列のなす、次の配置空間（configuration space）B と見なされる。

$$B = \left\{(x_0, x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}^k)^{n+1} \middle| x_0 = 0, |x_i - x_{i-1}| = r_i, 1 \leq i \leq n\right\}$$

例えば $k = 2$ の場合、これは平面上の点列についての配置空間となり、

$$T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1 \qquad (n \text{ 個の } S^1 \text{ の直積})$$

と同相になる。また $k = 3$ の場合は 3 次元空間内の点列についての配置空間となり、

$$S^2 \times S^2 \times \cdots \times S^2 \qquad (n \text{ 個の } S^2 \text{ の直積})$$

と同相になる。さて、Robot Arm の二つの状態の間の動作は、配置空間 B の中の道 — path — と考えることができる。このような Robot Arm の動作をロボット動作 (Robot Motion) と呼び、その為の設計アルゴリズムをロボット動作設計 (Robot Motion Planning) などということがある。このロボット動作は数学的には閉区間 $[0, 1]$ から B への連続写像とみなされる。そのような閉区間 $[0, 1]$ から B への連続写像全体を $\mathcal{P}(B)$ で表すと、後で見るように $\mathcal{P}(B)$ は自然に位相空間の構造を持ち、以下のような Serre による path fibration π が付随する：

$$\pi : \mathcal{P}(B) \longrightarrow B{\times}B, \quad \pi(\ell) = (\ell(0), \ell(1)).$$

2003 年に M. Farber [38] は、Robot Arm の状態間の動作を与える設計アルゴリズムの定義を提案した：それは最初と最後の二つの状態が任意に与えられたときに、それらを繋ぐ Robot Arm の動作を与えるものであり、数学的には $B{\times}B$ から $\mathcal{P}(B)$ への連続写像 $s : B{\times}B \to \mathcal{P}(B)$ で $s(b)(0) \in B$ と $s(b)(1) \in B$ が各々与えられた最初と最後の Robot Arm の状態となるものである。言い換えれば、

$$s : B{\times}B \longrightarrow \mathcal{P}(B) \text{ は fibration } \pi : \mathcal{P}(B) \longrightarrow B{\times}B \text{ の section である。}$$

さて、M. Farber は同時に次のような問題を提出した：

与えられた二つの状態間を動作する設計アルゴリズムは存在するのか？

これに対して Farber 自身の与えた解答は次のように述べられる：

定理 1.1 **単一の設計アルゴリズムが存在するには配置空間が可縮である事が必要かつ十分である。**

すなわち、可縮でない十分に複雑な配置空間においては、単一の設計アルゴリズムによってはすべての Robot Arm の動作をカバーする事はできないのである。Farber は、さらに次の問題を提出した：

全ての状態をカバーするにはいくつのアルゴリズムが必要になるのか？

これはいわゆる L–S カテゴリ数（L–S の猫）とは少し違うものの、思想的にかなり同質な問題提起を含む、空間の複雑さを測る不変量を与えることが知られている。

数学的には、配置空間が多面体の構造を持つなどの「良い空間」であれば次に述べる Schwartz genus（後に James により sectional category と呼ばれることになる）という不変量により記述される：

定義 1.2 (**Schwartz**) **ファイバー空間** $p: E \to X$ **の位相不変量** $\mathrm{Genus}(p) = \mathrm{secat}(p) + 1$ **とは、以下の条件を満たす最小の自然数** $m \geq 1$**(もし無ければ** $m = \infty$ **とする)のことである：空間** X **の** m **個の開集合からなる族が** X **を覆い、各々の開集合上で** p **の** *section* **が存在する。**

定義 1.3 (Farber [39]) **空間** B **の '位相的複雑さ** *(Topological Complexity)*' $\mathcal{TC}(B)$ **とは、**π **の** *Schwartz genus* $\mathrm{Genus}(\pi)$ **のことである。**

注 1.4 **小論では** *sectional category* **の定義としていわゆる** *normalize* **したものを考える為に、***Schwartz genus* **とは** 1 **ずれることになり、**$\mathcal{TC}(B) = \mathrm{Genus}(\pi) = \mathrm{secat}(\pi) + 1$ **となる。小論ではさらに、**$\mathrm{tc}(B) = \mathrm{secat}(\pi)$ **とおく。このとき定義から** $\mathcal{TC}(B) = \mathrm{tc}(B) + 1$ **が成立する。**

1.2 対称動作設計と単位動作設計

さらに 2006 年には, Farber [39] はもう少し強い '動作設計 (Motion Planning)' を提唱し、'対称動作設計 (Symmetric Motion Planning)' と呼んだ。これは original の Robot Motion を与える section s_i に次の 2 条件を課すものである：

(M) もし最初と最後の状態が同じなら、その状態遷移は静止したものである。

(S) 最初と最後の状態を入替えた場合、状態遷移は元の状態遷移の逆になる。

実はごく最近になって個人的な興味からこのロボット動作設計を勉強し、その過程でむしろ次のような、通常の動作設計と対称動作設計のちょうど中間に位置する動作設計が一つの安定な概念 — ‘単位動作設計 (Monoidal Motion Planning)’ として提出可能であることに気がついた：

定義 1.5 **与えられた空間** B **に対して、‘単位位相的複雑さ** *(Monoidal Topological Complexity)’* $\mathcal{TC}^{\mathrm{M}}(B)$ **とは、以下の条件を満たす最小の自然数** $m \geq 1$ **(もし無ければ** $m=\infty$ **とする) のことである：積空間** $B{\times}B$ **の** m **個の開集合からなる族** $U_i \supset \Delta(B)$ **が** $B{\times}B$ **を覆い、各々の開集合上で** *Serre path fibration* $\pi : \mathcal{P}(B) \to B{\times}B$ **の** *section* $s_i : U_i \to \mathcal{P}(B)$ **が存在すし、任意の** $b \in B$ **に対して条件** $s_i(b,b) = c_b$ **(**c_b **は** b **で静止する道** — *constant path at* b**) を満たす。**

実は、単位位相的複雑さという位相不変量は通常の意味ではホモトピー不変量ではない。また 2006 年以後、L–S 理論との類似から、次のような位相的複雑さに対する不変量が導入された：

定義 1.6 (**Farber [38, 39] and Farber-Grant [40]**) **位相空間** B **と単位的環** $R \ni 1$ **に対して定義されるイデアル** $I_R = \ker\Delta^* : H^*(B{\times}B, R) \to H^*(B;R)$ **に対する二つの不変量、***zero-divisors cup-length* $\mathcal{Z}_{\mathrm{R}}(B)$ **と** *TC-weight* $\mathrm{wgt}_\pi(u;R)$ *for* $u \in I_R$ **が次のように定義される。**

(1) (Farber) $\mathcal{Z}_{\mathrm{R}}(B) = \mathrm{Max}\,\{m{\geq}0 | H^*(B{\times}B, R) \supset I_R^m \neq 0\}$

(2) (Farber-Grant) $\mathrm{wgt}_\pi(u;R) = \mathrm{Max}\left\{m{\geq}0 \middle| \forall_{f:Y\to B\times B,\ \mathrm{secat}(f^*\pi)<m}\ f^*(u)=0\right\}$

これらの不変量は L–S 理論における同様な不変量である cup-length と category weight の変位形として定義されたものである。小論では、この L–S 理論について反省してみることで、最近の L–S 理論の成果をロボット動作設計の位相的複雑さという新しい理論に結びつけられる可能性を探りたい。

2 圏論から

2.1 圏と双対圏

二つのクラス $\mathcal{O}$ と $\mathcal{M}$ の組 $\underline{\mathcal{C}} = (\mathcal{O}, \mathcal{M})$ が圏であるとは次の四条件が成立することであり、クラス $\mathcal{O}$ の要素は圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の対象と呼ばれ $\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}$ と、クラス $\mathcal{M}$ の要素は圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の射と呼ばれ $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}$ と表される：

(A1) 一意な対応 $I : \mathcal{O} \to \mathcal{M}$ が存在する。 — 対象の恒等射

(A2) 二つの一意な対応 $S, T : \mathcal{M} \to \mathcal{O}$ が存在する。 — 射の定義域と値域

(A3) 新たなクラス $\mathcal{M}\times_{\mathcal{O}}\mathcal{M}$ を圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の二つの射 g, f の順序対 (g, f) で $S(g) = T(f)$ を満たすもの全体のなすクラスとするとき、一意な対応 $C : \mathcal{M}\times_{\mathcal{O}}\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ が存在する。 — 合成射

(A4) (1) $SI(X) = TI(X) = X$ — 対象 X の恒等射の定義域と値域は X 自身

(2) $SC(g, f) = S(f), TC(g, f) = T(g)$ — $g\circ f$ の定義域は f の定義域で、値域は g の値域

(3) $C(f, IS(f)) = C(IT(f), f) = f$ — 恒等射と合成射を作っても変わらない

(4) $C(h, C(g, f)) = C(C(h, g), f)$ — 三つの射の合成射は、合成射の作り方によらない

(A5) 圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の二つのいかなる対象 X, Y に対しても、対象 X を定義域とし対象 Y を値域とする射全体のなすクラス $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X, Y)$ は集合である。 — 局所小

注 2.1 圏 $\underline{\mathcal{C}} = (\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}, \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}})$ に対して、$I_{\underline{\mathcal{C}}} = I, S_{\underline{\mathcal{C}}} = S, T_{\underline{\mathcal{C}}} = T, C_{\underline{\mathcal{C}}} = C$ を圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の構造と呼ぶ。

与えられた圏 $\underline{\mathcal{C}} = (\mathcal{O}(\underline{\mathcal{C}}), \mathcal{M}(\underline{\mathcal{C}}))$ に対して、その構造 $I_{\underline{\mathcal{C}}}, S_{\underline{\mathcal{C}}}, T_{\underline{\mathcal{C}}}, C_{\underline{\mathcal{C}}}$ をとる。 そこで $\mathcal{O}(\underline{\mathcal{C}}^o) = \mathcal{O}(\underline{\mathcal{C}})$、$\mathcal{M}(\underline{\mathcal{C}}^o) = \mathcal{M}(\underline{\mathcal{C}})$ とし、その構造を $I_{\underline{\mathcal{C}}^o} = I_{\underline{\mathcal{C}}}, S_{\underline{\mathcal{C}}^o} = T_{\underline{\mathcal{C}}}, T_{\underline{\mathcal{C}}^o} = S_{\underline{\mathcal{C}}}, C_{\underline{\mathcal{C}}^o} = C_{\underline{\mathcal{C}}}\circ t$ とする。 ただし、$t : \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}\times_{\mathcal{O}}\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}\times_{\mathcal{O}}\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}$ は $t(f, g) = (g, f)$ により与えられる対応である。

問 2.2 圏 $\underline{\mathcal{C}}$ に対して、$\underline{\mathcal{C}}^o$ も圏となることを示せ。 この圏 $\underline{\mathcal{C}}^o$ を圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の双対圏という。

例えば $\mathcal{O}$ を集合全体のクラス、$\mathcal{M}$ を写像全体のクラスをとれば、それらの組は圏をなす。 ここではこれを集合の圏と呼び記号 $\underline{\mathcal{S}}$ で表し、弱 Hausdorff 空間と連続写像のなす圏を記号 $\underline{\mathcal{T}}$ で表し、また群と準同型のなす圏を記号 $\underline{\mathcal{G}}$ で、さらにアーベル群と準同型のなす圏を記号 $\underline{\mathcal{A}}$ で表す。

問 2.3 圏 $\underline{\mathcal{S}}, \underline{\mathcal{T}}, \underline{\mathcal{G}}, \underline{\mathcal{A}}$ が実際に圏をなすことを示せ。

2.2 関手と自然変換

二つの圏 $\underline{\mathcal{C}}, \underline{\mathcal{D}}$ に対して、二つの対応 $F_{\mathcal{O}} : \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{D}}}, F_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}$ の組 $F = (F_{\mathcal{O}}, F_{\mathcal{M}}) : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{D}}$ が共変関手であるとは、次の三条件が成立することである：

(B1) $F_{\mathcal{M}}(I_{\underline{\mathcal{C}}}(X)) = I_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(X))$ — 対象 X の恒等射の像は恒等射

(B2) (1) $F_{\mathcal{O}}(S_{\underline{\mathcal{C}}}(f)) = S_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{M}}(f))$ — 射 f の定義域の像は射 f の像の定義域

(2) $F_{\mathcal{O}}(T_{\underline{\mathcal{C}}}(f)) = T_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{M}}(f))$ — 射 f の値域の像は射 f の像の値域

(B3) $F_{\mathcal{M}}(g\circ f) = F_{\mathcal{M}}(g)\circ F_{\mathcal{M}}(f)$ — 射 g, f の合成射の像は射 g, f の像の合成射

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\
Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}
\qquad => \qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, "F(g\circ f)=F(g)\circ F(f)"] & \\
F(Y) \arrow[r, "F(g)"'] & F(Z)
\end{tikzcd}
$$

同様に次の三条件が成立するとき、$F=(F_{\mathcal{O}},F_{\mathcal{M}}):\underline{\mathcal{C}}\to\underline{\mathcal{D}}$ を反変関手と呼ぶ：

(B1^o) $F_{\mathcal{M}}(I_{\underline{\mathcal{C}}}(X))=I_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(X))$ — 対象 X の恒等射の像は恒等射

(B2^o) (1) $F_{\mathcal{O}}(S_{\underline{\mathcal{C}}}(f))=T_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{M}}(f))$ — 射 f の定義域の像は射 f の像の値域

(2) $F_{\mathcal{O}}(T_{\underline{\mathcal{C}}}(f))=S_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{M}}(f))$ — 射 f の値域の像は射 f の像の定義域

(B3^o) $F_{\mathcal{M}}(g\circ f)=F_{\mathcal{M}}(f)\circ F_{\mathcal{M}}(g)$ — 射 g,f の合成射の像は射 f,g の像の合成射

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\
Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}
\qquad => \qquad
\begin{tikzcd}
F(X) & \\
F(Y) \arrow[u, "F(f)"] & F(Z) \arrow[l, "F(g)"] \arrow[ul, "F(g\circ f)=F(f)\circ F(g)"']
\end{tikzcd}
$$

例えばホモロジー群は圏 $\underline{\mathcal{T}}$ から圏 $\underline{\mathcal{A}}$ への共変関手であり、コホモロジー群は反変関手である。　また自然な忘却関手 $\mathcal{E}^{\mathcal{S}}=1_{\underline{\mathcal{S}}}:\underline{\mathcal{S}}\to\underline{\mathcal{S}}, \mathcal{E}^{\mathcal{T}}:\underline{\mathcal{T}}\to\underline{\mathcal{S}}, \mathcal{E}^{\mathcal{G}}:\underline{\mathcal{G}}\to\underline{\mathcal{S}}, \mathcal{E}^{\mathcal{A}}:\underline{\mathcal{A}}\to\underline{\mathcal{S}}$ は共変関手である。

定義 2.4 **特に** $F_{\mathcal{O}}$ **が単射であるとき、関手** F **を忠実** *(faithful)* **と呼ぶ。**

問 2.5 **反変関手** $F:\underline{\mathcal{C}}\to\underline{\mathcal{D}}$ **は自然に双対圏** $\underline{\mathcal{C}}^o$ **から圏** $\underline{\mathcal{D}}$ **への共変関手と見なせることを示せ。**

問 2.6 **対象** $X,Y\in\underline{\mathcal{C}}$ **に対して集合** $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y)$ **を対応させ、関手** $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}:\underline{\mathcal{C}}^o\times\underline{\mathcal{C}}\to\underline{\mathcal{S}}$ **を定義せよ。**

これ以後、文脈から紛れの無い限り共変関手を単に関手と呼び、反変関手は双対圏からの共変関手として扱うことがある。

関手 $F,G:\underline{\mathcal{C}}\to\underline{\mathcal{D}}$ に対し、自然変換 $\Phi:F\to G$ とは次を満たす対応 $\Phi:\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\to\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}$ である：

(C1) 圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の対象 X に対して、$S(\Phi(X))=F(X)$ かつ $T(\Phi(X))=G(X)$ が成立する。

(C2) 圏 $\underline{\mathcal{C}}$ の射 f に対して、$C_{\underline{\mathcal{D}}}(\Phi(T_{\underline{\mathcal{C}}}(f)),F(f))=C_{\underline{\mathcal{D}}}(G(f),\Phi(S_{\underline{\mathcal{C}}}(f))$ が成立する。

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] \\
Y
\end{tikzcd}
\qquad => \qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\Phi(X)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\Phi(Y)"'] & G(Y)
\end{tikzcd}
$$

注 2.7 関手 F, G は、自然変換 $\Phi : F \to G$ で $\Phi(X)$ が常に同型となるものが存在するとき自然同値であると呼ばれる。またこのような Φ が自然同値と呼ばれることもある。

定義 2.8 関手 $F : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{D}}$ が $G : \underline{\mathcal{D}} \to \underline{\mathcal{C}}$ の右随伴関手とは $\underline{\mathcal{D}}^o \times \underline{\mathcal{C}}$ から $\underline{\mathcal{S}}$ への関手 $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(G(X), Y)$ と $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}(X, F(Y))$ が自然同値であることである。 このとき、G は F の左随伴関手と呼ばれる。

2.3 豊穣圏 — 強化された圏 (enriched category)

局所小圏 $\underline{\mathcal{C}}$ に於いて、合成 $\mathcal{C}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y,Z) : \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(Y,Z) \times \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Z)$ は、対応 $\mathcal{C}_{\underline{\mathcal{C}}} : \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{S}}}$ と、恒等射 $\mathcal{I}_{\underline{\mathcal{C}}}(X) : \{*\} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,X)$ は対応 $\mathcal{I}_{\underline{\mathcal{C}}} : \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{S}}}$ を与えると考える。 （単位元を 1 とする）結合的な積を持つ圏 $\underline{\mathcal{R}}$ と、単位元と直積を保つ共変関手 $\mathcal{E}^{\mathcal{R}} : \underline{\mathcal{R}} \to \underline{\mathcal{S}}$ に対して、局所小圏 $\underline{\mathcal{C}}$ が <u>$\mathcal{E}^{\mathcal{R}}$ で $\underline{\mathcal{R}}$ まで強化された圏</u> (豊穣圏) であるとは次の条件が成立することである：

(A5) $\mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}} : \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{R}}}$, $\mathcal{C}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}} : \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{R}}}$, $\mathcal{I}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}} : \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{R}}}$ が存在し次を満たす。

(1) $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}} = \mathcal{E}^{\mathcal{R}}_{\mathcal{O}} \circ \mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}, \mathcal{C}_{\underline{\mathcal{C}}} = \mathcal{E}^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}} \circ \mathcal{C}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}$ かつ $\mathcal{I}_{\underline{\mathcal{C}}} = \mathcal{E}^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}} \circ \mathcal{I}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}$

(2) $\mathcal{C}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y,Z) : \mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(Y,Z) \times \mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \to \mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Z)$ は次を満たす：

$$\mathcal{C}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Z,W)(\mathbb{1}_{\mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(Z,W)} \times \mathcal{C}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y,Z)) = \mathcal{C}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y,W)(\mathcal{C}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(Y,Z,W) \times \mathbb{1}_{\mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y)})$$

(3) $\mathcal{I}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X) : 1 \to \mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,X)$ は次を満たす：

$$\mathcal{C}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,X,Y)(\mathbb{1}_{\mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y)} \times \mathcal{I}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X)) = \mathbb{1}_{\mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y)} = \mathcal{C}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y,Y)(\mathcal{I}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(Y) \times \mathbb{1}_{\mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y)})$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{R}}} \arrow[d, "\mathcal{E}^{\mathcal{R}}_{\mathcal{O}}"] \\
\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \arrow[ur, "\mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}"] \arrow[r, "\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}"'] & \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{S}}}
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{R}}} \arrow[d, "\mathcal{E}^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}}"] \\
\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \times \mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \arrow[ur, "\mathcal{C}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}"] \arrow[r, "\mathcal{C}_{\underline{\mathcal{C}}}"'] & \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{S}}}
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{R}}} \arrow[d, "\mathcal{E}^{\mathcal{R}}_{\mathcal{M}}"] \\
\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}} \arrow[ur, "\mathcal{I}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}"] \arrow[r, "\mathcal{I}_{\underline{\mathcal{C}}}"'] & \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{S}}}
\end{tikzcd}$$

ここで、$\underline{\mathcal{R}}$ まで強化された圏は、$\mathcal{M}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}$, $\mathcal{C}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}$, $\mathcal{I}^{\mathcal{R}}_{\underline{\mathcal{C}}}$ を忘れると通常の圏と見なせることを注意する。

注 2.9 忘却関手 $\mathcal{E}^{\mathcal{T}} : \underline{\mathcal{T}} \to \underline{\mathcal{S}}$ で位相空間の圏 $\underline{\mathcal{T}}$ まで強化された圏は、<u>位相圏</u>と呼ばれる。

問 2.10 アーベル群の圏 $\underline{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{E}^{\mathcal{A}} : \underline{\mathcal{A}} \to \underline{\mathcal{S}}$ で $\underline{\mathcal{A}}$ まで強化された圏であることを示せ。

次に圏 $\underline{\mathcal{C}}, \underline{\mathcal{D}}$ が $\mathcal{E}^{\mathcal{R}} : \underline{\mathcal{R}} \to \underline{\mathcal{S}}$ で $\underline{\mathcal{R}}$ まで強化された圏のとき、その間の関手には、いかなる条件が付随すべきであろうか？ まず $F = (F_{\mathcal{O}}, F_{\mathcal{M}})$ が通常の意味で圏 $\underline{\mathcal{C}}$ から圏 $\underline{\mathcal{D}}$ への共変関手であったとする。 このとき、圏 $\underline{\mathcal{C}}$ のいかなる二つの対象 X, Y に対しても、$F_{\mathcal{M}}$ は写像 $F_{\mathcal{M}}(X,Y) : \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \to \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(X), F_{\mathcal{O}}(Y))$

を誘導し、対応 $F_{\mathcal{M}}:\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\times\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\to\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{S}}}$ を与える。　さて F が次の条件を満たすとき、$\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}:\underline{\mathcal{R}}\to\underline{\mathcal{S}}$ で強化された構造を保つ共変関手である呼ぶ：

(B4) 対応 $F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}:\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\times\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\to\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{R}}}$ が存在し次が成立する。

(1) $F_{\mathcal{M}}=\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}\circ F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}$ かつ $F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}(X,Y):\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y)\to\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(X),F_{\mathcal{O}}(Y))$

(2) $F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}(X,Z)\circ\mathcal{C}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y,Z)=\mathcal{C}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(X),F_{\mathcal{O}}(Y),F_{\mathcal{O}}(Z))\circ(F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}(Y,Z)\times F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}(X,Y))$

(3) $F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}(X,X)\circ\mathcal{I}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X)=\mathcal{I}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{D}}}\circ F_{\mathcal{O}}(X)$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \arrow[rr, "F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}(X,Y)"] \arrow[dd, dotted, "\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{O}}"'] & {} \arrow[dd, dotted, "\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}"'] & \mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(X),F_{\mathcal{O}}(Y)) \arrow[dd, dotted, "\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{O}}"'] & \text{in } \underline{\mathcal{R}} \\
\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\ni(X,Y) \arrow[ur, dotted, "F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}"] \arrow[dr, dotted, "F_{\mathcal{M}}"'] & & & & \\
 & \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \arrow[rr, "F_{\mathcal{M}}(X,Y)"'] & {} & \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(X),F_{\mathcal{O}}(Y)) & \text{in } \underline{\mathcal{S}}
\end{tikzcd}
$$

同様に $F=(F_{\mathcal{O}},F_{\mathcal{M}})$ が通常の意味で圏 $\underline{\mathcal{C}}$ から圏 $\underline{\mathcal{D}}$ への反変関手であったとする。　このとき、圏 $\underline{\mathcal{C}}$ のいかなる二つの対象 X,Y に対しても、$F_{\mathcal{M}}$ は写像 $F_{\mathcal{M}}(X,Y):\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y)\to\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(Y),F_{\mathcal{O}}(X))$ を誘導し、対応 $F_{\mathcal{M}}:\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}\to\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}\circ(F_{\mathcal{O}}\times F_{\mathcal{O}})\circ\tau$ を与える。　ただし、$\tau(X,Y)=(Y,X)$ である。　そこで F が次の条件を満たすとき、$\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}:\underline{\mathcal{R}}\to\underline{\mathcal{S}}$ で強化された構造を保つ反変関手であるとよぶ：

(B4^o) 対応 $F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}:\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\times\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\to\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{R}}}$ が存在し次が成立する。

(1) $F_{\mathcal{M}}=\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}\circ F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}$ かつ $F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}(X,Y):\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y)\to\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(Y),F_{\mathcal{O}}(X))$

(2) $F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}(X,Z)\circ\mathcal{C}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y,Z)=\mathcal{C}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(Z),F_{\mathcal{O}}(Y),F_{\mathcal{O}}(X))\circ(F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}(X,Y)\times F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}(Y,Z))$

(3) $F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}(X,X)\circ\mathcal{I}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X)=\mathcal{I}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{D}}}\circ F_{\mathcal{O}}(X)$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \arrow[rr, "F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}(X,Y)"] \arrow[dd, dotted, "\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{O}}"'] & {} \arrow[dd, dotted, "\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}"'] & \mathcal{M}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(Y),F_{\mathcal{O}}(X)) \arrow[dd, dotted, "\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{O}}"'] & \text{in } \underline{\mathcal{R}} \\
\mathcal{O}_{\underline{\mathcal{C}}}\ni(X,Y) \arrow[ur, dotted, "F^{\underline{\mathcal{R}}}_{\mathcal{M}}"] \arrow[dr, dotted, "F_{\mathcal{M}}"'] & & & & \\
 & \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) \arrow[rr, "F_{\mathcal{M}}(X,Y)"'] & {} & \mathcal{M}_{\underline{\mathcal{D}}}(F_{\mathcal{O}}(Y),F_{\mathcal{O}}(X)) & \text{in } \underline{\mathcal{S}}
\end{tikzcd}
$$

特に強化された構造を保つ反変関手は、双対圏からの強化された構造を保つ共変関手とみなせる。

問 2.11 強化された構造を保つ関手の間の<u>強化された構造を保つ自然変換</u>の定義を与えよ。

3 位相空間論から

3.1 位相空間の基礎

集合 X に対し、次の公理系を満たす部分集合族 $Top(X)$ (開集合族) が与えられているとき、組 $(X, Top(X))$ を単に X で表し、位相空間と呼ぶ。

(T1) $\emptyset \in Top(X)$ かつ $X \in Top(X)$ である。

(T2) $Top(X)$ の任意の有限部分族 $\{O_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ に対し $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in Top(X)$ である。

(T3) $Top(X)$ の任意の部分族 $\{O_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ に対し $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in Top(X)$ である。

位相空間 X に対して、次の条件を満たす部分集合族 $\mathcal{U}$ を X の「準開基」と呼ぶ。

(準開基) 任意の点 $x \in X$ と任意の開集合 $O \subseteq X$ に対して $x \in O$ ならば、$\mathcal{U}$ の有限部分族 $\{U_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ が存在して $x \in \bigcap_\lambda U_\lambda \subseteq O$ を満たす。

また部分集合と (同値関係 $\sim$ による) 商集合の位相は次のように与えられる。

(相対位相) $A \overset{i}{\hookrightarrow} i(A) \subseteq X$ のとき、位相 $Top(A) = \{i^{-1}(O)\,|\,O \in Top(X)\}$ を A に導入する。

(等化位相) $Y \overset{p}{\twoheadrightarrow} Y/\sim = B$ のとき、位相 $Top(B) = \{O\,|\,p^{-1}(O) \in Top(Y)\}$ を B に導入する。

また $K \subseteq X$ がコンパクトとは、次の性質が満たされることである：

(compact) $Top(X)$ の任意の部分族 $\{O_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ に対し、$K \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ ならば Λ の有限部分集合 $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subseteq \Lambda$ で $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n O_{\lambda_i}$ を満たすものが取れる。

さて、位相空間には様々な分離公理が考えられるが、ここでは次の弱 Hausdorff 性を採用する：

(弱 Hausdorff) 任意のコンパクト部分集合は相対位相に関して Hausdorff 空間となる。

演習 3.1 **弱 *Hausdorff* 空間の任意のコンパクト集合が閉集合となることを示せ。**

さらに、空間 X から Y への連続写像の全体 $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(X,Y)$ に位相を導入し、$\mathcal{M}_{\mathcal{T}}^{\mathcal{T}}(X,Y)$ で表す：

(CO) 部分集合族 $\mathcal{U} = \{W(C,O) \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(X,Y)\,;\,C$ は X のコンパクト集合で O は Y の開集合$\}$ を $W(C,O) = \{f : X \to Y\,;\,f(C) \subseteq U\}$ により定め、$\mathcal{U}$ を準開基とする位相を導入する。

演習 3.2 *$X \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト集合とし、$Y = \mathbb{R}^m$ とするとき、上の compact-open 位相が* sup *ノルムによる位相に一致することを示せ。*

演習 3.3 *コンパクトな位相空間から弱 Hausdorff 空間への全単射は同相写像であることを示せ。*

3.2 コンパクト生成空間

すべての弱 Hausdorff 空間は、コンパクト生成位相を持つものにコンパクト集合族を変更せずに取り換えることができ、従って、この変更でホモトピー群や (コ) ホモロジー群は不変に保たれる。

定義 3.4 *弱 Hausdorff 空間 X がコンパクト生成であるとは、次の条件が満たされることである。*

(CG) *位相空間 X の部分集合 A が閉集合である為には、任意のコンパクト集合 C に対して $A \cap C$ がコンパクトであることが必要十分である。*

コンパクト生成空間はk-space とも呼ばれ、よく知られているように、任意のコンパクト集合が閉集合となる。　ここでは、(弱 Hausdorff) コンパクト生成空間と連続写像のなす圏を $\underline{K}$ で表す。

演習 3.5 *(1) 局所コンパクトな弱 Hausdorff 空間がコンパクト生成空間であることを示せ。*

(2) 第一加算公理を満たす Hausdorff 空間はコンパクト生成空間であることを示せ。　特に距離空間はコンパクト生成空間である。

さて、前節の compact-open 位相により写像空間はめでたく位相空間 $\mathcal{M}^{\mathcal{T}}_{\underline{\mathcal{T}}}(X,Y)$ となり、圏 $\underline{\mathcal{T}}$ は $\mathcal{E}^{\mathcal{T}} : \underline{\mathcal{T}} \to \underline{\mathcal{S}}$ で $\underline{\mathcal{T}}$ まで強化されたのだが、残念ながらこのままでは圏論的には良い構造とは言えない：例えば $\mathcal{M}^{\mathcal{T}}_{\underline{\mathcal{T}}}(X, \mathcal{M}^{\mathcal{T}}_{\underline{\mathcal{T}}}(Y,Z))$ と $\mathcal{M}^{\mathcal{T}}_{\underline{\mathcal{T}}}(X \times_{\mathcal{T}} Y, Z)$ は同相になるとは限らない。　ただし、$X \times_{\mathcal{T}} Y$ は直積集合 $X \times Y$ に通常の直積位相により位相空間の構造を入れたものである。　つまり、写像空間を作る関手と直積をとる関手が随伴関手にならないという致命的な欠陥を持つ。　そこで、次のような標準的なコンパクト生成位相を与える共変関手を定義する。

定義 3.6 *共変関手 $c : \underline{\mathcal{T}} \to \underline{K}$ を次で定める：*

(1) $X = (X, Top(X))$ に対して $c(X) = (X, \widehat{Top(X)})$ とする。　ただし

(2) $O \in \widehat{Top(X)} \iff$ 任意のコンパクト集合 C に対して $(X \smallsetminus O) \cap C$ はまたコンパクトである。

このとき、$f : \underline{K} \to \underline{\mathcal{T}}$ を忘却関手、$k = f \circ c$ として次の命題 (証明しない) が成立する。

命題 3.7 *(1)* 弱 *Hausdorff* 空間 X がコンパクト生成なら、$k(X) = X$ である。

(2) 任意の弱 *Hausdorff* 空間 X に対して、$k(X)$ はコンパクト生成空間である。

(3) コンパクト生成空間 X, Y に対して $\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{K}}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X,Y) = c(\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{T}}}_{\underline{\mathcal{T}}}(f(X), f(Y)))$ とおくと、圏 $\underline{\mathcal{K}}$ は忘却関手 $\mathcal{E}^{\underline{\mathcal{K}}} : \underline{\mathcal{K}} \to \underline{\mathcal{S}}$ で $\underline{\mathcal{K}}$ まで強化された圏となる。

(4) 任意のコンパクト生成空間 X と弱 *Hausdorff* 空間 Y に対して、$\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{K}}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X, c(Y))$ と $\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{T}}}_{\underline{\mathcal{T}}}(f(X), Y)$ は自然に同相となる。 従って、関手 c は関手 f の右随伴関手である。

次に、直積は $X \times_{\underline{\mathcal{K}}} Y = c(f(X) \times_{\underline{\mathcal{T}}} f(Y))$ と $g \times_{\underline{\mathcal{K}}} h = c(f(g) \times_{\underline{\mathcal{T}}} f(h))$ により定義され次を満たす。

命題 3.8 *(1)* 直積空間 $X \times_{\underline{\mathcal{K}}} Y$ は、圏論的な意味での圏 $\underline{\mathcal{K}}$ での「直積」を与える。

(2) 自然な同相により、直積空間 $X \times_{\underline{\mathcal{K}}} Y$ は可換かつ結合的と見なせる。

(3) 任意の局所コンパクトな *Hausdorff* 空間と任意のコンパクト生成空間に対して、$X \times_{\underline{\mathcal{K}}} Y$ は通常の直積空間 $X \times_{\underline{\mathcal{T}}} Y$ に一致する。

圏 $\underline{\mathcal{K}}$ において、$i : A \to X$ が「中への同相」とは、「i が単射かつ X から定まる A の相対位相がコンパクト生成空間 A の位相と一致」することである。 また $p : Y \twoheadrightarrow B$ が「商写像」とは、「p が全射かつ Y から定まる B の等化位相がコンパクト生成空間 B の位相と一致」することである。

命題 3.9 *(1)* コンパクト生成空間の閉集合や正則開集合の包含写像は、中への同相である。

(2) コンパクト生成空間 Y からの全射 $p : Y \to B$ が任意のコンパクト集合 $C \subseteq Y$ に対して $p^{-1}(p(C))$ を Y の閉集合とすれば、p は商写像となる。

(3) 圏 $\underline{\mathcal{K}}$ での中への同相 $i : A \to X, i' : A' \to X'$ に対し、$i \times_{\underline{\mathcal{K}}} i' : A \times_{\underline{\mathcal{K}}} A' \to X \times_{\underline{\mathcal{K}}} X'$ もそうなる。

(4) 圏 $\underline{\mathcal{K}}$ での商写像 $p : Y \twoheadrightarrow B, p' : Y' \twoheadrightarrow B'$ に対し、$p \times_{\underline{\mathcal{K}}} p' : Y \times_{\underline{\mathcal{K}}} Y' \twoheadrightarrow B \times_{\underline{\mathcal{K}}} B'$ もそうなる。

最後に、写像空間と直積の関係 — 指数法則に話を戻す。

命題 3.10 *(1)* 圏 $\underline{\mathcal{K}}$ の中で、$\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{K}}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X, Y \times_{\underline{\mathcal{K}}} Z)$ と $\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{K}}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X,Y) \times_{\underline{\mathcal{K}}} \mathcal{M}^{\underline{\mathcal{K}}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X,Z)$ は自然に同相である。

(2) 圏 $\underline{\mathcal{K}}$ の中で、代入写像 $e : \mathcal{M}^{\underline{\mathcal{K}}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X,Y) \times_{\underline{\mathcal{K}}} X \to Y$ $(e(f,x) = f(x))$ は常に連続である。

(3) 圏 $\underline{\mathcal{K}}$ の中で、$\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{K}}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X \times_{\underline{\mathcal{K}}} Y, Z)$ と $\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{K}}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X, \mathcal{M}^{\underline{\mathcal{K}}}_{\underline{\mathcal{K}}}(Y,Z))$ は自然に同相である。

系 3.10.1 関手 $\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{K}}}_{\underline{\mathcal{K}}}(Y,\ )$ は関手 $(\ )\times Y$ の右随伴関手である。

コンパクト生成空間の系統的な解説と上記の各命題の証明は、MacLane [100], Whitehead [152], Hirashima [61] 等を参照されたい。　ただし、[100], [152] では弱 Hausdorff ではなく、Hausdorff の枠組みを用いているが、証明はほぼそのままで、弱 Hausdorff のみを仮定したものに置き換えられる。

小論ではこれ以後特に断らない限り、コンパクト生成空間の圏 $\underline{\mathcal{K}}$ の枠組みの下で進み、紛れの恐れの無い場合には $\mathcal{M}^{\underline{\mathcal{K}}}_{\underline{\mathcal{K}}}$ を $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{K}}}$ あるいは $\mathcal{M}$ と、また $\times_{\underline{\mathcal{K}}}$ を $\times$ と略記することがある。

3.3 連続写像の構成

分かりやすい場所で与えられた連続写像から新たな連続写像を構成することを考える。

閉部分集合有限個の和集合で表される場合： $X=\bigcup_{i=1}^n F_i$ で、F_i が X の閉集合であったとする。　対応 $f: X\to Y$ が有限個の写像の族 $f_i: F_i\to Y$ を用いて $f|_{F_i}=f_i$ により定義されるとき、f が連続写像である必要十分条件が次で与えられる。

(1) 任意の i,j に対して「$f_i|_{F_i\cap F_j}=f_j|_{F_i\cap F_j}$」が成立し、$f$ は一意となる。

(2) 任意の i に対して、写像 f_i は連続である。

開部分集合の和集合で表される場合： 対応 $f: X\to Y$ が写像の族 $f_\lambda: U_\lambda\to Y$ を用いて $f|_{U_\lambda}=f_\lambda$ により定義されるとき、f が連続写像である必要十分条件が次で与えられる。

(1) 任意の λ,μ に対して「$f_\lambda|_{U_\lambda\cap U_\mu}=f_\mu|_{U_\lambda\cap U_\mu}$」が成立し、$f$ は一意となる。

(2) 任意の λ に対して、写像 f_λ は連続である。

商集合として表される場合： 商写像を $p:\widetilde{X}\twoheadrightarrow X$ とし、対応 $f: X\to Y$ が写像 $\widetilde{f}:\widetilde{X}\to Y$ を用いて $f\circ p=\widetilde{f}$ により定義されるとき、対応 f が連続写像である必要十分条件が次で与えられる。

(1) 任意の $a,b\in\widetilde{X}$ に対して「$p(a)=p(b)\implies\widetilde{f}(a)=\widetilde{f}(b)$」が成立し、$f$ は一意となる。

(2) 合成写像 $f\circ p:\widetilde{X}\to Y$ は連続である。

3.4 写像を基点とする基点付き空間の圏

定義 3.11 写像 $\phi: A\to B$ に対して、次で与えられる圏を $\underline{\mathcal{K}}^\phi$ で表し、ϕ 基点付き空間と ϕ 基点付き写像の圏と呼ぶ。

(ϕ 基点付き空間) 写像 $\rho^X : X \to B$ と $\sigma^X : A \to X$ が存在して $\rho^X \circ \sigma^X = \phi$ を満たすとき、組 (ρ^X, σ^X) を ϕ 基点付き空間と呼び、単に $X = (X{:}\phi)$ などと表す。

(ϕ 基点付き写像) 写像 $f : X \to Y$ が ϕ 基点付き空間 X から Y への ϕ 基点付き写像であるとは、条件 $\rho^Y \circ f = \rho^X$ および $f \circ \sigma^X = \sigma^Y$ が成立することである。

ここで、圏 $\underline{\mathcal{K}}^\phi$ においては、組 $(\phi, 1_A)$ の表す対象 $A = (A{:}\phi)$ は始対象であり、組 $(1_B, \phi)$ の表す対象 $B = (B{:}\phi)$ は終対象である。

ϕ 基点付き空間の写像 $i : K \hookrightarrow X$ が空間 X の中への同相であるとき、$(X, K) = (X, K{:}\phi)$ などと表して (ϕ 基点付き) 相対空間あるいは空間対と呼ことがある。

注 3.12 同様に ϕ 基点付き空間の写像 $p : X \twoheadrightarrow K$ が空間 X の商写像であるとき、$X/K = X/_\phi K$ などと表して (ϕ 基点付き) 等化空間あるいは空間商と呼ことがある。

ϕ 基点付き空間の包含関係 $K \cup L \subseteq X$ を三系 $(X; K, L)$ で、あるいは ϕ 基点付き空間の包含関係 $L \subseteq Y \cap K \subseteq Y \cup K \subseteq X$ を ϕ 基点付き空間対の包含関係 $(Y, L) \subseteq (X, K)$ で表す。

定義 3.13 ϕ 基点付き空間対 $(X, K), (X', K')$ に対し、ϕ 基点付き写像 $f : X \to X'$ が ϕ 基点付き対写像とは、$f(K) \subseteq K'$ を満たすことであり、$f : (X, K) \to (X', K')$ で表す。 $\underline{\mathcal{K}}^\phi$ での空間対と対写像のなす圏を $\underline{\mathcal{K}}_2^\phi$ で表す。

圏 $\underline{\mathcal{K}}_2^\phi$ での対写像 $g : (X, K) \to (X', K')$ と $(Y, L) \subseteq (X, K)$ に対して、g の $\underline{\mathcal{K}}_2^\phi$ での (Y, L) への制限を $g|_{(Y,L)} : (Y, L) \to (X', K')$ などと表す。 特に $g|_X$ で $\underline{\mathcal{K}}^\phi$ での写像 $g : X \to X'$ を、$g|_K$ で $\underline{\mathcal{K}}^\phi$ での写像 $g|_K : K \to K'$ を表す。 また $g|_{X \smallsetminus K}$ で $\underline{\mathcal{K}}$ での写像 $g|_{X \smallsetminus K} : X \smallsetminus K \to X' \smallsetminus K'$ を表すことがある。

定義 3.14 $g|_{X \smallsetminus K} : X \smallsetminus K \to X' \smallsetminus K'$ を同相写像とする $g : (X, K) \to (X', K')$ を相対同相と呼ぶ。

定義 3.15 圏 $\underline{\mathcal{K}}^\phi$ の対象 X で特に σ^X が中への同相で、かつ ρ^X が等化写像であるものだけからなる $\underline{\mathcal{K}}^\phi$ の充満部分圏を、ϕ を省略して $\underline{\mathcal{K}}_B^A$ で表すことがある。 特に $A = B$ のとき、圏 $\underline{\mathcal{K}}_B^B$ の対象を B 基点付き空間と、またその間の射を B 基点付き写像と呼ぶことがある。

注 3.16 *(1)* 特に $B = *$ のとき、圏 $\underline{\mathcal{K}}_B^A, \underline{\mathcal{K}}_{B2}^A$ を各々 $\underline{\mathcal{K}}^A, \underline{\mathcal{K}}_2^A$ などと表すことがある。

(2) あるいは特に $A = \emptyset$ のとき、圏 $\underline{\mathcal{K}}_B^A, \underline{\mathcal{K}}_{B2}^A$ を各々 $\underline{\mathcal{K}}_B, \underline{\mathcal{K}}_{B2}$ などで表すことがある。

注 3.17 *(1)* $A = \emptyset$ かつ $B = *$ のとき、$\underline{\mathcal{K}}_*^\emptyset$ や $\underline{\mathcal{K}}_{*2}^\emptyset$ は自然に $\underline{\mathcal{K}}$ あるいは $\underline{\mathcal{K}}_2$ と同一視される。

(2) $A = B = *$ のとき、$\underline{\mathcal{K}}_*^*$ や $\underline{\mathcal{K}}_{*2}^*$ は、基点付き空間と基点付き写像のなす圏、あるいはその対のなす圏と自然に同一視される。

第 1 章　　ホモトピー論

4 ホモトピー論の基礎

4.1 ϕ 直積と ϕ 対角線写像

圏 $\underline{K}^\phi$ の二つの ϕ 基点付き空間 X, Y に対し、ϕ 基点付き空間 $X\times_\phi Y$ (ϕ 直積) をファイバー積 $X\times_B Y = \{(x,y) \mid \rho^X(x) = \rho^Y(y) \in B\}$ により定義する。　このとき $X\times_\phi Y$ は次の性質を持つ。

命題 4.1　*(1)* **自然な同相** $X\times_\phi B \approx X \approx B\times_\phi X$ **が存在する。　ただし、記号** $\approx$ **は** $\underline{K}^\phi$ **での同相を表す。**

(2) $\underline{K}^\phi$ **での自然な同相** $(X\times_\phi Y)\times_\phi Z \approx X\times_\phi(Y\times_\phi Z)$ **が存在する。**

(3) $\underline{K}^\phi$ **での自然な同相** $X\times_\phi Y \approx Y\times_\phi X$ **が存在する。**

そこで、例えば $X_1, \cdots, X_n$ の直積は括弧の付け方を区別せず $X_1\times_\phi\cdots\times_\phi X_n$ あるいは $\prod_{i=1}^{n}{}_\phi X_i$ などと表す。　特に $X_1 = \cdots = X_n = X$ のとき、$\prod_{i=1}^{n}{}_\phi X_i$ を $\prod^{n}{}_\phi X$ などと表すことがある。

定義 4.2　**次で与えられる連続写像を空間** X **の** ϕ **対角線写像と呼ぶ。**

(ϕ **対角線写像)**　**式** $\Delta^X(x) = (x,x)$ **で写像** $\Delta = \Delta^X : X \to X\times_\phi X$ **を定義する。**

(ϕ **多重対角線写像)**　**写像** $\Delta_n = \Delta_n^X : X \to \prod^{n}{}_\phi X$ **を次式で帰納的に定義する。**

(1) $\Delta_2^X = \Delta^X$　　*(2)* $\Delta_{i+1}^X = (\Delta_i^X\times_\phi 1_X)\circ\Delta^X : X \to X\times_\phi X \to (\prod^{i}{}_\phi X)\times_\phi X = \prod^{i+1}{}_\phi X$

また無限個の空間族 $\{X_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$ に対し、次式によって ϕ 無限直積を定める：

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}{}_\phi X_\lambda = \operatorname*{proj\,lim}_{\Lambda_0\in\mathcal{F}(\Lambda)} \prod_{\lambda\in\Lambda_0}{}_\phi X_\lambda, \quad \mathcal{F}(\Lambda) = \left\{\Lambda_0 \middle| \Lambda_0 \text{ は } \Lambda \text{ の有限部分集合}\right\}.$$

ここで、無限集合 Λ に対する逆極限 $X = \operatorname*{proj\,lim}_{\Lambda_0\in\mathcal{F}(\Lambda)} \prod_{\lambda\in\Lambda_0}{}_\phi X_\lambda$ は集合としての逆極限に弱位相（自然な射影 $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ が全ての $\alpha\in\Lambda$ に対して商写像になる最も弱い位相）をいれたものとする。

注 4.3　**特に** B **が一点空間のとき、これらは通常の直積空間と一致する。**

4.2 ϕ 位相和と ϕ 重ね合せ写像

二つの空間 X, Y に対して、これらを含む十分大きな空間 E があるとする。　この E の中では X, Y が共通部分を持つ可能性があるが、これを分離し共通部分が無い状態での和集合 $X \amalg Y$ (位相和) を部分空間 $X\times\{0\}\cup Y\times\{1\} \subset E\times\{0,1\}$ により定義する。　ただし、集合 $\{0,1\}$ は離散位相を入れておく。

定義 4.4 二つの ϕ 基点付き空間 X, Y に対して、商空間

$$X \amalg_\phi Y = X \amalg Y / \sim_{sum}, \qquad \forall_{a \in A} \quad (\sigma^X(a), 0) \sim_{sum} (\sigma^Y(a), 1).$$

を ϕ 位相和と呼ぶ。 ただし、$\sigma^{X \amalg_\phi Y}$ と $\rho^{X \amalg_\phi Y}$ は次で与えられる：

$$\sigma^{X \amalg_\phi Y}(a) = [\sigma^X(a), 0] = [\sigma^Y(a), 1],\ a \in A, \qquad \rho^{X \amalg_\phi Y}(w) = \begin{cases} \rho^X(x), & w = [x, 0],\ x \in X, \\ \rho^Y(y), & w = [y, 1],\ y \in Y. \end{cases}$$

このとき、直積と同様に次の性質が導かれる。

命題 4.5 *(1)* 自然な同相 $X \amalg_\phi A \approx X \approx A \amalg_\phi X$ が存在する。

(2) 自然な同相 $(X \amalg_\phi Y) \amalg_\phi Z \approx X \amalg_\phi (Y \amalg_\phi Z)$ が存在する。

(3) 自然な同相 $X \amalg_\phi Y \approx Y \amalg_\phi X$ が存在する。

そこで、例えば $X_1, \cdots, X_n$ の位相和は括弧の付け方を区別せず $X_1 \amalg_\phi \cdots \amalg_\phi X_n$ あるいは $\coprod_{\phi\, i=1}^{n} X_i$ などと表す。 特に $X_1 = \cdots = X_n = X$ のとき、$\coprod_{\phi\, i=1}^{n} X_i$ を $\coprod_\phi^n X$ などと表すことがある。

定義 4.6 次で与えられる連続写像を空間 X の重ね合せ写像と呼ぶ。

(重ね合せ写像) 式 $\nabla^X([x, t]) = x, (t = 0, 1)$ で写像 $\nabla = \nabla^X : X \amalg_\phi X = X \times \{0, 1\} / \sim \to X$ を定義する。

(多重重ね合せ写像) 写像 $\nabla_n = \nabla_n^X : \coprod_\phi^n X \to X$ を次式で帰納的に定義する。

$$\text{(1)}\ \nabla_2^X = \nabla^X, \qquad \text{(2)}\ \nabla_{i+1}^X = \nabla^X \circ (\nabla_i^X \amalg 1_X) : \coprod_\phi^{i+1} X = (\coprod_\phi^{i} X) \amalg_\phi X \to X \amalg_\phi X \to X.$$

また無限個の空間族 $\{X_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ に対し、次式で ϕ 無限位相和を定める：

$$\coprod_{\phi\, \lambda \in \Lambda} X_\lambda = \operatorname*{inj\,lim}_{\Lambda_0 \in \mathcal{F}(\Lambda)} \coprod_{\phi\, \lambda \in \Lambda_0} X_\lambda, \quad \mathcal{F}(\Lambda) = \left\{\Lambda_0 \middle| \Lambda_0 \text{ は } \Lambda \text{ の有限部分集合}\right\}.$$

ここで、無限集合 Λ に対する順極限 $X = \operatorname*{inj\,lim}_{\Lambda_0 \in \mathcal{F}(\Lambda)} \prod_{\phi\, \lambda \in \Lambda_0} X_\lambda$ は集合としての順極限に弱位相（自然な包含写像 $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ が全ての $\alpha \in \Lambda$ に対して中への同相になる最も弱い位相）をいれたものとする。

注 4.7 *(1)* $A = \emptyset$ のとき、$X \amalg_\phi Y$ は位相和 $X \amalg Y$ に他ならない。

(2) $A = B$ かつ $\phi = 1_B$ のとき、$X \amalg_\phi Y$ は各ファイバー上で基点を張り合わせてできる空間 $X \vee_B Y$ であり、B 一点和あるいは B *wedge* 和などと呼ばれる。 またこのとき自然に、$X \vee_B Y \subset X \times_B Y$ と見なされる。 特に $A = B = *$ のとき、$X \vee_B Y$ は $X \vee Y$ と書かれ、単に一点和あるいは *wedge* 和などと呼ばれる。

5 B 基点付きの場合

5.1 B 基点付き指数法則

写像 ϕ として特に恒等写像 $1_B : B \to B$ を指定するとき、ϕ 基点付き空間を B 基点付き空間と呼ぶ。　さて B 基点付き空間の圏 $\underline{\mathcal{K}}^B_B$ における指数法則について、ここで簡単に補足しておく。

直積空間 $X \times_B Y$ の部分空間 $X \vee_B Y \subset X \times_B Y$ を一点に潰してできる空間を $X \wedge_B Y$ で表すと、$(\ ) \wedge_B Y$ は圏 $\underline{\mathcal{K}}^B_B$ 上の共変関手となる。　また、空間 X から Y への B 基点を保つ写像の全体 $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{K}}^B_B}(X, Y)$ は $\mathcal{M}_{\underline{\mathcal{K}}}(X, Y)$ の部分集合であり、これは位相空間 $\mathcal{M}^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathcal{K}}}(X, Y)$ に強化することができるので、その部分空間としての位相を導入しコンパクト生成空間としたものを $\mathcal{M}^{\mathcal{K}^B_B}_{\underline{\mathcal{K}}^B_B}(X, Y)$ で表す。　これにより、圏 $\underline{\mathcal{K}}^B_B$ も圏 $\mathcal{K}^B_B$ まで強化された圏としての構造を持つことになる。　このとき圏 $\underline{\mathcal{K}}^B_B$ での指数定理が成立する。

定理 5.1 **関手 $\mathcal{M}^{\mathcal{K}^B_B}_{\underline{\mathcal{K}}^B_B}(Y,\ )$ は $(\ ) \wedge_B Y$ の右随伴関手である。**

次に、写像 $\phi : A \to B$ が適当な写像 $\phi' A' \to B$ と $\iota : A \to A'$ により次の図が可換であるとする。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\phi"'] & A' \arrow[d, "\phi'"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

このとき間手 $(\ )^{\phi}_{+\phi'} : \underline{\mathcal{K}}^{\phi} \to \underline{\mathcal{K}}^{\phi'}$ を、任意の ϕ 基点付き空間 X に対し次で与える。

$$X_{+\phi'} = X \amalg_{\phi} A', \qquad \sigma^{X_{+\phi'}} : A' \hookrightarrow X \amalg A' \twoheadrightarrow X_{+\phi'}, \quad \rho^{X_{+\phi'}} : X_{+\phi'} \xrightarrow{\sigma^X \amalg \phi'} B.$$

さらに、$F_{\phi} : \underline{\mathcal{K}}^{\phi'} \to \underline{\mathcal{K}}^{\phi}$ を次で定義される関手とする。

$$F_{\phi}(X) = X, \qquad \sigma^{F_{\phi}(X)} = \sigma^X \circ \iota, \quad \rho^{F_{\phi}(X)} = \rho^X.$$

このとき、F_{ϕ} は $(\ )_{+\phi'}$ の右随伴関手となる：

定理 5.2 $\mathcal{M}^{\mathcal{K}^{\phi'}}_{\underline{\mathcal{K}}^{\phi'}}(X_{+\phi'}, Y) \approx \mathcal{M}^{\mathcal{K}^{\phi}}_{\underline{\mathcal{K}}^{\phi}}(X, F_{\phi}(Y)), \qquad X \in \mathcal{O}(\underline{\mathcal{K}}^{\phi}), \quad Y \in \mathcal{O}(\underline{\mathcal{K}}^{\phi'}).$

特に $A = \emptyset$ のとき、F_{ϕ} を単純に F で表すことがある。　あるいは $\iota = \phi, \phi' = 1_B$ のとき、$(\ )_{+\phi'}$ を単純に $(\ )_+$ で表すことがある。　このとき $(\ )_+$ は fibrewise に全ての fibre に基点を付け加える関手であり、一方で F は自明な忘却関手となる。

定理 5.3 *(1)* $\mathcal{M}^{\mathcal{K}^B_B}_{\underline{\mathcal{K}}^B_B}(X_+, Y) \approx \mathcal{M}^{\mathcal{K}^{\phi}}_{\underline{\mathcal{K}}^{\phi}}(X, F_{\phi}(Y)), \qquad X \in \mathcal{O}(\underline{\mathcal{K}}^{\phi}), \quad Y \in \mathcal{O}(\underline{\mathcal{K}}^B_B).$

(2) $\mathcal{M}^{\mathcal{K}^{\phi}}_{\underline{\mathcal{K}}^{\phi}}(X_{+\phi}, Y) \approx \mathcal{M}^{\mathcal{K}_B}_{\underline{\mathcal{K}}_B}(X, F(Y)), \qquad X \in \mathcal{O}(\underline{\mathcal{K}}_B), \quad Y \in \mathcal{O}(\underline{\mathcal{K}}^{\phi}).$

注 5.4 **特に $A = \emptyset$ かつ $B = *$ のとき、$(\ )_+$ は単純に一点を付け加える関手であり、F は忘却関手となる。**

5.2 B スマッシュ積と B 簡約対角線写像

圏 $\underline{\mathcal{K}}_B^B$ の二つの B 基点付き空間 X, Y に対し、B 基点付き空間 $X \wedge_B Y$ (B スマッシュ積) をファイバー積 $X \times_B Y = \{(x, y) \mid \rho^X(x) = \rho^Y(y) \in B\}$ から、二つの写像

$$X \times_B Y \hookleftarrow X \vee_B Y = \{(x, y) \in X \times_B Y \mid y = \sigma^X \circ \rho^X(x) \text{ または } x = \sigma^Y \circ \rho^Y(y)\} \longrightarrow B$$

により pushout を取った空間とする。

定義 5.5 *B 基点付き空間 $S_B^n = B \times S^n$ を $\sigma^{S_B^n} = in_1$, $\rho^{S_B^n} = pr_1$ により定める。*

このとき次の命題が成り立つ。

命題 5.6 *(1) 自然な同相 $X \wedge_B S_B^0 \approx X \approx S_B^0 \wedge_B X$ が存在する。*

(2) 自然な同相 $(X \wedge_B Y) \wedge_B Z \approx X \wedge_B (Y \wedge_B Z)$ が存在する。

(3) 自然な同相 $X \wedge_B Y \approx Y \wedge_B X$ が存在する。

そこで例えば $X_1, \cdots, X_n$ のスマッシュ積は括弧の付け方を区別せず、$X_1 \wedge_B \cdots \wedge_B X_n$ あるいは $\bigwedge_{i=1}^{n}{}_B X_i$ などと表す。　特に $X_1 = \cdots = X_n = X$ のとき $\bigwedge_{i=1}^{n}{}_B X_i$ を $\bigwedge^n{}_B X$ と表すことがある。

定義 5.7 *次で与えられる連続写像を B 基点付き空間 X の B 簡約対角線写像と呼ぶ。*

(B 簡約対角線写像) *式 $\bar{\Delta}^X(x) = [(x, x)]$ で写像 $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}^X : X \to X \times_B X \to X \wedge_B X$ を定義する。*

(B 簡約多重対角線写像) *写像 $\bar{\Delta}_n = \bar{\Delta}_n^X : X \to \bigwedge^n{}_B X$ を次式で帰納的に定義する。*

(1) $\bar{\Delta}_2^X = \bar{\Delta}^X$ 　　*(2)* $\bar{\Delta}_{i+1}^X = (\bar{\Delta}_i^X \wedge_B 1_X) \circ \bar{\Delta}^X : X \to X \wedge_B X \to (\bigwedge^i{}_B X) \wedge_B X = \bigwedge^{i+1}{}_B X$

B 基点付き空間 X の直積 $\prod_B^m X$ には、次の様な特別な部分空間を定義することができる。

定義 5.8 *(1)* $\mathrm{T}_B^m X = \{(x_1, \cdots, x_m) \in \prod_B^m X \mid$ *どれかの i について $x_i = \sigma^X \circ \rho^X(x_i)$ となる* $\}$ *(fat wedge)*

(2) $\prod_k^m{}_B X = \{(x_1, \cdots, x_m) \in \prod_B^m X \mid x_i \neq \sigma^X \circ \rho^X(x_i)$ *となる座標番号 i の個数は k 以下* $\}$

演習 5.9 *各 i について $X_i \in \underline{\mathcal{K}}_B^B$ のとき、次を示せ：　$\bigwedge_B^m X \approx \prod_B^m X / \mathrm{T}_B^m X$, (スマッシュ積)*

演習 5.10 *有限個の空間 $X_i \in \underline{\mathcal{K}}_B^B$ $(1 \le i \le n)$ に対して次を示せ：　$\bigwedge_{i=1}^{n}{}_B (X_i)_+ \approx (\prod_{i=1}^{n}{}_B X_i)_+$*

また $\underline{\mathcal{K}}_B^B$ の無限個の空間族 $\{X_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ に対し、射影 $\pi_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda}{}_B X_\lambda \to X_\lambda$ による $B \approx \operatorname{im} \sigma^X \subset X$ の逆像 $\pi_\lambda^{-1}(B)$ を用いて定まる次の二つの写像

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}{}_B X_\lambda \hookleftarrow \mathop{\mathrm{T}_B}_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\pi_\lambda^{-1}(\mathrm{im}\,\sigma^X) \to B$$

により pushout により、無限スマッシュ積 $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}{}_B X_\lambda$ を定める：

演習 5.11 **各** $\lambda\in\Lambda$ **について** $X_\lambda \in \underline{\mathcal{K}}_B^B$ **のとき、次を示せ：** $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}{}_B (X_\lambda)_+ \approx (\prod_{\lambda\in\Lambda}{}_B X_\lambda)_+$

注 5.12 **特に** $B=\{*\}$ **であるときには、**B **あるいは** $*$ **を省略して、スマッシュ積を記述することがある。**

5.3 空间の结 (join)

さて、ユークリッド空間内の空でない二つの図形 $X_0\subseteq E_0, X_1\subseteq E_1$ を $E=E_0{\times}\mathbb{R}{\times}E_1$ に次のように埋め込むことで、X_0,X_1 を E の中の (一般の位置にある) 図形と考えることができる：

$$X_0\subseteq E_0\approx E_0{\times}\{0\}{\times}\{0\}\subseteq E_0{\times}\mathbb{R}{\times}E_1=E,$$

$$X_1\subseteq E_1\approx \{0\}{\times}\{1\}{\times}E_1\subseteq E_0{\times}\mathbb{R}{\times}E_1=E.$$

このとき、次の様に定義されるユークリッド空間 E 内の図形 $X_0{*}X_1$ を X_0,X_1 の「結」と呼ぶ。

$$X_0{*}X_1=\{tx+(1-t)y\in E\mid x\in X_0, y\in X_1, 0\le t\le 1\}$$

ここで、標準 n-単体と呼ばれるコンパクトな凸集合 $\mathbf{\Delta}^n$ の定義を思い出してみよう。

定義 5.13 $\mathbf{\Delta}^n=\left\{(t_0,\cdots,t_n)\in[0,1]^{n+1}\;\middle|\;\sum_{i=0}^n t_i=1\right\}$

演習 5.14 $\mathbf{\Delta}^n$ **は** $\mathbf{\Delta}^{n-1}$ **と一点との結に同相であることを示せ。**

一般の空間 X_0,X_1 に対して、次の様に定義される空間 $X_0{*}X_1$ を X_0,X_1 の「結」と呼ぶ。

(1) $$X_0{*}X_1=(X_0\amalg\mathbf{\Delta}^1{\times}X_0{\times}X_1\amalg X_1)/\sim_{join},$$

ただし、$\sim_{join}$ は次の関係で生成される同値関係である：

$$X_0\ni x_0\sim_{join}(1,0;x_0,x_1)\in\mathbf{\Delta}^1{\times}X_0{\times}X_1,\qquad X_1\ni x_1\sim_{join}(0,1;x_0,x_1)\in\mathbf{\Delta}^1{\times}X_0{\times}X_1.$$

演習 5.15 **ユークリッド空间内の空でない二つの図形** $X_0\subseteq E_0$, $X_1\subseteq E_1$ **に対して、上の二種類の結の定義が同相な空间を定めることを確かめよ。**

さて $n+1$ 個の ϕ 基点付き空間 $X_0,\cdots,X_n$ に対して、次で帰納的に与えられる等化空間

$$\mathbf{\Delta}^n{\times}X_0{\times}_\phi\cdots{\times}_\phi X_n \twoheadrightarrow X_0{*}_\phi\cdots{*}_\phi X_n=\mathop{*_\phi}_{i=0}^{n} X_i$$

を $X_0,\cdots,X_n$ の「結 (join)」と呼ぶ：

$$X_0 *_\phi \cdots *_\phi X_n = (\mathbf{\Delta}^n \times X_0 \times_\phi \cdots \times_\phi X_n \amalg_\phi \coprod_{i=0}^{n}{}_\phi E_i)/\sim_{mjoin},$$

$$E_i = X_0 *_\phi \cdots *_\phi X_{i-1} *_\phi X_{i+1} *_\phi \cdots *_\phi X_n.$$

ただし、$\sim_{mjoin}$ は次の $n+1$ 個の関係で生成される同値関係である：

$$(t_0,...,t_{i-1},0,t_{i+1},...,t_n;x_0,...,x_n) \sim_{mjoin} [t_0,...,t_{i-1},t_{i+1},...,t_n;x_0,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n] \in E_i.$$

ただし、i は $0 \le i \le n$ の範囲を動く。　このとき、空間の結 $X_0 *_\phi X_1$ は次の性質を持つ。

命題 5.16　*(1)* **自然な同相** $A *_\phi X \approx X \approx X *_\phi A$ **が存在する。**

(2) X_0, X_1, X_2 **が全て空でないとき、自然な同相** $(X_0 *_\phi X_1) *_\phi X_2 \approx X_0 *_\phi (X_1 *_\phi X_2)$ **が存在する。**

(3) X_0, X_1 **が共に空でないとき、自然な同相** $X_0 *_\phi X_1 \approx X_1 *_\phi X_0$ **が存在する。**

演習 5.17 $X_0,\cdots,X_n$ **が全て空でないとき、自然な同相**

$$X_0 *_\phi \cdots *_\phi X_n \approx (X_0 *_\phi \cdots *_\phi X_{n-1}) *_\phi X_n \approx X_0 *_\phi (X_1 *_\phi \cdots *_\phi X_n)$$

が存在することを示せ。

　さて、特に圏 $\underline{\mathcal{K}}_B^B$ の場合を考えてみることにしよう。　ただし、$\phi = 1_B : B \to B$ のとき、$*_\phi$ を $*_B$ で表すこととする。

演習 5.18 各 $X_i \in \underline{\mathcal{K}}_B^B$ **のとき、次を示せ：**　$\mathop{*_B}\limits_{i=0}^{n} X_i \approx \Sigma^n(\mathop{\wedge_B}\limits_{i=0}^{n} X_i)$　*(***同相***)*

演習 5.19 各 $X_0, X_1 \in \underline{\mathcal{K}}_B^B$ **のとき、次を示せ：**　$X_0 *_B X_1 \simeq \mathcal{C}(X_0) \times X_1 \cup X_0 \times \mathcal{C}(X_1)$　*(***ホモトピー同値***)*

注 5.20 上の二つの演習から、各 $X_i \in \underline{\mathcal{K}}_B^B$ **のとき** $(\mathcal{C}(\mathop{*_B}\limits_{i=0}^{n} X_i), \mathop{*_B}\limits_{i=0}^{n} X_i) \simeq \prod^{n}(\mathcal{C}(X_i), X_i)$ **が成立することが分かる。**

第２章　　ホモトピー論（続）

6 空间の構成

6.1 写像のホモトピーと空间のホモトピー同値

ϕ 基点付き空間対の圏 $\underline{K}_2^{\phi}$ の対写像 $f, f_0, f_1 : (X,K) = (X,K{:}\phi) \to (Y,L{:}\phi) = (Y,L)$ を考える。

(相対ホモトピック) $f \sim_{\mathrm{rel}\phi} g : (X,K{:}\phi) \to (Y,L{:}\phi) \iff \exists_{連続写像 F:X\times[0,1]\to Y}$ s.t. $F(k,t) \in L$, $(k,t) \in K\times[0,1]$ & $F(x,0) = f(x), x \in X$ & $F(x,1) = g(x), x \in X$ & $F\circ(\sigma^X\times 1)(a,t) = f\circ\sigma^X(a) = g\circ\sigma^X(a)$, $(a,t) \in A\times[0,1]$.　特に ϕ を明示する必要が無いときには、$\sim$ でホモトピーを表す。

(相対レトラクト) f がレトラクト写像 $\iff \exists_{g:(Y,L:\phi)\to(X,K:\phi)}$ s.t. $f\circ g \sim_{\mathrm{rel}\phi} 1_{(Y,L:\phi)}$.

(相対ホモトピー同値) f がホモトピー同値写像 $\iff \exists_{g:(Y,L:\phi)\to(X,K:\phi)}$ s.t. $f\circ g \sim_{\mathrm{rel}\phi} 1_{(Y,L:\phi)}$ & $g\circ f \sim 1_{(X,K:\phi)}$.　また、このとき g を f のホモトピー逆写像という。

空間対 (X,K) から空間対 (Y,L) へのレトラクト写像が存在するとき、(X,K) は (Y,L) を支配すると言う。また空間 (X,K) から空間 (Y,L) へのホモトピー同値写像が存在するとき、(X,K) と (Y,L) はホモトピー同値であると呼ばれ、記号で $(X,K) \simeq_{\mathrm{rel}\phi} (Y,L)$ などと表される。

演習 6.1 **(相対) ホモトピー同値であるという関係は同値関係であることを示せ。**

演習 6.2 **三系に対する (相対) ホモトピー同値であるという関係を定義し、これが同値関係であることを示せ。**

(可縮) B 基点付き空間 X が B 可縮 $\iff X \simeq *_B$ である。　ただし、$*_B$ は圏 $\underline{K}_B^B$ の零対象である。

6.2 接着空间

B 基点付き空間の圏 $\underline{K}_B^B$ において、中への同相 $i : K \hookrightarrow X$ により定まる相対空間 (X,K) と写像 $f : K \to Y$ に対し、f による接着空間 $X \cup_f Y$ を位相和 $X \amalg Y$ の商空間として次のように定める：

$$X \cup_f Y = (X \amalg_B Y)/\sim_{attach}, \qquad X \ni i(x) \sim_{attach} f(x) \in Y,\ (\forall x \in K).$$

このとき、自然な包含写像 $j : Y \hookrightarrow X \cup_f Y$ は (閉部分空間に像を持つ) 中への同相写像となり、相対空間 $(X \cup_f Y, Y)$ を定める。　さらに相対空間 (X,K) は自然に相対空間 $(X \amalg_B Y, K \amalg_B Y)$ に埋め込まれ、商写像との合成を取ることで相対空間の写像 $f' : (X,K) \to (X \cup_f Y, Y)$ が誘導され、$f'|_X\circ i = j\circ f$ を満たす。

演習 6.3 **写像** $f' : (X,K) \to (X \cup_f Y, Y)$ **が相対同相であることを示せ。**

(柱 — cylinder) 空間 X に対して、$\mathcal{I}(X)=([0,1]\times X)/\sim_{cyl}$ とする。 ただし $\sim_{cyl}$ は $(t,\sigma^X(b))\sim_{cyl}(t',\sigma^X(b))$, $t,t'\in[0,1], b\in B$ により生成される同値関係である。 このとき包含写像 $i_t : X\approx\{t\}\times X\subseteq[0,1]\times X\to\mathcal{I}(X)$ $(0\le t\le 1)$ は中への同相を与え、従って $\iota : X\vee_B X\xrightarrow{i_0\vee i_1} i_0(X)\cup i_1(X)\subseteq\mathcal{I}(X)$ も中への同相である。 また $\mathcal{I}(-)$ は明らかに共変関手である。

(写像柱 — mapping cylinder) 写像 $f : X\to Y$ に対して、対 $(\mathcal{I}(X),i_1(X))$ と写像 $i_1(X)=X\xrightarrow{f}Y$ に対して、対 $(\mathcal{I}(X)\cup_f Y,Y)$ が得られ $(\mathcal{I}(X),i_1(X))$ と相対同相となる。 このとき $\mathcal{I}_f=\mathcal{I}(X)\cup_f Y$ とおくと、中への同相写像 $i : X\xrightarrow{i_0}\mathcal{I}(X)\to\mathcal{I}_f$ と $j : Y\hookrightarrow\mathcal{I}(X)\cup_f Y=\mathcal{I}_f$ が付随する。 特に $f=1_X$ のとき $\mathcal{I}_f=\mathcal{I}(X)$ である。

(二重写像柱 — double mapping cylinder) 写像 $f : X\to Y$ と $g : X\to Z$ に対して、対 $(\mathcal{I}(X),X\vee_B X)$ と写像 $F=f\vee_B g : X\vee_B X\to Y\vee_B Z$ をとれば、対 $(\mathcal{I}(X)\cup_F(Y\vee_B Z),Y\vee_B Z)$ が得られ $(\mathcal{I}(X),X\vee_B X)$ と相対同相となる。 このとき $\mathcal{I}(f,g)=\mathcal{I}(X)\cup_F(Y\vee_B Z)$ とおくと、中への同相写像 $j : Y\vee_B Z\hookrightarrow\mathcal{I}(X)\cup_F(Y\vee_B Z)=\mathcal{I}(f,g)$ と等化空間 $q : \mathcal{I}(X)\twoheadrightarrow\mathcal{I}(f,g)$ が付随する。 また $\mathcal{I}(f,g)\approx\mathcal{I}(g,f)$ であり、特に $f=1_X$ のとき $\mathcal{I}(f,g)=\mathcal{I}_g$ である。

(錐 — cone) 空間 X に対して、自明な写像 $* : X\to *_B$ から対 $(\mathcal{I}_{(*)},i_0(X))$ を得る。 このとき $\mathcal{C}(X)=\mathcal{I}_{(*)}$ とおくと、対 $(\mathcal{C}(X),X)$ を得る。 また $\mathcal{C}(-)$ は明らかに共変関手である。

(写像錐 — mapping cone) 写像 $f : X\to Y$ に対して対 $(\mathcal{C}(X),X)$ と写像 $f : X\to Y$ から対 $(\mathcal{C}(X)\cup_f Y,Y)$ を得る。 このとき $\mathcal{C}_f=\mathcal{C}(X)\cup_f Y$ とおくと、対 $(\mathcal{C}_f,Y)$ を得る。

(懸垂 — suspension) 空間 X に対して、自明な写像 $* : X\to *_B$ から対 $(\mathcal{C}_{(*)},*_B)$ を得る。 ここで $\Sigma(X)=\mathcal{C}_{(*)}$ とおくと、対 $(\Sigma(X),*_B)$ を得る。 また $\Sigma(-)$ は明らかに共変関手である。

補題 6.4 **(HPO)** **写像** $f : X\to Y, g : X\to Z, h : Y\to W, k : Z\to W$ **に対し、次が成立する。**

$$\left[\begin{array}{l}{}^{\exists}H : \mathcal{I}(X)\to W\\ s.t.\ h\circ f\sim_H k\circ g\end{array}\right]\underset{(J\circ q=H)}{\Longleftrightarrow}\left[\begin{array}{l}{}^{\exists}J : \mathcal{I}(f,g)\to W\\ s.t.\ J\circ j_0=h, J\circ j_1=k\end{array}\quad\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[d, "j_0"] \arrow[ddr, "h"] & \\ Z \arrow[r, "j_1"] \arrow[drr, "k"'] & \mathcal{I}(f,g) \arrow[dr, "J"] & \\ & & W \end{tikzcd}\right]$$

定義 6.5 **写像** $f:X\to Y$ **に対して、中への同相写像** $X \xrightarrow{i_{\frac{1}{2}}} \mathcal{I}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{C}_f$ **の像を** *pinch* **して基点と同一視することにより、写像** $\nu:\mathcal{C}_f\to\mathcal{C}_f\vee_B\Sigma(X)$ **が得られる。**

$$\nu([t,x])=\begin{cases} in_1([2t,x])\in\mathcal{C}_f\vee_B\Sigma(X), & 0\le t\le\frac{1}{2},\\ in_2([2t-1,x])\in\mathcal{C}_f\vee_B\Sigma(X), & \frac{1}{2}\le t\le 1,\end{cases}\qquad \nu(y)=in_1(y)\in\mathcal{C}_f\vee_B\Sigma(X).$$

ただし、$[0,x]=f(x)\in Y$ **である。**

特に $X=B$ で f が自明な写像のとき、写像 $\mu:\Sigma(X)\to\Sigma(X)\vee_B\Sigma(X)$ が得られることになる。

命題 6.6 **写像** ν **および** μ **は次の条件をみたす。**

(1) $pr_1\circ\nu\sim 1_{\mathcal{C}_f}:\mathcal{C}_f\to\mathcal{C}_f$,

(2) $pr_2\circ\nu\sim p:\mathcal{C}_f\twoheadrightarrow\Sigma(X)$,

(3) $(\nu\vee_B 1)\circ\nu\sim(1\vee_B\mu)\circ\nu\to\mathcal{C}_f\vee_B\Sigma(X)\vee_B\Sigma(X)$.

ただし、$p:\mathcal{C}_f\twoheadrightarrow\mathcal{C}_f/Y\approx\Sigma(X)$ **は商写像である。**

そこでこの写像 ν を懸垂空間 $\Sigma(X)$ の写像 p に沿う余作用などと、あるいは写像 μ を懸垂空間 $\Sigma(X)$ の余H群構造などと呼ぶことがある。

6.3 引き戻し

B 基点付き空間の圏 $\underline{K}^B_B$ において、商写像 $p:Y\twoheadrightarrow L$ により定まる等化空間 Y/L と写像 $f:X\to L$ に対し、f の fibre 積 $X\times_f Y$ を fibre 積空間 $X\times_B Y$ の部分空間として次のように定める：

$$X\times_f Y=\{(x,y)\in X\times_B Y\mid f(x)=p(y)\}\subseteq X\times_B Y.$$

このとき、自然な射影 $\hat{f}:X\times_f Y\to Y$ は商写像となり、等化空間 $(X\times_f Y)/Y$ を定める。 さらに自然な射影 $q:X\times_f Y\to X$ も商写像となり、等化空間 $(X\times_f Y)/X$ を定め、$p\circ\hat{f}=f\circ q$ を満たす。 さて、以下の５種類の構成では X が弧状連結（$\pi:\mathcal{P}(X)\to X\times_B X$ が全射）であることを仮定する：

(余柱 — path) 空間 X に対して、$\mathcal{P}(X)=\left\{f:[0,1]\to X\,\middle|\,\forall_{t,t'\in[0,1]}\,\rho^X\circ f(t)=\rho^X\circ f(t')\right\}$ とする。 このとき、代入写像 $p_t:\mathcal{P}(X)\to X$ ($p_t(f)=f(t), 0\le t\le 1$) は商写像であり、従って $\pi:\mathcal{P}(X)\twoheadrightarrow X\times_B X$ ($\pi(f)=(f(0),f(1))$) も商写像である。 また $\mathcal{P}(-)$ は明らかに共変関手である。

(写像余柱 — mapping path) 写像 $f:Y\to X$ に対して、商写像 $p_1:\mathcal{P}(X)\twoheadrightarrow X$ と写像 $Y\xrightarrow{f}X$ に対して、商写像 $Y\times_f\mathcal{P}(X)\twoheadrightarrow Y$ を得る。 このとき $\mathcal{P}_f=Y\times_f\mathcal{P}(X)$ とおくと、商写像 $p:\mathcal{P}_f\subseteq\mathcal{P}(X)\overset{p_0}{\twoheadrightarrow}X$ と $q:\mathcal{P}_f\twoheadrightarrow Y$ が付随する。 特に $f=1_X$ のとき $\mathcal{P}_f=\mathcal{P}(X)$ である。

(二重写像余柱 — double mapping path) 写像 $f : Y \to X$ と $g : Z \to X$ に対して、商写像 $\pi : \mathcal{P}(X) \twoheadrightarrow X{\times_B}X$ と写像 $f{\times_B}g : Y{\times_B}Z \to X{\times_B}X$ をとれば、商写像 $(Y{\times_B}Z){\times_{(f\times_B g)}}\mathcal{P}(X) \twoheadrightarrow Y{\times_B}Z$ が得られる。 このとき $\mathcal{P}(f,g) = (Y{\times_B}Z){\times_{(f\times_B g)}}\mathcal{P}(X)$ とおくと、商写像 $q : \mathcal{P}(f,g) = (Y{\times_B}Z){\times_{(f\times_B g)}}\mathcal{P}(X) \twoheadrightarrow Y{\times_B}Z$ と中への同相写像 $j : \mathcal{P}(f,g) \hookrightarrow \mathcal{P}(X)$ が付随する。 また $\mathcal{P}(f,g){\approx}\mathcal{P}(g,f)$ であり、特に $f = 1_X$ のとき $\mathcal{P}(f,g) = \mathcal{P}_g$ である。

(余錐 — fibre) 空間 X に対して自明な写像 $* : *_B \to X$ から商写像 $\mathcal{P}_{(*)} \twoheadrightarrow X$ を得る。 このとき $\mathcal{F}(X) = \mathcal{P}_{(*)}$ とおくと、商写像 $\mathcal{F}(X) \twoheadrightarrow X$ を得る。 また $\mathcal{F}(-)$ は明らかに共変関手である。

(写像余錐 — mapping/homotopy fibre) 写像 $f : Y \to X$ に対して商写像 $\mathcal{F}(X) \twoheadrightarrow X$ と写像 $f : Y \to X$ から商写像 $Y \times_f \mathcal{F}(X) \twoheadrightarrow Y$ を得る。 ここで $\mathcal{F}_f = Y \times_f \mathcal{F}(X)$ とおくと、商写像 $\mathcal{F}_f \twoheadrightarrow Y$ を得る。

(ループ — loop) 空間 X に対して自明な写像 $* : *_B \to X$ から商写像 $\mathcal{F}_{(*)} \twoheadrightarrow *_B$ を得る。 このとき $\Omega(X) = \mathcal{F}_{(*)}$ とおくと、商写像 $\Omega(X) \twoheadrightarrow *_B$ を得る。 また $\Omega(-)$ は明らかに共変関手である。

補題 6.7 (HPB) **写像 $f : Y \to X, g : Z \to X, h : W \to Y, k : W \to Z$ に対し、次が成立する。**

$$\left[\begin{array}{l} {}^\exists H : W \to \mathcal{P}(X) \\ s.t.\ f{\circ}h \sim_H g{\circ}k \end{array}\right] \underset{(j\circ J=H)}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ll} {}^\exists J : W \to \mathcal{P}(f,g) & \\ s.t.\ q_0{\circ}J = h, q_1{\circ}J = k & \begin{tikzcd} W \arrow[dr, "J"] \arrow[drr, "k"] \arrow[ddr, "h"'] & & \\ & \mathcal{P}(f,g) \arrow[r, "q_0"] \arrow[d, "q_1"] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Z \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd} \end{array}\right]$$

定義 6.8 **写像 $f : Y \to X$ に対して、商写像 $\mathcal{F}_f \hookrightarrow \mathcal{P}(X) \xrightarrow{p_{\frac{1}{2}}} X$ の逆像で接続することにより、写像 $n : \mathcal{F}_f \times \Omega(X) \to \mathcal{F}_f$ が得られる。**

$$pr_1{\circ}n((y,\ell),\omega)(t) = \begin{cases} \ell(2t) \in X, & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \omega(2t-1) \in X, & \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases} \qquad pr_2{\circ}n((y,\ell),\omega) = y \in Y.$$

ただし、$\ell(0) = f(y) \in X$ であり、$pr_1{\circ}n((y,\ell),\omega)$ の定義式を $\ell + \omega$ などと表すことがある。

特に $X = B$ で f が自明な写像のとき、写像 $m : \Omega(X) \times_B \Omega(X) \to \Omega(X)$ が得られることになる。

命題 6.9 **写像 n および m は次の条件をみたす。**

(1) $n{\circ}in_1 \sim 1_{\mathcal{F}_f} : \mathcal{F}_f \to \mathcal{F}_f,$

(2) $n{\circ}in_2 \sim i : \Omega(X) \hookrightarrow \mathcal{F}_f,$

(3) $n\circ(n\times_B 1)\sim n\circ(1\times_B m)\to\mathcal{F}_f\times_B\Omega(X)\times_B\Omega(X)$.

ただし、$i:\Omega(X)\subset\mathcal{F}_f$ は中への同相写像である。

そこでこの写像 n をループ空間 $\Omega(X)$ の写像 i に沿う作用などと、あるいは写像 m をループ空間 $\Omega(X)$ の H 群構造などと呼ぶことがある。

7 Fibration と co-fibration

7.1 Puppe 系列

さて写像 $f:X\to Y$ の写像錐 j の mapping cone、あるいは写像 $f:Y\to X$ の写像余錐 q の mapping fibre はさらに訳の分からないものとなるのであろうか？

補題 7.1 *(1)* 写像 $f:X\to Y$ の写像錐を $j:Y\hookrightarrow\mathcal{C}_f$ とするとき、$\Sigma(f):\Sigma(X)\to\Sigma(Y)$ の写像錐はホモトピー同値を除けば $\Sigma(j):\Sigma(Y)\to\Sigma(\mathcal{C}_f)$ $(\simeq\mathcal{C}_{\Sigma(f)})$ に一致する。

(2) 写像 $f:Y\to X$ の写像余錐を $q:\mathcal{F}_f\to Y$ とするとき、$\Omega(f):\Omega(Y)\to\Omega(X)$ の写像余錐はホモトピー同値を除けば $\Omega(q):\Omega(\mathcal{F}_f)$ $(\simeq\mathcal{F}_{\Omega(f)})\to\Omega(Y)$ に一致する。

写像 $f:X\to Y$ に対して、写像錐 $j:Y\hookrightarrow\mathcal{C}_f$ を f の (homotopy) cofibre と呼ぶことがある。　同様に写像 $f:Y\to X$ に対して、写像余錐 $q:\mathcal{F}_f\to Y$ を写像 f の (homotopy) fibre と呼ぶ。

　以下同様な推論を進めることにより、次の定理が得られる。

定理 7.2 (**Puppe**) *(1)* j の *cofibre* はホモトピー同値を除き $j_1:\mathcal{C}_f\to\Sigma(X)$ に一致し、j_1 の *cofibre* はホモトピー同値を除き $-\Sigma(f):\Sigma(X)\to\Sigma(Y)$ に一致する。　ただし $-\Sigma(f)$ は $(-\Sigma(f))(t,x)=(1-t,f(x))$ で定義する。

(2) q の *fibre* はホモトピー同値を除き $q_1:\Omega(X)\hookrightarrow\mathcal{F}_f$ に一致し、q_1 の *fibre* はホモトピー同値を除き $-\Omega(f):\Omega(Y)\to\Omega(X)$ に一致する。　ただし $-\Omega(f)$ は $(-\Omega(f))(u)(t)=f\circ u(1-t)$ で定義する。

　従って $\delta=j_1,\partial=q_1$ とおいて、次の長い *(co)fibre* 列を得る：

(cofibre 列) $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{j}\mathcal{C}_f\xrightarrow{\delta}\Sigma(X)\xrightarrow{-\Sigma(f)}\Sigma(Y)\xrightarrow{-\Sigma(j)}\Sigma\mathcal{C}_f\xrightarrow{-\Sigma\delta}\Sigma^2X\xrightarrow{\Sigma^2f}\Sigma^2Y\xrightarrow{\Sigma^2j}\Sigma^2\mathcal{C}_f\to\cdots,$

(fibre 列) $\cdots\to\Omega^2\mathcal{F}_f\xrightarrow{\Omega^2q}\Omega^2Y\xrightarrow{\Omega^2f}\Omega^2X\xrightarrow{-\Omega\partial}\Omega\mathcal{F}_f\xrightarrow{-\Omega q}\Omega Y\xrightarrow{-\Omega f}\Omega X\xrightarrow{\partial}\mathcal{F}_f\xrightarrow{q}Y\xrightarrow{f}X.$

系 7.2.1 圏 $\underline{\mathcal{K}}^B_{B2}$ の写像 $f:(X,K)\to(Y,L)$ に対して、次の長い *(co)fibre* 列を得る：

(cofibre 列) $(X,K)\xrightarrow{f}(Y,L)\xrightarrow{j}(\mathcal{C}_{f|_X},\mathcal{C}_{f|_K})\xrightarrow{\delta}(\Sigma(X),\Sigma(K))\xrightarrow{-\Sigma(f)}(\Sigma(Y),\Sigma(L))\to\cdots,$

(fibre 列) $\cdots\to(\Omega\mathcal{F}_{f|_X},\Omega\mathcal{F}_{f|_K})\xrightarrow{-\Omega q}(\Omega Y,\Omega L)\xrightarrow{-\Omega f}(\Omega X,\Omega K)\xrightarrow{\partial}(\mathcal{F}_{f|_X},\mathcal{F}_{f|_K})\xrightarrow{q}(Y,L)\xrightarrow{f}(X,K).$

7.2 fibration と co-fibration

ファイバー束や被覆空間を特徴づける性質として局所自明性があるが、その一つの帰結として、与えられた束準同型の底空間での変形が束準同型の全空間での変形に持ち上がるという事実がある。 これが「Homotopy Lifting Property (HLP)」あるいは「Covering Homotopy Property (CHP)」であり、その双対が「Homotopy Extension Property (HEP)」として知られる。

定義 7.3 **(Fibration)** B 等化空间 $p : Y \twoheadrightarrow L$ が *fibration* とは、次の条件が成立することである。

写像 $f : X \to Y$ と $H : \mathcal{I}(X) \to B$ が等式 $H \circ i_0 = p \circ f$ を満たすなら、写像 $G : \mathcal{I}(X) \to Y$ で等式 $p \circ G = H$, $G \circ i_0 = f$ を満たすものが存在する。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i_0"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{I}(X) \arrow[d, "H"] \arrow[dl, dotted, "G"] \\ Y \arrow[r, "p"'] & L \end{tikzcd}$$

(Cofibration) 中への同相 $i : K \hookrightarrow X$ が *cofibration* とは、次の条件が成立することである。

写像 $f : X \to Y$ と $F : \mathcal{I}(K) \to Y$ が等式 $p_0 \circ \mathrm{ad}(F) = f \circ i$ を満たすなら、写像 $G : \mathcal{I}(X) \to Y$ で等式 $\mathrm{ad}(G) \circ i = \mathrm{ad}(F)$, $p_0 \circ \mathrm{ad}(G) = f$ を満たすものが存在する。

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\mathrm{ad}(F)"'] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "\mathrm{ad}(G)"] \\ \mathcal{P}(Y) \arrow[r, "p_0"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \left(\begin{tikzcd} X \cup_i \mathcal{I}(K) \arrow[r, hook, "i_0 \cup \mathcal{I}(i)"] \arrow[d, "f \cup F"'] & \mathcal{I}(X) \arrow[dl, dotted, "G"] \\ Y & \end{tikzcd} \right)$$

ただし、$\mathrm{ad} : \mathcal{M}(\mathcal{I}(X), Y) \xrightarrow{\approx} \mathcal{M}(X, \mathcal{P}(Y))$ は随伴写像を対応させる同相写像である。

定理 7.4 与えられた *fibration* $p : Y \to L$ と *cofibration* $i : K \hookrightarrow X$ に対して、次が成立する。

(HLEP/HELP) 写像 $f : X \to Y$ と $F : \mathcal{I}(K) \to Y$ と $H : \mathcal{I}(X) \to L$ が等式 $H \circ i_0 = p \circ f$, $p_0 \circ \mathrm{ad}(F) = f \circ i$ および $H \circ \mathcal{I}(i) = p \circ F$ を満たすなら、写像 $G : \mathcal{I}(X) \to Y$ で等式 $\mathrm{ad}(G) \circ i = \mathrm{ad}(F)$, $p_0 \circ \mathrm{ad}(G) = f$, $p \circ G = H$ を満たすものが存在する。

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\mathrm{ad}(F)"'] & X \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "\mathrm{ad}(G)"] & \mathcal{I}(X) \arrow[d, "H"] \arrow[dl, dotted, "G"] \\ \mathcal{P}(Y) \arrow[r, "p_0"'] & Y \arrow[r, "p"'] & L \end{tikzcd} \qquad \left(\begin{tikzcd} X \cup_i \mathcal{I}(G) \arrow[r, hook, "i_0 \cup \mathcal{I}(i)"] \arrow[d, "f \cup F"'] & \mathcal{I}(X) \arrow[d, "H"] \arrow[dl, dotted, "K"] \\ Y \arrow[r, "p"'] & L \end{tikzcd} \right)$$

7.3 相対 CW 複体と胞体近似定理

圏 $\underline{\mathcal{K}}_B^B$ における位相空間の対 (X,K) に対する胞体構造を考える。

定義 7.5 **圏** $\underline{\mathcal{K}}_B^B$ **の相対空間** $(X,K)=(X,K)$ **が相対** *CW* **複体であるとは、次の条件を満たす** X **の閉部分空間族** X_i *(*i*-骨格と呼ばれる)* $i \geq -1$ **が存在することである。 ただし、**$S_B^i = S^i \times B$ **かつ** $E_B^i = E^i \times B$ **である。**

(1) $X_{-1}=K,\ X=\bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$ *(弱位相を持つ)*

(2) $X_0 = K \amalg$ *(discrete set)*

(3) $X_i = \mathcal{C}(A_i)\cup_{f_i} X_{i-1},\ f_i : A_i \to X_{i-1} \quad i \geq 1. \quad A_i = \left(\coprod_{\lambda} S_B^{i-1}\right)_+$

(注 1) $X_i \setminus X_{i-1} = \coprod_{\lambda} E_B^i$ の各連結成分 $E_B^i \approx \mathbb{R}^i \times B$ を X の i-胞体と呼び、e_B^i などと表す。

(注 2) 特に $K=B$ のとき、$X=(X{:}B)$ を圏 $\underline{\mathcal{K}}_B^B$ の CW 複体と呼ぶ。

次にこのような胞体構造を保つ写像を考える。

定義 7.6 **対写像** $f:(X,K)\to(Y,L)$ **が相対胞体写像であるとは、**(X,K) **の** i**-骨格を** X_i **とし** (Y,L) **の** i**-骨格を** Y_i **とするとき、**$f(X_i)\subseteq Y_i,\quad i\geq 0$ **を満たすことである。**

例 7.7 *(1)* $S^n = \mathcal{C}(S^{n-1})\cup\{*\}$ **より** S^n **は圏** $\underline{\mathcal{K}}$ **の** *CW* **複体であり、**$S^n = e^0 \cup e^n$ **となる。**

(2) $\mathbb{R}P^i = \mathcal{C}(S^{i-1})\cup \mathbb{R}P^{i-1}$ **より** $\mathbb{R}P^n$ **は圏** $\underline{\mathcal{K}}$ **の** *CW* **複体であり、**$\mathbb{R}P^n = e^0\cup e^1\cup\cdots\cup e^n$ **となる。**

(3) $\mathbb{C}P^i = \mathcal{C}(S^{2i-1})\cup \mathbb{C}P^{i-1}$ **より** $\mathbb{C}P^n$ **は圏** $\underline{\mathcal{K}}$ **の** *CW* **複体であり、**$\mathbb{C}P^n = e^0\cup e^2\cup\cdots\cup e^{2n}$ **となる。**

(4) $\mathbb{H}P^i = \mathcal{C}(S^{2i-1})\cup \mathbb{H}P^{i-1}$ **より** $\mathbb{H}P^n$ **は圏** $\underline{\mathcal{K}}$ **の** *CW* **複体であり、**$\mathbb{H}P^n = e^0\cup e^4\cup\cdots\cup e^{4n}$ **となる。**

しかし、胞体写像であるという条件はきつく、CW 複体と胞体写像の圏を考えることはむしろ取り扱いが困難になる。 次の（相対）胞体近似定理がホモトピー的にその難点を取り除くことを可能にする。

定理 7.8 **(相対胞体近似定理) 圏** $\underline{\mathcal{K}}_B^B$ **の相対** *CW* **複体の間の対写像** $f:(X,K)\to(Y,L)$ **に対して、胞体写像** $g:(X,K)\to(Y,L)$ **で** $g\sim_{\mathrm{rel}K} f$ **をみたすものが存在する。**

系 7.8.1 **(胞体近似定理) 圏** $\underline{\mathcal{K}}_B^B$ **の** *CW* **複体の間の写像** $f:X\to Y$ **に対して、胞体写像** $g:X\to Y$ **で** $g\sim f$ **をみたすものが存在する。**

B 基点付き相対 CW 複体にホモトピー同値な空間対とその間の対写像のなす圏を $\underline{\mathcal{CW}}_{B\,2}^B$ で表し、B 基点付き CW 複体にホモトピー同値な B 基点付き空間とその間の写像のなす圏を $\underline{\mathcal{CW}}_B^B$ などと表す。

第３章　　ホモトピー不変量

8 簡約(コ)ホモロジー論

8.1 簡約(コ)ホモロジー群

単位元 1 を持つ環 Λ に対して、アーベル群 M が次の条件を満たす Λ の M への作用 $\Lambda\times M \ni (a,m) \mapsto a{\cdot}m \in M$ を持つとき、M を Λ-加群 (Λ を作用域とする加群) と呼ぶ。

(1) $1{\cdot}m = m,\quad m \in M,$

(2) $a{\cdot}(b{\cdot}m) = (ab){\cdot}m,\quad a,b \in \Lambda, m \in M,$

(3) $(a+b){\cdot}m = a{\cdot}m + b{\cdot}m,\quad a,b \in \Lambda, m \in M,$

(4) $a{\cdot}(m+n) = a{\cdot}m + a{\cdot}n,\quad a \in \Lambda, m,n \in M.$

また、Λ-加群 M から N への加群としての準同型 ϕ が条件

$$\phi(a{\cdot}m) = a{\cdot}\phi(m)$$

を満たすとき、Λ-準同型と呼ぶ。

　さて、d を 2 以上の偶数または無限大 ∞ とし、$\mathbb{Z}/d = \{i \in \mathbb{Z} \,|\, 0 \le i < d\}$ とおく。　従って、例えば $\mathbb{Z}/\infty = \bar{\mathbb{N}}$ となる。　このとき、単位的可換環 R に対して、圏 ${}_R\underline{\mathcal{GM}}_d$ を次で定め、次数付き R-加群の圏と呼ぶ。　ここで R それ自体も、次数 0 に集中した次数付き R-加群とみなす。

(O) 圏 ${}_R\underline{\mathcal{GM}}_d$ の対象は $\{M_i\ (R\text{-加群}) \,|\, i \in \mathbb{Z}/d\}$ (これを $M_* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/d} M_i$ で表す)

(M) 圏 ${}_R\underline{\mathcal{GM}}_d$ の M_* から N_* への射は $\{\phi_i : M_i \to N_i\ (R\text{-準同型}) \,|\, i \in \mathbb{Z}/d\}$ ($\phi_* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/d} \phi_i$)

次の七つの定理は、空間に対する常 (コ) ホモロジー論の満たす 7 つの公理を B 基点付き CW 複体のなす圏 $\underline{\mathcal{CW}}^B_B$ の上の簡約 (コ) ホモロジー論の言葉で言い換えたものである。

定理 8.1 **(関手性) 単位的可換環** R **上の加群** G **に対し、次が成立する。**

(簡約ホモロジー) $\tilde{H}_*(\ ;G) = H_*(\ ,B;G)$ **は圏** $\underline{\mathcal{CW}}^B_B$ **から圏** ${}_R\underline{\mathcal{GM}}_\infty$ **への共変関手である。**

(簡約コホモロジー) $\tilde{H}^*(\ ;G) = H^*(\ ,B;G)$ **は圏** $\underline{\mathcal{CW}}^B_B$ **から圏** ${}_R\underline{\mathcal{GM}}_\infty$ **への反変関手である。**

定理 8.2 (ホモトピー不変性) 単位的可換環 R 上の加群 G に対し、次が成立する。

(簡約ホモロジー) $f \sim g$ ならば同じ準同型 $\tilde{H}_*(f;G) = \tilde{H}_*(g;G)$ を誘導する。

(簡約コホモロジー) $f \sim g$ ならば同じ準同型 $\tilde{H}^*(f;G) = \tilde{H}^*(g;G)$ を誘導する。

定理 8.3 (長完全性) 単位的可換環 R 上の加群 G に対し、次が成立する。

(簡約ホモロジー) $\tilde{H}_*(\ ;G)$ は定理 7.2 で得られた *cofibre* 列から長完全列を誘導する。

(簡約コホモロジー) $\tilde{H}^*(\ ;G)$ は定理 7.2 で得られた *cofibre* 列から長完全列を誘導する。

定理 8.4 (切除性) 単位的可換環 R 上の加群 G と相対 *CW* 複体 (X, A) に対して、次が成立する。

(簡約ホモロジー) $H_*(X, A; G) = \tilde{H}_*(X_+/A_+; G)$ で、特に $H_*(X; G) = \tilde{H}_*(X_+; G)$ となる。

(簡約コホモロジー) $H^*(X, A; G) = \tilde{H}^*(X_+/A_+; G)$ で、特に $H^*(X; G) = \tilde{H}^*(X_+; G)$ となる。

定理 8.5 (懸垂同型) 単位的可換環 R 上の加群 G と *CW* 複体 X に対して、次が成立する。

(簡約ホモロジー) 自然同型 $\tilde{H}_i(\Sigma X; G) \cong \tilde{H}_{i-1}(X; G), (i \in \mathbb{Z})$ が成立する。

(簡約コホモロジー) 自然同型 $\tilde{H}^i(\Sigma X; G) \cong \tilde{H}^{i-1}(X; G), (i \in \mathbb{Z})$ が成立する。

定理 8.6 (加法性) 単位的可換環 R 上の加群 G と *CW* 複体の族 $X_\lambda, \lambda \in \Lambda$ に対して、次が成立する。

(簡約ホモロジー) 自然同型 $\tilde{H}_*(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda; G) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \tilde{H}_*(X_\lambda; G)$ が成立する。

(簡約コホモロジー) 自然同型 $\tilde{H}^*(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda; G) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} \tilde{H}^*(X_\lambda; G)$ が成立する。

ただし、Λ が有限集合ならば $\prod_{\lambda\in\Lambda} \tilde{H}^*(X_\lambda; G) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \tilde{H}^*(X_\lambda; G)$ である。

定理 8.7 (次元性) 単位的可換環 R 上の加群 G に対して、次が成立する。

(簡約ホモロジー) $\tilde{H}_0(S^0_B; G) = R$ かつ $\tilde{H}_i(S^0_B; G) = 0, (0 \neq i \in \mathbb{Z})$ である。

(簡約コホモロジー) $\tilde{H}^0(S^0_B; G) = R$ かつ $\tilde{H}^i(S^0_B; G) = 0, (0 \neq i \in \mathbb{Z})$ である。

8.2 （余）積の構造

これ以後、単位的可換環 R に対して $G = R$ であるものとする。　まず R-加群 M, N の R 上の tensor 積 $M \otimes_R N$ が次で与えられる。

(tensor 積) $M \otimes_R N = \langle M \times N$ の要素で生成される自由 R-加群$\rangle / \sim_{tensor}$,

ただし、$\sim_{tensor}$ は $(a{\cdot}m + a'{\cdot}m', b{\cdot}n + b'{\cdot}n') \sim_{tensor} ab(m,n) + ab'(m,n') + a'b(m',n) + a'b'(m',n')$ で生成される同値関係である。　このとき、(m,n) の同値類を $m \otimes n$ で表す。

次に、次数付き R-加群 M_*, N_* に対して、その tensor 積 $M_* \otimes_R N_*$ を次の式で定める。

(次数付き tensor 積) $(M_* \otimes_R N_*)_i = \displaystyle\sum_{\substack{j,k \in \mathbb{Z}/d \\ i=j+k \bmod d}} M_j \otimes_R N_k$ (有限直和) , $i \in \mathbb{Z}/d.$

さらに、準同型 $t = t_A : A \otimes_R A \to A \otimes_R A$ を $t(x \otimes y) = (-1)^{\deg(x)\deg(y)} y \otimes x$ で定義する。

また、同型 $R \otimes_R A \cong A \cong A \otimes_R R$ により、これらを同一視することがある。　この次数付き tensor 積を用いて (余) 代数の構造を定義する：

(次数付き可換結合的 R-代数) 次数付き R-加群 A が次数付き可換結合的 R-代数とは、次の条件を満たす R-準同型 $\mu : A \otimes_R A \to A$ が存在することである。

(1) $\mu \circ (1 \otimes \eta) = 1 = \mu \circ (\eta \otimes 1)$ をみたす R-準同型 $\eta : R \to A$ が存在する。

(2) $\mu(\mu(x \otimes y) \otimes z) = \mu(x \otimes \mu(y \otimes z))$ を満たす。

(3) $\mu(x \otimes y) = \mu \circ t(x \otimes y)$ を満たす。

(次数付き可換結合的 R-余代数) 次数付き R-加群 A が次数付き可換結合的 R-余代数とは、次の条件を満たす R-準同型 $\psi : A \to A \otimes_R A$ が存在することである。

(1) $(1 \otimes \varepsilon) \circ \psi = 1 = (\varepsilon \otimes 1) \circ \psi$ を満たす R-準同型 $\varepsilon : A \to R$ が存在する。

(2) $(\psi \otimes 1) \circ \psi = (1 \otimes \psi) \circ \psi$ を満たす。

(3) $\psi = t \circ \psi$ を満たす。

この次数付き可換結合的 R-代数のなす圏を ${}_R\underline{\mathcal{GA}}$ で表す。　常 (コ) ホモロジーはさらに次の構造を持つ。

定理 8.8 **(外部積)** **単位元を持つ可換環 R に対し、次が成立する。**

(ホモロジー) **自然な鎖準同型** $\rho : C_*(X \times_B Y; R) \to C_*(X;R) \otimes_{C_*(B;R)} C_*(Y;R)$ (*Alexander-Whitney* の写像)**の誘導する自然な準同型** $\rho_* : H_*(X \times_B Y; R) \to H_*(X;R) \otimes_{H_*(B;R)} H_*(Y;R)$ **は次を満たす。**

(1) ρ は $X=B$ または $Y=B$ のとき恒等写像を与える。

(2) $(\rho_*\otimes 1)\circ\rho_* = (1\otimes\rho_*)\circ\rho_* : H_*(X\times Y\times Z;R) \to H_*(X;R)\otimes_{H_*(B;R)}H_*(Y;R)\otimes_{H_*(B;R)}H_*(Z;R)$

(3) 交換写像 $T : X\times_B Y \to Y\times_B X$ は $\rho_*\circ T_* = t\circ\rho_*$ を満たす。

(コホモロジー) 自然な準同型 $\rho^* : H^*(X;R)\otimes_{H^*(B;R)}H^*(Y;R) \to H^*(X\times_B Y;R)$ が次を満たす。

(1) ρ^* は $X=B$ または $Y=B$ のとき恒等写像を与える。

(2) $\rho^*\circ(\rho^*\otimes 1) = \rho^*\circ(1\otimes\rho^*) : H^*(X;R)\otimes_{H^*(B;R)}H^*(Y;R)\otimes_{H^*(B;R)}H^*(Z;R) \to H^*(X\times_B Y\times_B Z;R)$

(3) 交換写像 $T : X\times_B Y \to Y\times_B X$ は $\rho^*\circ t = T_*\circ\rho^*$ を満たす。

系 8.8.1 *(1)* $H_*(X;R)$ は $\mu = \rho_*\circ\Delta_* : H_*(X;R) \to H_*(X;R)\otimes_{H^*(B;R)}H_*(X;R)$ により次数付き可換結合的 R-余代数となる。

(2) $H^*(X;R)$ は $\psi = \Delta^*\circ\rho^* : H^*(X;R)\otimes_{H^*(B;R)}H^*(X;R) \to H^*(X;R)$ により次数付き可換結合的 R-代数となる。

上の性質から任意の B 基点付き空間 Y に対して $H^*(Y;R) = \bar{H}^*(Y;R)\oplus H^*(B;R)$ より

$$H^*(X\times_B X;R) = H^*(X\vee_B X;R)\oplus\tilde{H}^*(X\wedge_B X;R)$$

が成立する。さらに

$$H^*(X;R)\otimes_{H^*(B;R)}H^*(X;R) = H^*(X\vee_B X;R)\oplus\bar{H}^*(X;R)\otimes_{H^*(B;R)}\bar{H}^*(X;R)$$

より、準同型 $\Delta^*\circ\rho^*$ の $\bar{H}^*(X;R)\otimes_{H^*(B;R)}\bar{H}^*(X;R)$ への制限は準同型 $\bar{\Delta}^*$ を経由する。

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}^*(X;R)\otimes_{H^*(B;R)}\tilde{H}^*(X;R) \arrow[r, "\rho^*|"] \arrow[d, hook] & \tilde{H}^*(X\wedge_B X;R) \arrow[r, "\bar{\Delta}^*"] \arrow[d, hook] & \tilde{H}^*(X;R) \arrow[d, hook] \\
H^*(X;R)\otimes_{H^*(B;R)}H^*(X;R) \arrow[r, "\rho^*"] & H^*(X\times_B X;R) \arrow[r, "\Delta^*"] & H^*(X;R)
\end{tikzcd}$$

ホモロジーにおいても同様に

$$H_*(X;R)\otimes_{H_*(B;R)}H_*(X;R) = H_*(X\vee_B X;R)\oplus\bar{H}_*(X;R)\otimes_{H_*(B;R)}\bar{H}_*(X;R)$$

より、準同型 $\rho_*\circ\Delta_*$ の像の $\bar{H}_*(X;R)\otimes_{H_*(B;R)}\bar{H}_*(X;R)$ への射影は準同型 $\bar{\Delta}_*$ を経由する。

定理 8.9 R が体のとき、ρ は鎖ホモトピー同値を与え、ρ_* *(*ρ^**)* は(コ)ホモロジー群の同型となる。

8.3 一般 (コ) ホモロジー論とコホモロジー作用素

Λ を次数付き可換結合的 R-代数として、次数付きの意味での Λ の作用を受ける次数付き加群すなわち Λ-加群の圏を ${}_\Lambda\underline{\mathcal{GM}}_d$ とし、$M_* \in {}_\Lambda\underline{\mathcal{GM}}_d$ とする。

定義 8.10　*(1)* h^* が係数 M_* の $\underline{\mathcal{CW}}_B^B$ 上の一般コホモロジー論であるとは、定理 *8.1* $\sim$ 定理 *8.6* の簡約コホモロジーの性質が、$\tilde{H}^*(\ ;G)$ を $h^*(\ )$ に置き換え、また定理 *8.7*の簡約コホモロジーの性質が、G を M_* に置き換えて成立することである。　ただし、定理 *8.4* は簡約でないコホモロジー論の定義とみなす。

(2) h_* が係数 M_* の $\underline{\mathcal{CW}}_B^B$ 上の一般ホモロジー論であるとは、定理 *8.1* $\sim$ 定理 *8.6* の簡約ホモロジーの性質が、$\tilde{H}_*(\ ;G)$ を $h_*(\ )$ に置き換え、また定理 *8.7*の簡約ホモロジーの性質が、G を M_* に置き換えて成立することである。ただし、定理 *8.4* は簡約でないホモロジー論の定義とみなす。

注 8.11 0 次元に集中した次数付き加群 G を係数とする $\underline{\mathcal{CW}}_B^B$ 上の一般コホモロジー論は $\tilde{H}^*(\ ;G)$ に限る。

次を満たす自然な準同型 κ が存在するとき、h^* は（係数 Λ の）乗法的コホモロジー論と呼ばれる。

(1) κ は $X = \{*\}_+$ または $Y = \{*\}_+$ のとき恒等写像を与える。

(2) $\kappa\circ(\kappa\otimes 1) = \kappa\circ(1\otimes\kappa) : h^*(X)\otimes_{h^*(B)}h^*(Y)\otimes_{h^*(B)}h^*(Z) \to h^*(X\wedge_B Y\wedge_B Z)$

(3) 交換写像 $T : X\wedge_B Y \to Y\wedge_B X$ は $\kappa\circ t = T_*\circ\kappa$ を満たす。

このとき、$h^*(X_+)$ は自然に次数付き可換結合的 Λ-代数の構造を持つ。

定義 8.12 *(*安定*)* コホモロジー作用素を定義する。

(コホモロジー作用素)　k, n を整数とするとき、$\theta(X) : h^k(X) \to h^{k+n}(X)$ という形の自然変換 $\theta : h^k \to h^{k+n}$ を次数 n のコホモロジー作用素とよぶ。

(安定コホモロジー作用素)　n を整数と、次数 n のコホモロジー作用素の列 $\theta_k : h^k \to h^{k+n}$ が $\theta_k(\Sigma X) = \theta_{k-1}(X)$ を満たすとき、$\theta = \{\theta_k\}$ を次数 n の安定コホモロジー作用素という。

h^*h を安定コホモロジー作用素の全体とし、次数 n の安定コホモロジー作用素全体を $(h^*h)_n$ とおく。

演習 8.13 h^* が係数 Λ の乗法的コホモロジー論のとき、h^*h が次数付き Λ-代数となることを示せ。

注 8.14 係数環として標数 0 の体を取ると、理論はかなり単純化される。　例えば非安定作用素もただ一度の懸垂によって安定化されるのである。　標語的に言うと、ただ一度の懸垂によって有理ホモトピー論は自明なものになってしまう。

9 ホモトピー集合

9.1 ホモトピー集合

圏 $\underline{K}^\phi$ の空間対 $(X,K),(Y,L)$ に対して、(X,K) から (Y,L) への対写像の全体をホモトピーで分類して得られる集合を $[X,K;Y,L]_\phi$ で表す。　特に圏 $\underline{K}_B$ の空間対のみを考える場合は、集合 $[X,K;Y,L]_\phi$ を $[X,K;Y,L]_B$ で表し、B 自由ホモトピー集合と呼ぶ。また圏 $\underline{K}_B^B$ の空間対のみを考える場合は、集合 $[X,K;Y,L]_\phi$ を $[X,K;Y,L]_B^B$ で表し B 基点付きホモトピー集合と呼ぶ。

ϕ 基点付き空間対 (X,K) を固定し、$(Y,L)\in\underline{K}_2^\phi$ に対して集合 $[Y,L;X,K]_\phi$ を対応させる対応を $[-,-;X,K]_\phi$ で表し、$(Y,L)\in\underline{K}_2^\phi$ に対して集合 $[X,K;Y,L]_\phi$ を対応させる対応を $[X,K;-,-]_\phi$ で表す。

演習 9.1　*(1)* **対応** $[-,-;X,K]_\phi$ **は圏** $\underline{K}_2^\phi$ **から集合の圏** $\underline{S}$ **への反変関手を与えることを示せ。**

(2) **特に対応** $[-,-;X,K]_B^B$ **は圏** $\underline{K}_{B2}^B$ **から基点付きの集合の圏** $\underline{S}_*$ **への反変関手を与えることを示せ。**

演習 9.2　*(1)* **対応** $[X,K;-,-]_\phi$ **は圏** $\underline{K}_2^\phi$ **から集合の圏** $\underline{S}$ **への共変関手を与えることを示せ。**

(2) **特に対応** $[X,K;-,-]_B^B$ **は圏** $\underline{K}_{B2}^B$ **から基点付きの集合の圏** $\underline{S}_*$ **への共変関手を与えることを示せ。**

ただし $\underline{S}_*$ **は基点付きの集合の圏である。**

事実上、我々が変形したり切り貼りを行える空間は CW 複体に限られる。　その観点から見れば、CW 複体からの写像を考えたときに同等となる空間に対して、我々が違いを見いだすことは難しい。

定義 9.3 **圏** $\underline{K}_{B2}^B$ **の空間対の間の写像** $f:(X,K)\to(Y,L)$ **は、任意の** B **基点付き** *CW* **対** (Z,M) **に対してホモトピー集合の全単射** $f_*:[Z,M;X,K]_B^B\to[Z,M;Y,L]_B^B$ **を誘導するとき、弱** *(***ホモトピー***)* **同値写像と呼ばれる。**

(1) **圏** $\underline{K}_{B2}^B$ **の空間対** $(X,K),(Y,L)$ **が弱同値とは、空間対** (Z,M) **と二つの弱同値写像** $\varphi:(Z,M)\to(X,K)$ **と** $\psi:(Z,M)\to(Y,L)$ **が存在することである。**

(2) **写像** $f_1:(X_1,K_1)\to(Y_1,L_1)$, $f_2:(X_2,K_2)\to(Y_2,L_2)$ **が弱同値とは、写像** $f_0:(X_0,K_0)\to(Y_0,L_0)$ **と弱同値写像** $\varphi_i:(X_0,K_0)\to(X_i,K_i)$ **と** $\psi_i:(Y_0,L_0)\to(Y_i,L_i)$ *(*$i=1,2$*)* **で** $f_i\circ\varphi_i\sim\psi_i\circ f_0$ *(*$i=1,2$*)* **を満たすものが存在することである。**

演習 9.4 **空間対の間の弱同値という関係が同値関係である事を示せ。**

10 ホモトピー群

10.1 基本群

定理 10.1 **群の圏** $\underline{\mathcal{G}}$ **においては、与えられた二つの準同型** $f_1 : G_0 \to G_1$ **と** $f_2 : G_0 \to G_2$ **に対して、次を満たす群** $G = G_1 *_{G_0} G_2$ **(融合積) と準同型** $j_1 : G_1 \to G$ **と** $j_2 : G_2 \to G$ **が存在する。**

(1) **準同型** $g_1 : G_1 \to G'$ **と** $g_2 : G_2 \to G'$ **が条件** $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$ **を満たすならば、**$g \circ j_1 = g_1$ **かつ** $g \circ j_2 = g_2$ **を満たす準同型** $g : G \to G'$ **が一意的に存在する。**

$$\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & G_1 \arrow[d, "j_1"'] \arrow[ddr, dotted, "\forall_{g_1}"] & \\
G_2 \arrow[r, "j_2"] \arrow[drr, dotted, "\forall_{g_2}"'] & G \arrow[dr, dotted, "\exists_g"] & \\
 & & G'
\end{tikzcd}$$

小論では、Van Kampen の定理として知られる定理の最も弱い形しか必要としないので、一般の融合積の構成についてはここでは述べないが、自由積は次のように構成される： $G_0 = 1$ で、群 G_1, G_2 の表示が $G_i = \langle S_i \,|\, R_i \rangle$ $(i = 1, 2)$ と与えられているとき、$G_1 * G_2 = G_1 *_{G_0} G_2$ の表示が $G_1 * G_2 = \langle S_1 \cup S_2 \,|\, R_1, R_2 \rangle$ で与えられる。

定理 10.2 (**Van Kampen**) $\underline{\mathcal{CW}_*}$ **の三系** $(X; K, L)$ **に対し、**$K, L, K \cap L$ **が全て弧状連結ならば、同型** $\pi_1(K \cup L) \cong \pi_1(K) *_{\pi_1(K \cap L)} \pi_1(L)$ **が存在する。 特に** $\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y)$ **である。**

系 10.2.1 **三系** $(X; K, L)$ **において、**K, L **が単連結かつ** $K \cap L$ **が弧状連結ならば** X **は単連結である。**

従って、例えば S^1 の n 個の一点和の基本群は n 個の要素を生成元とする自由群である。

10.2 高次ホモトピー群と Hurewicz の定理

基点付き空間 X 上の基点での loop 全体の空間 $\Omega(X)$ の連結成分は X 上の基点での loop のホモトピーによる同値類であると見なされる。 従って、$\pi_0(\Omega(X))$ は X の基本群 $\pi_1(X)$ と同一視される。 この π_0 と π_1 の関係を次のように拡張する形で、高次のホモトピー群 $\pi_n(X)$ が帰納的に与えられる：

(1) $\pi_0(X) = \langle X$ の連結成分の全体$\rangle$,

(2) $\pi_{i+1}(X) = \pi_i(\Omega(X)) \cong \pi_0(\Omega^{i+1} X)$.

空間 X の基本群の要素 $[u]$ を取れば、u は連続写像 $u : S^1 \to X$ と見なせ、1 次元ホモロジー群の間に準同型 $u_* : H_1(S^1) \to H_1(X)$ を誘導する。　そこで、$\rho(u) = u_*([S^1])$ とおく。

定理 10.3 (**Hurewicz**) X **が弧状連結のとき、**$\rho : \pi_1(X) \to H_1(X)$ **は全射準同型であり、その核は交換子群に一致する。　従って** $\pi_1(X)_{ab} \cong H_1(X)$ **である。**

空間や写像に対する連結性を次のように定義する。

定義 10.4　**(空间)　空间** X **が** d-**連结であるとは、**X **にホモトピー同値な** *CW* **複体** Y **でその** d-**骨格が基点のみからなるものが存在することとする。**

(写像)　写像 $f : X \to Y$ **が** d-**連结であるとは、***homotopy fibre* $\mathcal{F}_f$ **が** d-**連结であることとする。**

(空间对)　空间对 (X, K) **が** d-**連结であるとは、包含写像** $i : K \hookrightarrow X$ **が** d-**連结であることとする。**

例 10.5 **例えば** n **次元球面** S^n **は** $S^n = \{*\} \cup e^n$ **という** *CW* **分割を持つから、**$n{-}1$ **連结である。**

空間 X の $\pi_n(X) = \pi_0(\Omega^n(X))$ の要素 $[u]$ を取れば、u は連続写像 $u : S^n \to X$ と見なせ、n 次元ホモロジー群の間に準同型 $u_* : H_n(S^n) \to H_n(X)$ を誘導する。　そこで、$\rho_n(u) = u_*([S^n])$ とおく。　このとき、定理 10.3 を拡張した次の定理が成立する：

定理 10.6 (**Hurewicz**) n **が** 2 **以上で** X **が** $n{-}1$ **連结のとき、**$\rho_n : \pi_n(X) \to H_n(X)$ **は同型であり、**$\rho_{n+1} : \pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X)$ **は全射である。**

10.3 ホモトピー完全列

空間 X の懸垂が $\Sigma X = X \times [0,1]/ \sim_{susp} = X \wedge S^1$ という形で与えられ、基点付きの指数定理を用いれば、$[X \wedge S^1, Y] \cong [X, \Omega Y]$ となる。　従って次の命題を得る。

命題 10.7 **基点付き空间** X, Y **に対して、**$[\Sigma X, Y]$ **と** $[X, \Omega Y]$ **は自然に同一視できる。**

さらに $\Sigma X = X \wedge S^1 = X \wedge$ □ より、S^1 = □ の中央をピンチする写像 $\mu :$ □ $\to$ 8 = □ $\vee$ □ は、$1_X \wedge \mu :$ $X \wedge$ □ $\to X \wedge$ □ $\vee X \wedge$ □ を誘導するから、任意の写像 $f, g : X \wedge$ □ $\to Y$ に対して $f + g = (f \vee g) \circ (1_X \wedge \mu)$ により二項演算が $[\Sigma X, Y]$ に与えられ、次が成立する：

命題 10.8 **空间** X, Y **に対して、基点付き集合** $[\Sigma X, Y] \cong [X, \Omega X]$ **は、自然に群の構造を持ち、**$[\Sigma^2 X, Y] \cong [\Sigma X, \Omega X] \cong [X, \Omega^2 X]$ **はアーベル群の構造を持つ。**

ここで $\Sigma S^i = S^{i+1}$ であることに注意すれば、任意の空間 X と整数 i に対して $\pi_i(X) \cong [S^0, \Omega^i X]$ が成立する。　ただし、$\pi_i(X) \cong [S^i, X]$ (i-次元ホモトピー群) とする。

系 10.8.1 $\pi_i(X)$ は、$i = 0$ で基点付き集合、$i = 1$ で群、$i \geq 2$ でアーベル群となる。

さて、$\underline{K}^*$ における指数法則を用いれば Puppe の fibre 列より次を得る。

系 10.8.2 写像 $f : Y \to X$ に対して次は長完全列である。

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(Y) \xrightarrow{f_*} \pi_{i+1}(X) \longrightarrow \pi_i(\mathcal{F}_f) \longrightarrow \pi_i(Y) \xrightarrow{f_*} \pi_i(X) \longrightarrow \cdots$$

特に f が中への同相のとき、この系列の $\pi_i(\mathcal{F}_f)$ を $\pi_{i+1}(X, Y)$ などと表示する。

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(Y) \xrightarrow{f_*} \pi_{i+1}(X) \longrightarrow \pi_{i+1}(X, Y) \longrightarrow \pi_i(Y) \xrightarrow{f_*} \pi_i(X) \longrightarrow \cdots$$

定理 10.9 弧状連結な空間の間の写像について、これが弱同値写像となるには、全ての次元でホモトピー群の同型を誘導することが必要かつ十分である。

弧状連結な空間同士が弱同値であることはホモトピー同値を意味するであろうか？　CW 複体でない場合には反例が存在するが、CW 複体の場合には次の J. H. C. Whitehead の定理がこれに肯定的に答える。

定理 10.10 (J. H. C. Whitehead) 弧状連結な *CW* 複体 X, Y の間の写像 $f : X \to Y$ が全ての次元のホモトピー群の同型を誘導するならば、f はホモトピー同値である。

定義 10.11 特に *fibration* に弱同値な写像を準 *fibration (quasi-fibration)* などと呼ぶことがある。

10.4 Blakers-Massey の定理

次の定理は Freudenthal の懸垂定理と呼ばれる。

定理 10.12 (Freudenthal) 懸垂の誘導する準同型 $\Sigma_* : \pi_{q-1}(S^{r-1}) \to \pi_q(S^r)$ は、$q < 2r-2$ で同型で $q = 2r-2$ で全射である。

さて、次の homotopy pullback を考える：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(f,g) & \xrightarrow{q_0} & Y \\ {\scriptstyle q_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Z & \xrightarrow[g]{} & X \end{array}$$

系 10.12.1 *このとき、次の長完全列が従う。*

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(Y)\oplus\pi_{i+1}(Z) \xrightarrow{f_*} \pi_{i+1}(X) \longrightarrow \pi_i(\mathcal{P}(f,g)) \longrightarrow \pi_i(Y)\oplus\pi_i(Z) \xrightarrow{f_*} \pi_i(X) \longrightarrow \cdots$$

特に f, g *が中への同相のとき、この系列の* $\pi_i(\mathcal{P}(f,g))$ *を* $\pi_{i+1}(X;Y,Z)$ *などと表示する。*

$$\cdots \longrightarrow \pi_{i+1}(Y)\oplus\pi_{i+1}(Z) \xrightarrow{f_*} \pi_{i+1}(X) \longrightarrow \pi_{i+1}(X;Y,Z) \longrightarrow \pi_i(Y)\oplus\pi_i(Z) \xrightarrow{f_*} \pi_i(X) \longrightarrow \cdots$$

Freudenthal の懸垂定理は、次の Blakers-Massey のホモトピー切除定理の特別な場合である。

定理 10.13 (**Blakers-Massey**) *空間* A *が連結で空間対* (Y,A) *が* n *連結かつ* (Z,A) *が* m *連結* $(n,m \geq 1)$ *のとき、写像* $f : A \to Y$, $g : A \to Z$ *に対し homotopy pushout* $X = \mathcal{I}(f,g)$ *は、Van Kampen の定理より単連結である。　そこで自然な包含写像* $h : Y \hookrightarrow X$ *と* $k : Z \hookrightarrow X$ *の homotopy pullback* $\mathcal{P}(h,k)$ *をとる。*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "j"] \arrow[drr, "f"] \arrow[ddr, "g"'] & & \\
& \mathcal{P}(h,k) \arrow[r, "q_0"'] \arrow[d, "q_1"] & Y \arrow[d, hook, "h"] \\
& Z \arrow[r, hook, "k"'] & X
\end{tikzcd}$$

このとき、自然な包含写像 $j : A \hookrightarrow \mathcal{P}(h,k)$ *に対して次が成立する。*

$$j_* : \pi_i(A) \cong \pi_{i+1}(X;Y,Z), \ (\text{同型}) \qquad \text{if } i < n+m-1,$$

$$j_* : \pi_{n+m-1}(A) \twoheadrightarrow \pi_{n+m}(X;Y,Z). \ (\text{全射}) \qquad \text{if } i = n+m-1,$$

この定理からすぐに導かれ、特に有用と思われる二つの系を挙げておく。

系 10.13.1 *CW 複体* K *が* $(r-2)$*-連結のとき、懸垂の誘導する準同型* $\Sigma_* : \pi_{q-1}(K) \to \pi_q(\Sigma K)$ *は* $q < 2r-2$ *で同型で* $q = 2r-2$ *で全射である。　特に* $K = S^{r-1}$ *の場合が Freudenthal の定理である。*

系 10.13.2 *CW 複体* X *が* $(n-1)$*-連結かつ* $\mathrm{Dim}(X) \leq 2n-1$ *のとき、次の条件を満たす CW 複体* K *が存在する。*

(1) ホモトピー同値 $X \simeq \Sigma K$ *がある。*

(2) K *は* $(n-2)$ *連結かつ* $\langle K$ *の次元*$\rangle$ = $\langle X$ *の次元*$\rangle -1$ *である。*

10.5 一般 Whitehead 積

圏 $\underline{K}_B^B$ における二つの写像 $f : (\mathcal{C}(U), U) \to (X, K)$ と $g : (\mathcal{C}(V), V) \to (Y, L)$ に対して、それらの直積 $f \times_B g$ は、演習 5.19 より次のような写像と考えて良い。

$$f{\times_B}g:(\mathcal{C}(U{*_B}V),U{*_B}V)\longrightarrow(X{\times_B}Y,X{\times_B}L\cup K{\times_B}Y)$$

従って与えられた写像 $\Psi: X{\times_B}L\cup K{\times_B}Y\to Z$ に対して、新しい写像 $[f,g]$ が次で与えられる。

定義 10.14 (一般 Whitehead 積) $[f,g]=\Psi\circ(f{\times_B}g)|_{U*_BV}:U{*_B}V\longrightarrow Z.$

この定義は特別な場合として古典的な定義を含んでいる。

注 10.15　*(1)* 特に $(X,K)=(Y,L)=(Z{:}B)$ のとき、$f:(\Sigma(U){:}B)\to(X{:}B)$ と $(\Sigma(V){:}B)\to(Y{:}B)$ とみなし、

$\Psi=\nabla_B:Z\vee Z\to Z$ に対する $[f,g]:U{*_B}V=\Sigma(U{\wedge_B}V)\to Z$ は *fibrewise* な一般 *Whitehead* 積となる。

(2) さらに、特に $U=S_B^{m-1}$ かつ $V=S_B^{n-1}$ のとき、$[f,g]:S_B^{m+n-1}\to Z$ は *fibrewise* な *Whitehead* 積となる。

命題 10.16 $f,f_1\sim f_2:(\mathcal{C}(U),U)\to(X,K),g,g_1,g_2:(\mathcal{C}(V),V)\to(Y,L)$ に対して次が成立する。

(1) $f_1\sim f_2$ かつ $g_1\sim g_2$ のとき、$[f_1,g_1]\sim[f_2,g_2]$ である。

(2) $U=\Sigma(U_0)$ のとき、$[f_1{+}f_2,g]\sim[f_1,g]+[f_2,g]$ である。

(3) $V=\Sigma(V_0)$ のとき、$[f,g_1{+}g_2]\sim[f,g_1]+[f,g_2]$ である。

(4) $T_{C,D}:(\mathcal{C}(C),C){\times}(\mathcal{C}(D),D)\to(\mathcal{C}(D),D){\times}(\mathcal{C}(C),C)$ を $T_{C,D}(x,y)=(y,x)$ により定義する。$U=\Sigma(U_0)$, $V=\Sigma(V_0),W=\Sigma(W_0)$ のとき、$f:(\mathcal{C}(U),U)\to(X,K),g:(\mathcal{C}(V),V)\to(Y,L),h:(\mathcal{C}(W),W)\to(Z,M)$ に対して次が成立する。

$$[f,[g,h]]+[g,[h,f]]\circ(\mathbb{1}\times T_{U,W})(T_{U,V}\times\mathbb{1})+(-1)^{mn}[h,[f,g]]\circ(T_{U,W}\times\mathbb{1})(\mathbb{1}\times T_{V,W})\sim *$$

定義 10.17　*(1)* $[-,-]:[\Sigma(U),X]{\times}[\Sigma(V),X]\to[\Sigma(U\wedge V),X],\quad[\alpha,\beta]=\overline{[f,g]},\ \alpha=\bar f,\beta=\bar g,$

(2) $[-,-]:\pi_m(X){\times}\pi_n(X)\to\pi_{m+n-1}(X),\quad[\alpha,\beta]=\overline{[f,g]},\ \alpha=\bar f,\beta=\bar g.$

注 10.18 上の *(2)* は、$m\geq2$ のとき第一成分に関して線形で、$n\geq2$ のとき第二世分に関して線形である。

この相対版を次の様に定義しよう：　圏 $\underline{\mathcal{K}}_B^B$ における二つの写像 $f:(\mathcal{C}(\Sigma(U)),\Sigma(U))\to(X,K)$ と $g:(\mathcal{C}(\Sigma(V)),\Sigma(V))\to(Y,L)$ に対して、まずこれらが次の条件を満たす写像であるものと考える。

$$f(\mathcal{C}_+(U))=*,\qquad g(\mathcal{C}_+(V))=*.$$

ただし、$\mathcal{C}_+(W)=\{[t,w]\in\mathcal{C}(W)\,|\,0\leq t\leq\frac12,\,w\in W\}$ かつ $\mathcal{C}_-(W)=\{[t,w]\in\mathcal{C}(W)\,|\,\frac12\leq t\leq1,\,w\in W\}$ とする。　さらに圏 $\underline{\mathcal{K}}_B^B$ における二つの写像 $k:\Sigma(V)\to K$ と $\ell:\Sigma(U)\to L$ に対して、$f{\times_B}k$ と $\ell{\times_B}g$ は

$$f{\times_B}k:(\mathcal{C}(\Sigma(U)){\times_B}\mathcal{C}(V),\mathcal{C}(\Sigma(U)){\times_B}V\cup\mathcal{C}_+(U){\times_B}\mathcal{C}(V),\partial(\mathcal{C}_-(U){\times_B}\mathcal{C}(V)))\to(X{\times_B}K,X{\vee_B}K,K\vee_B K),$$

$$\ell{\times_B}g:(\mathcal{C}(U){\times_B}\mathcal{C}(\Sigma(V)),U{\times_B}\mathcal{C}(\Sigma(V))\cup\mathcal{C}(U){\times_B}\mathcal{C}_+(V),\partial(\mathcal{C}(U){\times_B}\mathcal{C}_-(V)))\to(L{\times_B}Y,L{\vee_B}Y,L\vee_B L).$$

と考えて良い。　従って、二つの新しい相対写像 $[f,k]^r$ と $[\ell,g]_r$ が次で与えられる。

定義 10.19 (**一般相対** Whitehead **積**)　*(1)* $\partial(\mathcal{C}_-(U)\times_B\mathcal{C}(V))\approx U*_BV$ **であることに注意して**

$$[f,k]^r=\nabla_B\circ(f\times_Bk)|_{\mathcal{C}(\Sigma(U))\times_BV\cup\mathcal{C}_+(U)\times_B\mathcal{C}(V)}:(\mathcal{C}(\Sigma(U))\times_BV\cup\mathcal{C}_+(U)\times_B\mathcal{C}(V),U*_BV)\longrightarrow(X,K)$$

(2) $\partial(\mathcal{C}(U)\times_B\mathcal{C}_-(V))\approx U*_BV$ **であることに注意して**

$$[\ell,g]_r=\nabla_B\circ(\ell\times_Bg)|_{U\times_B\mathcal{C}(\Sigma(V))\cup\mathcal{C}(U)\times_B\mathcal{C}_+(V)}:(U\times_B\mathcal{C}(\Sigma(V))\cup\mathcal{C}(U)\times_B\mathcal{C}_+(V),U*_BV)\longrightarrow(Y,L)$$

この定義も特別な場合として古典的な定義を含んでいる。

注 10.20　*(1)* **特に** $U=S_B^{m-1}$ **かつ** $V=S_B^{n-1}$ **のとき、**$[f,k]:(D_B^{m+n-1},S_B^{m+n-2})\to(X,K)$ **および** $[\ell,g]:(D_B^{m+n-1},S_B^{m+n-2})\to(Y,L)$ **は** *fibrewise* **な相対** *Whitehead* **積となる。**

命題 10.21 $f,f_1,f_2:(\mathcal{C}(\Sigma(U)),\Sigma(U))\to(X,K)$, $g,g_1,g_2:(\mathcal{C}(\Sigma(V)),\Sigma(V))\to(Y,L)$ **および** $k,k_1,k_2:\Sigma(V)\to K,\ell,\ell_1,\ell_2:\Sigma(U)\to L$ **に対して次が成立する。**

(1) $f_1\sim f_2$ **かつ** $k_1\sim k_2$ **のとき、**$[f_1,k_1]^r\sim[f_2,k_2]^r$ **である。**

(2) $g_1\sim g_2$ **かつ** $k_1\sim k_2$ **のとき、**$[\ell_1,g_1]_r\sim[\ell_2,g_2]_r$ **である。**

(3) $U=\Sigma(U_0)$ **のとき、**$[f_1{+}f_2,k]^r\sim[f_1,k]^r+[f_2,k]^r$ **かつ** $[\ell_1{+}\ell_2,g]_r\sim[\ell_1,g]_r+[\ell_2,g]_r$ **である。**

(4) $V=\Sigma(V_0)$ **のとき、**$[\ell,g_1{+}g_2]_r\sim[\ell,g_1]_r+[\ell,g_2]_r$ **かつ** $[f,k_1{+}k_2]^r\sim[f,k_1]^r+[f,k_2]^r$ **である。**

定義 10.22 **写像** f **のホモトピー類を** $\bar{f}$ **で表すとき、次の対応が得られる。**

(1) $[-,-]^r:[\mathcal{C}(\Sigma(U)),\Sigma(U);X,K]\times[\Sigma(V),K]\to[\mathcal{C}(\Sigma(U)),\Sigma(U);X,K]$,　$[\alpha,\beta]^r=\overline{[f,k]^r}$, $\alpha=\bar{f},\beta=\bar{k}$,

(2) $[-,-]_r:[\Sigma(U),X]\times[\mathcal{C}(\Sigma(V)),\Sigma(V);Y,L]\to[\mathcal{C}(\Sigma(V)),\Sigma(V);Y,L]$,　$[\alpha,\beta]_r=\overline{[\ell,g]_r}$, $\alpha=\bar{\ell},\beta=\bar{g}$,

(3) $[-,-]^r:\pi_{m+1}(X,K)\times\pi_n(K)\to\pi_{m+n}(X,K)$,　$[\alpha,\beta]^r=\overline{[f,k]^r}$, $\alpha=\bar{f},\beta=\bar{k}$.

(4) $[-,-]_r:\pi_m(L)\times\pi_{n+1}(Y,L)\to\pi_{m+n}(Y,L)$,　$[\alpha,\beta]_r=\overline{[\ell,g]_r}$, $\alpha=\bar{\ell},\beta=\bar{g}$.

注 10.23 **上の** *(3)* **と** *(4)* **は、**$m\geq2$ **のとき第一成分に関して線形で、**$n\geq2$ **のとき第二成分に関して線形である。**

10.6 非安定群

基点付きの集合の族 $\mathcal{A}=\{A_i;i\geq0\}$ が次の条件を満たすとき、これを非安定群と呼ぶ。

（非安定） (1) A_0 は基点付き集合、　(2) A_1 は群、　(3) $A_i,i\geq2$ は可換群

ここで、基点付きの集合の族 $\mathcal{A}=\{A_i; i\geq 0\}$ が非安定群ならば $\Sigma(\mathcal{A})=\{A_{i+1}; i\geq 0\}$ も非安定群であるが、逆は成り立たない。　また次の条件を満たす非安定群 $\mathcal{A}=\{A_i; i\geq 0\}, \mathcal{B}=\{B_i; i\geq 0\}$ の間の写像の族 $\mathbf{f}=\{f_i : B_i\to A_i; i\geq 0\}$ を非安定準同型と呼び、$\mathbf{f}:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ などと表すことがある。

（非安定） (1) f_0 は基点を保つ写像、　(2) f_1 は群の準同型、　(3) $f_i, i\geq 2$ は可換群の準同型

さて、非安定群 $\{A_i; i\geq 0\}, \{B_i; i\geq 0\}, \{C_i; i\geq 0\}$ の間の非安定準同型 $\{h_i : A'_i\to C_i; i\geq 0\}$, $\{g_i : C_i\to B_i; i\geq 0\}, \{f_i : B_i\to A_i; i\geq 0\}$（ただし、$\{A'_i\}=\Sigma(\mathcal{A}), i\geq 0$）からなる系列

$$\cdots\xrightarrow{h_i} C_i\xrightarrow{g_i} B_i\xrightarrow{f_i} A_i\xrightarrow{h_{i-1}} C_{i-1}\xrightarrow{g_{i-1}}\cdots\xrightarrow{g_1} A_1\xrightarrow{h_0} C_0\xrightarrow{g_0} B_0\xrightarrow{f_0} A_0$$

が、条件 $\operatorname{im} h_i=(g_i)^{-1}(*), \operatorname{im} g_i=(f_i)^{-1}(*), \operatorname{im} f_{i+1}=(h_i)^{-1}(*), i\geq 0$ を満たすとき、この系列を弱完全列と呼ぶ。　この弱完全列が更に次の条件をみたすとき、これを（非安定）完全列と呼ぶ。

(作用) 基点付き集合 C_0 は群 A_1 の右作用 $C_0\times A_1\ni(v,x)\mapsto x+v\in C_0$ を持ち、次が成立する。

(1) $x+(u+v)=(x+u)+v$,　ただし $x\in C_0$、$u,v\in A_1$ は任意である。

(2) $x+0=x$,　ただし $x\in C_0$ は任意であり、0 は群 A_1 の単位元である。

(3) $*+v=h_0(v)$,　ただし $v\in A_1$ は任意であり、$*$ は集合 C_0 の基点である。

(両立) $\forall_{x,y\in C_0}\ g_0(x)=g_0(y) \iff \exists_{v\in A_1}\ \text{s.t.}\ y=x+v.$

命題 10.24 *(1) $[-,-;X,K]^B_B$ は $\underline{\mathcal{K}}^B_{B2}$ から非安定群の圏への反変関手であり、Puppe の cofibre 列を（非安定）完全列にうつす。*

(2) $[X,K;-,-]^B_B$ は $\underline{\mathcal{K}}^B_{B2}$ から非安定群の圏への共変関手であり、Puppe の fibre 列を（非安定）完全列にうつす。

演習 10.25 上の命題を証明せよ。

特に次の条件を満たす非安定群 $\{A_i\}$ を非安定 Lie 環と呼ぶ。

（**Lie bracket**）　任意の $i,j\geq 1$ に対して積 $[-,-]: A_i\times A_j\to A_{i+j-1}$ が存在し、次を満たす。

(1) $[a,b]=(-1)^{\ell m}[b,a]$, $a\in A_\ell, b\in A_m$ if $\ell\geq 2$ or $m\geq 2$,

(2) $[a_1{+}a_2,b]=[a_1,b]+[a_2,b]$, $a_1,a_2\in A_\ell, b\in A_m$ if $\ell\geq 2$,

(3) $[a,b_1{+}b_2]=[a,b_1]+[a,b_2]$, $a\in A_\ell, b_1,b_2\in A_m$ if $m\geq 2$,

(4) $(-1)^{n\ell}[a,[b,c]]+(-1)^{m\ell}[b,[c,a]]+(-1)^{mn}[c,[a,b]]=0$, $a\in A_\ell, b\in A_m, c\in A_n$ if $\ell,m,n\geq 2$.

命題 10.26 *$\pi^W_i(-,-)=[\mathcal{C}(\Sigma^{i-1}W),\Sigma^{i-1}W;-,-]^B_B$ は $\underline{\mathcal{K}}^B_B$ から非安定 Lie 環の圏への共変関手である。*

演習 10.27 上の命題を証明せよ。

第４章　　ＬＳの猫

11 Lusternik と Schnirelmann の猫たち

11.1 幾何的な猫たち

問 11.1 **閉多様体** M **上の** *smooth function* $f : M \to \mathbb{R}$ **の** *critical points* **は、最小限、いったいいくつあるであろうか？**

その最少数を $\mathrm{Crit}(M)$ で表すことにする。　もしさらにこの critical points に「非退化」という条件を付け加えた場合、上の問題は次のように変化する。

問 11.2 **閉多様体** M **上の** *Morse function* $f : M \to \mathbb{R}$ **の** *critical points* **は、最小限、いったいいくつあるであろうか？**

Morse function ならば critical points はハンドル分解に対応し、従ってそのホモトピー論的な下限としては M の胞体分解での胞体の個数が対応する。　しかし始めに述べたような critical points での Hessian の退化があり得る状況では、むしろ embedded closed balls による被覆の枚数に対応する。

定理 11.3 (**Takens 1968 [139]**) **閉多様体** M **に対し** $\mathrm{Crit}(M) \leq \mathrm{Dim}(M){+}1$ **が成立する。**

さて閉多様体 M は、いったい何枚の embedded closed balls で覆い尽くせるであろうか？　その最少数を $\mathrm{Ball}(M)$ で表すと、[139] の証明から次の不等式が得られる。

定理 11.4 (**Takens [139]**) **閉多様体** M **に対し** $\mathrm{Ball}(M) \leq \mathrm{Crit}(M) \leq \mathrm{Dim}(M){+}1$ **が成立する。**

定義 11.5 **位相空間** X **の単体分割は、いったい何枚の可縮な閉集合で覆い尽くせるであろうか？　その最少数から** ***1* を引いた数を** $\mathrm{gCat}(X)$ **で表す。**

これもホモトピー不変でない幾何的な猫の一種である。

11.2 古典的な猫たち

さて幾何的な猫 $\mathrm{gCat}(-)$ をホモトピー不変量としたものが Lusternik と Schnirelmann の猫たちである：まず次の言葉を用意する。　位相空間 X の部分集合 A は、その包含写像 $i : A \hookrightarrow X$ が定置写像に homotopic であるとき categorical (猫的) と呼ばれる。　この概念を「可縮」のかわりに用いることで、次の不変量が得られる。

定義 11.6 (**Lusternik-Schnirelmann [97]**) **閉多様体** M **は、いったい何枚の猫的な閉集合で覆い尽くせるであろうか？　その最少数から** ***1* を引いた数を** $\mathrm{cat}(M)$ **で表す。**

R. Fox [47] によれば、閉多様体 M の Lusternik-Schnirelmann の猫 $\mathrm{cat}(M)$ の定義において、「閉集合」を「開集合」に置き換えても、値は変わらない。　さらに G. W. Whitehead [151, 152], Berstein-Ganea [13] によれば、多様体 M に対しては L–S の猫の定義において、「閉集合」を「包含写像が homotopy 拡張性質を持つ (= NDR) 閉集合」に置き換えても、値は変わらない。　ところが猫的な NDR 閉集合 A に対する包含写像 $i^A : A \hookrightarrow X$ の null-homotopy は、恒等写像 $1_X : X \to X$ を変形して、A を基点に潰す写像 $r^A : X \to X$, $r^A(A) = \{*\}$ にする homotopy に拡張される。　従って $m{+}1$ 枚の猫的な NDR 閉集合によって X が覆われるとき、上の拡張された homotopy を並べることで $m{+}1$ 重対角写像 $\Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X$ を「fat wedge」と呼ばれる部分空間 $\prod^{m+1}_m X = \{(x_0, x_1, ..., x_m) \big| \exists i \text{ s.t. } x_i = *\} \subseteq \prod^{m+1} X$ に圧縮する homotopy が得られる。　本稿ではホモトピー論で標準的な次の定義を <u>L–S の猫</u> の定義として採用する：

定義 11.7 (**G. W. Whitehead [151, 152]**)

$$\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \middle| \begin{array}{l} \textit{The } m{+}1\textit{-fold diagonal map } \Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X \textit{ is compress-} \\ \textit{ible into } \prod^{m+1}_m X \subseteq \prod^{m+1} X. \end{array} \right\}$$

(この $\prod^{m+1}_m(X) = \{(x_0, x_1, ..., x_m) \big| \exists_i x_i = *\}$ は「fat wedge」などと呼ばれる)

定理 11.8 (**L–S [97], Takens [139], James [83], Whitehead [152]**)　*(1)* 閉多様体 M に対して不等式「$\mathrm{cat}(M){+}1 \leq \mathrm{gCat}(M){+}1 \leq \mathrm{Ball}(M) \leq \mathrm{Crit}(M) \leq \mathrm{Dim}(M) + 1$」が成立する。

(2) *CW* 複体 X に対して不等式「$\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{gCat}(X)$」が成立する。

上の (2) に挙げた不等式を用いて、Ganea の「強い」猫が次のように与えられる：

定義 11.9 (**Ganea [50]**) 位相空間 X に対して、X とホモトピー同値な *CW* 複体 Y 全体を考え、$\mathrm{gCat}(Y)$ の最小値を $\mathrm{Cat}(X)$ で表すことにする。

Ganea は cone-length などと呼ばれる「強い」猫のもう一つの定義を与えている。

定義 11.10 (**Ganea [50]**) 位相空間 X に対して、*CW* 複体の連続写像の有限集合 $\{h_n : A_n \to Y_{n-1}\ \ m \geq n \geq 1\}$ で、$Y_0 = \{*\}$ と $Y_n = \mathcal{C}_{h_{n-1}}$ $(m \geq n \geq 1)$ をみたし $Y_m \simeq X$ となるものをすべて考える。　各々の集合はいったいいくつの写像からなるのであろうか？　その最少数を $\mathrm{Cone}(X)$ で表す。

定理 11.11 (**Ganea [50]**) 位相空間 X に対して常に $\mathrm{Cone}(X) = \mathrm{Cat}(X)$ であり、等式 $\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\{\mathrm{Cat}(Y)\,;\, Y \simeq X \vee Z$ *for some* が成立し、従って $\mathrm{Cat}(X) \leq \mathrm{cat}(X) + 1$ である。

略証:（前半）$\mathrm{Cone}(X)$ の値による帰納法を用いて「$\mathrm{Cone}(X) \geq \mathrm{Cat}(X)$」が示される。　また逆向き

の不等号は、$\mathrm{Cat}(X)$ の値による帰納法で示される。

（後半）$\mathrm{cat}(X) \le m$ となる為には、$\mathrm{Cone}(Y) \le m$ をみたす空間 Y で $Y \simeq X \vee Z$ となるものが存在することが必要十分であることが示される。 終り.

系 11.11.1 $\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\{\mathrm{Cat}(Y)\,;\, Y$ は X を支配する$\}$

Cornea は $A_n = \Sigma^n B_n$ に限定して「強い」猫の新たな定義を与えた。

定義 11.12 (**Cornea [25]**) **位相空間 X に対して、CW 複体の連続写像の有限集合 $\{h_n : \Sigma^n B_n \to Y_n \ \ m \ge n \ge 0\}$ で、$Y_0 = \{*\}$ と $Y_{n+1} = \mathcal{C}_{h_n}$ $(m{-}1 \ge n \ge 0)$ をみたし $Y_m \simeq X$ となるものをすべて考える。 各々の集合はいったいいくつの写像からなるのであろうか？ その最少数から 1 を引いた数を $\mathrm{Cl}(X)$ で表すことにする。**

定理 11.13 (**Cornea [27]**) **位相空間 X に対して「$\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{Cat}(X)$」が成立する。**

以上のように「強い猫」は本質的には unique であることが分かっている。

さらに $\Sigma^n B_n$ として球面の一点和をとることで有理ホモトピー論における cone-length $\mathrm{cl}(X)$ に類似した不変量 $\mathrm{Cat}_S(X)$ が得られ、これを用いて $\mathrm{cat}_S(X)$ が次のように定義される。

定義 11.14 $\mathrm{cat}_S(X) = \mathrm{Min}\{\mathrm{Cat}_S(Y)\,;\, Y$ は X を支配する$\}$.

定理 11.15 (**L–S [97], James [83], Takens [139, 140], Ganea [50]**) *(1)* **閉多様体 M に対して、次の不等式が成立する。**

$$\mathrm{Cat}(M) \le \mathrm{cat}(M){+}1 \le \mathrm{Cat}(M){+}1 \le \mathrm{gCat}(M) + 1 \le \mathrm{Ball}(M) \le \mathrm{Crit}(M) \le \mathrm{Dim}(M){+}1.$$

(2) *CW* **複体 X に対して、次の不等式が成立する。**

$$\mathrm{Cat}(X){-}1 \le \mathrm{cat}(X) \le \mathrm{Cat}(X) \le \mathrm{gCat}(X) \le \mathrm{Dim}(X).$$

定理 11.16 *(1)* **閉多様体 M に対して、次の不等式が成立する。**

$$\mathrm{cat}_S(M){+}1 \le \mathrm{Cat}_S(M){+}1 \le \mathrm{CV}(M) \le \mathrm{Dim}(M){+}1.$$

(2) *CW* **複体 X に対して、不等式「$\mathrm{cat}_S(X) \le \mathrm{Cat}_S(X) \le \mathrm{Dim}(X)$」が成立する。**

$|\,\mathrm{Cat}_S(X){-}\,\mathrm{cat}_S(X)|$ などについては不明な点が多く、これらについてこれ以上は立ち入らない。

11.3 古典的な弱い猫たち

L–S の猫や強い猫たちに比べてより弱い不変量ではあるが、より計算の可能性が高い猫たちが幾つか知られている。 そのうちの古典的なものを以下に述べる。

定義 11.17 (**G. W. Whitehead [151, 152]**)

$$\mathrm{wcat}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, \bar{\Delta}^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X \to \bigwedge^{m+1} X \text{ is null-homotopic} \right\}$$

このとき $\bigwedge^{m+1} X = \dfrac{\prod^{m+1} X}{\prod_m^{m+1} X}$ に注意すれば位相空間 X に対して次が成立する。

定理 11.18 (**G. W. Whitehead [151, 152]**) *(1)* $\mathrm{wcat}(X) \leq \mathrm{cat}(X)$.

(2) h^* を乗法的な一般コホモロジー論とする。 $\tilde{h}^*(X)$ のどれかの m 個の元の積が 0 でないならば、$\mathrm{wcat}(X) \geq m$ が成立する。

略証: まず (1) は、$\mathrm{cat}(X) = m$ とすると、$\Delta^{m+1} : X \to \prod^{m+1} X$ が $\prod_m^{m+1} X$ に compressible であることから、reduced diagonal $\bar{\Delta}^{m+1} : X \to \wedge^{m+1} X$ は零ホモトープであり、従って定義から $\mathrm{wcat}(X) \leq m = \mathrm{cat}(X)$ が成立する。 次に (2) は対偶を示す：$\mathrm{wcat}(X) < m$ とすると、定義から $\bar{\Delta}^m : X \to \wedge^m X$ は零ホモトープである。 さらに $\bar{h}^*(X)$ の任意の m 個の元の積は

$$\bar{h}^*(X) \otimes_{h^*} \cdots \otimes_{h^*} \bar{h}^*(X) \longrightarrow \bar{h}^*(X \wedge \cdots \wedge X) \xrightarrow{\bar{\Delta}^{m*}} \bar{h}^*(X)$$

の像に入り、$\bar{\Delta}^{m*} = 0$ なのですべて 0 である。 終り.

定義 11.19 位相空間 X に対して *cup-length* を定める。 *cup-length* は有理ホモトピー論では $\mathrm{c}(-)$ と表示されるが、ここでは *(total) Chern class* との競合を避けて $\mathrm{cup}(-)$ と表示する:

(1) h を乗法的コホモロジー論とするとき、

$$\mathrm{cup}(X; h) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, \forall_{\{u_0, \cdots, u_m \in \tilde{h}^*(X)\}}\, u_0 \cdot u_1 \cdot \cdots \cdot u_m = 0 \right\} \text{ と定める。}$$

(2) $\mathrm{cup}(X) = \mathrm{Max}\left\{ \mathrm{cup}(X; h) \,|\, h \text{ は乗法的コホモロジー論} \right\}$ と定める。

定理 11.20 任意の乗法的コホモロジー論 $h^*(-)$ に対し次の不等式／等式が成立する:

(1) $\mathrm{cup}(X; h) \leq \mathrm{cup}(X) \leq \mathrm{wcat}(X) \leq \mathrm{cat}(X)$.

(2) $\mathrm{cup}(X) = \mathrm{Min}\left\{ m \geq 0 \,\middle|\, \tilde{\Delta}^{m+1} : X \to \wedge^{m+1} X \text{ は } \textit{stably trivial} \right\}$

証明: (1) は定義より明らかである。 そこでここでは (2) を証明する： 始めに m = (右辺) とすれば、cup-length の定義より直ちに $\mathrm{cup}(X) \leq m$ を得る。 次に、逆向きの不等号を示す：まず、空間 X の懸垂 spectrum の多重スマッシュ積 $\bigwedge^i(X) = \bigwedge^i \Sigma^\infty X = \Sigma^\infty \bigwedge^i X$ $(i \geq 0)$ の無限 wedge 和で表される次のよ

うな乗法的 spectrum $\mathcal{E}_X$ をとり、$h_X(-)=\{(-),\mathcal{E}_X\}$ と定義する：

$$\mathcal{E}_X=(S^0)\vee(X)\vee{\bigwedge}^2(X)\vee\cdots\vee{\bigwedge}^m(X)\vee{\bigwedge}^{m+1}(X)\vee\cdots.$$

そして $\iota\in\tilde{h}^*_X(X)=\{(X),\mathcal{E}_X\}$ を wedge 和について $\mathcal{E}_X$ の 2 番目の因子 (X) の $\mathcal{E}_X$ への包含写像で表される要素とすると、$\iota^m=\bar{\Delta}^{m*}(\iota\otimes\cdots\otimes\iota)\in\tilde{h}^*_X(X)=\{(X),\mathcal{E}_X\}$ は $\bar{\Delta}^m:X\to{\bigwedge}^m X$ で代表される $\mathcal{E}_X$ の $m{+}1$ 番目の因子 ${\bigwedge}^m(X)$ の $\mathcal{E}_X$ への包含写像で表される要素なので、m の取り方から non-trivial である。従って $\mathrm{cup}(X)\geq\mathrm{cup}(X;h_X)\geq m$ を得る。 終り.

また位相空間が単連結の場合、これらの弱い猫たちと L–S の猫は全てをp-local で考えることにより、p-local version である $\mathrm{cup_p}(-),\mathrm{wcat}_p(-),\mathrm{cat_p}(-),\mathrm{Cat_p}(-)$ とその間の不等式を得る。

$$\mathrm{cup}(X)\ \leq\ \mathrm{wcat}(X)\ \leq\ \mathrm{cat}(X)\ \leq\ \mathrm{Cat}(X),\quad \mathrm{cup_p}(X)\ \leq\ \mathrm{wcat}_p(X)\ \leq\ \mathrm{cat_p}(X)\ \leq\ \mathrm{Cat_p}(X),$$

$$\mathrm{cup_p}(X)\leq\mathrm{cup}(X),\quad \mathrm{wcat}_p(X)\leq\mathrm{wcat}(X),\quad \mathrm{cat_p}(X)\leq\mathrm{cat}(X),\quad \mathrm{Cat_p}(X)\leq\mathrm{Cat}(X).$$

12 L–S の猫の計算

12.1 L–S の猫の一般的性質

例 12.1 *(1)* $\mathrm{cat}(\{*\})=0$. より一般に可縮な空間 D に対し $\mathrm{cat}(D)=0$ が成立する。

(2) $\mathrm{cat}(S^n)=1$. より一般に懸垂空間 ΣV に対し $\mathrm{cat}(\Sigma V)\leq 1$ が成立する。

(3) 位相空間 X が位相空間 Y を支配すれば、$\mathrm{cat}(X)\geq\mathrm{cat}(Y)$ が成立する。 特に、位相空間 X が位相空間 Y とホモトピー同値ならば、$\mathrm{cat}(X)=\mathrm{cat}(Y)$ が成立する。

(4) *(Varadarajan [148], Hardie [57])* F を *fibre* とする *fibre* 束 $p:E\to B$ は不等式 $\mathrm{cat}(E){+}1\leq(\mathrm{cat}(F){+}1)\cdot(\mathrm{cat}(B){+}1)$ をみたす。

(5) *(Fox [47])* 位相空間 X,Y に対して、$\mathrm{cat}(X\times Y)\leq\mathrm{cat}(X){+}\,\mathrm{cat}(Y)$ が成立する。

定理 12.2 (**Ganea [50]**) $(d{-}1)$ 連結 $(d\geq 2)$ な位相空間 X は $\mathrm{Cat}(X)\leq\dfrac{\mathrm{Dim}(X)}{d}$ を満たす。

略証: X の $(d{-}1)$–skeleton は $\{*\}$ であるとしてよい。 まず $k\geq 0$ に対し X_k を X の $((k{+}1)d-1)$–skeleton とする。 商空間 X_{k+1}/X_k の次元と連結性の関係から、これは何らかの空間 K_k の懸垂である：$X_0=\{*\}$、$X_1\simeq\Sigma K_1$ また $X_{k+1}/X_k\simeq\Sigma K_k$。 よって $X_1\simeq X_0\cup_{h_0}\mathcal{C}(K_0)$, $h_0=*:K_0\to\{*\}$ である。

さて $k \geq 1$ のとき Blakers-Massey の定理から商写像 $p:(X_{k+1},X_k)\to(X_{k+1}/X_k,\{*\})$ は $q<(k{+}2)d{-}1$ で同型となり、$q=(k{+}2)d{-}1$ で全射となる準同形 $p_*:\pi_q(X_{k+1},X_k)\to\pi_q(X_{k+1}/X_k)$ を誘導する。 従って $\Omega(p):\Omega(X_{k+1},X_k)\to\Omega(X_{k+1}/X_k)$ は $(k{+}2)d{-}2$ 連結である。 $\mathrm{Dim}(K_k)\leq(k{+}1)d-2$ より、J. H. C. Whitehead の定理より

$$[\mathcal{C}(K_k),K_k;X_{k+1},X_k]=[K_k,\Omega(X_{k+1},X_k)]\to[K_k,\Omega(X_{k+1}/X_k)]=[\Sigma K_k,\Sigma K_k]$$

は全射となる。 右辺の ΣK_k の恒等写像に対応する写像 $\chi_k\in[\mathcal{C}(K_k),K_k;X_{k+1},X_k]$ を左辺から選び、$h_k=\chi_k|_{K_k}:K_k\to X_k$ とおけば $X_{k+1}\simeq X_k\cup_{h_k}\mathcal{C}(K_k),\ h_k:K_k\to X_k\ (k\geq 1)$ を得る。 これは $\mathrm{Cat}(X_m)\leq m\,(m\geq 0)$ を意味する。 そこで $\mathrm{Dim}(X)=nd{+}r,\ 0\leq r<d$ とすると、$\mathrm{Dim}(X)\leq(n{+}1)d{-}1$ より $\mathrm{Cat}(X)=\mathrm{Cat}(X_n)\leq n\leq\frac{\mathrm{Dim}(X)}{d}$ を得る。 終り.

懸垂空間 ΣA は co-group-like なコホップ空間であり、$i_t:\Sigma A\hookrightarrow\Sigma A\vee\Sigma A$ を第 t 成分への包含写像 $(t=1,2)$、$p_t:\Sigma A\vee\Sigma A\to\Sigma A$ を第 t 成分への射影 $(t=1,2)$ とすると、$p_{s*}i_t=\delta_{s,t}{\cdot}1_{\Sigma A}$ ($\delta s,t$ は Kronecker の δ) が成立する。 また $\mathrm{ev}^X:\Sigma\Omega(X)\to X$ は代入写像とする。

定理 12.3 (**Ganea [51]**) **位相空間** A,B **に対する次の群の系列は、短完全列である:**

$$1\to[\Sigma B,\Omega(\Sigma A){*}\Omega(\Sigma A)]\xrightarrow{[e_1,e_2]_*}[\Sigma B,\Sigma A\vee\Sigma A]\xrightarrow{p_{1*}\times p_{2*}}[\Sigma B,\Sigma A]\times[\Sigma B,\Sigma A]\to 1.$$

(写像 $i_{1*}{\times}i_{2*}$ が $p_{1*}{\times}p_{2*}$ の右逆写像を与える) ただし $[e_1,e_2]$ は $e_1{=}i_1{\circ}\mathrm{ev}^{\Sigma A}$ と $e_2{=}i_2{\circ}\mathrm{ev}^{\Sigma A}$ との一般 Whitehead 積である。 $\Sigma A{\times}\Sigma A$ 上にあるこの fibration を diagonal map $\Delta:\Sigma A\to\Sigma A{\times}\Sigma A$ によって ΣA 上に誘導してできる Ganea [51] の fibration $\Omega(\Sigma A){*}\Omega(\Sigma A)\xrightarrow{p_1^{\Omega\Sigma A}}\Sigma\Omega\Sigma A\xrightarrow{e_1^{\Sigma A}}\Sigma A$ は、Hopf 空間 $\Omega\Sigma A$ に対する Sugawara の Hopf fibration に一致し、次の短完全列を導く:

$$1\to[\Sigma B,\Omega(\Sigma A){*}\Omega(\Sigma A)]\xrightarrow{p_1^{\Omega\Sigma A}{}_*}[\Sigma B,\Sigma\Omega\Sigma A]\xrightarrow{e_1^{\Sigma A}{}_*}[\Sigma B,\Sigma A]\to 1,$$

(写像 $\Sigma_*\,\mathrm{ad}_*$ と準同形 $\sigma(\Sigma A)_*$ とがともに $e_1^{\Sigma A}{}_*$ の右逆写像を与える) ただし $\sigma(\Sigma X)$ は $\sigma(\Sigma X)(t,x)=(t,\ell_x)$, $\ell_x(u)=(u,x)$ により与えられる。 従っていかなる写像 $f:\Sigma B\to\Sigma A$ に対しても $e_1^{\Sigma A}{\circ}\sigma(\Sigma A){\circ}f\simeq f\simeq e_1^{\Sigma A}{\circ}\Sigma\,\mathrm{ad}\,f=e_1^{\Sigma A}{\circ}\Sigma\Omega f{\circ}\sigma(\Sigma B),\mathrm{ad}(f)(b)=f{\circ}\ell_b$ が成立する。

定義 12.4 (**B-H [14]**) **任意の写像** $f:\Sigma B\to\Sigma A$ **に対し** $p_1^{\Omega\Sigma A}{\circ}g\simeq\sigma(\Sigma A){\circ}f-\Sigma\Omega f{\circ}\sigma(\Sigma B)$ **をみたす** $g:\Sigma B\to\Omega(\Sigma A){*}\Omega(\Sigma A)$ **が** *up to homotopy* **で一意的に存在する** *(Saito [120])* **。 この** g **を** $H_1(f)$ **で表し、***Berstein-Hilton* **の** *(***一次の***) Hopf* **不変量と言う。**

注 12.5 *Berstein-Hilton* による本来の *(*高次*) Hopf* 不変量 H_m は *Whitehead* の *criterion* に従い、ホモトピー集合 $[\mathcal{C}(\Sigma(B)), \Sigma(B); \prod^{m+1} X, \prod_m^{m+1} X]$ *(*$m{=}1$ *&* $X{=}\Sigma(A)$ の場合は $[\mathcal{C}(\Sigma(B)), \Sigma(B); \Sigma(A){\times}\Sigma(A), \Sigma(A){\vee}\Sigma(A)]$*)* に値を持つ。 一方で定義 *12.4* における H_1 の定義もループ空間の A_∞ 構造を用いて一般化され高次 *Hopf* 不変量のもう一つの定義を与える。 これら二つの定義が等価であることも *I [73], Stanley [130])* により明らかにされたが、新しい定義にはいくらかの利点がある。 なぜなら我々は A_∞ 構造の強力な性質を使えるようになるからである。

定理 12.6 (**B-H [14]**) 任意の写像 $f : S^q \to S^r$ に対して、接着空間 $Q = S^r \cup_f e^{q+1}$ の *L–S* の猫は「$\mathrm{cat}(Q) = 1 \iff H_1(f) = 0$」かつ「$\mathrm{cat}(Q) = 2 \iff H_1(f) \neq 0$」をみたす。

12.2 L–S の猫の計算と問題

例 12.7 *(1)* $\mathrm{cat}(S^{n_1}{\times}S^{n_2}{\times}\cdots{\times}S^{n_r}) = r, n_i \geq 1,\ (1 \leq i \leq r)$. 特に $\mathrm{cat}(T^r) = r, r \geq 1$.

(2) (Singhof [126, 127]) $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{cup}(U(n)) = \mathrm{cat}(U(n)) = \mathrm{Cat}(U(n))\ (= n = \mathrm{cup}(U(n); \mathbb{Z}),$$
$$\mathrm{cup}(SU(n)) = \mathrm{cat}(SU(n)) = \mathrm{Cat}(SU(n))\ (= n{-}1 = \mathrm{cup}(SU(n); \mathbb{Z}).$$

(3) (James-Singhof [85]) $2 \leq n \leq 8$ に対して

$$\mathrm{cup}(SO(n)) = \mathrm{cat}(SO(n)) = \mathrm{Cat}(SO(n))\ (= \mathrm{cup}(SO(n); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

(4) (I-Mimura [77], I-Mimura-Nishimoto [78]) $3 \leq n \leq 8$ に対して

$$\mathrm{cup}(Spin(n)) = \mathrm{cat}(Spin(n)) = \mathrm{Cat}(Spin(n))\ (= \mathrm{cup}(Spin(n); KO)?)$$

(5) (Schweitzer [124], Fernándes Suárez-Gómez Tato-Tanré-Strom [44], I-M [77])

$$\mathrm{cup}(Sp(n)) = \mathrm{cat}(Sp(n)) = \mathrm{Cat}(Sp(n))\ (= 2n{-}1), n \leq 3.$$

演習 12.8 2 次元 *torus* T^2 上に、T^2 を覆う 3 枚の *closed disks* を図示せよ。

問 12.9 $\mathrm{Cat}(M{\times}S^\ell) = \mathrm{cat}(M){+}1, (\ell \geq 1)$ は成立するか？

第５章　　A_∞ 構造とＬＳの猫

13 Ganea の空间

13.1 Ganea の fibre-cofibre 構成と homotopy pullback

CW 複体の間の写像 $f : K \to X$ に対して、fibre 空間 $\mathcal{F}_f \xhookrightarrow{i_f} \mathcal{P}_f \xrightarrow{q_f} X$ をとると、自明な包含写像 $K \hookrightarrow \mathcal{P}_f$ はホモトピー同値を与え、商写像 $q_f : \mathcal{P}_f \to X$ は $f : K \to X$ の拡張であり、かつ $i_f : \mathcal{F}_f \to \mathcal{P}_f$ との合成写像は自明である：

$$q_f \circ i_f = * : \mathcal{F}_f \hookrightarrow \mathcal{P}_f \longrightarrow X, \quad q_f|_K = f, \quad K \overset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{P}_f.$$

そこで $i_f : \mathcal{F}_f \to \mathcal{P}_f$ の homotopy cofibre $j_f : \mathcal{P}_f \hookrightarrow \mathcal{C}_{i_f} = \mathcal{P}_f \cup \mathcal{C}(\mathcal{F}_f)$ を取り、$G(f) = \mathcal{C}_{i_f}$ とおけば、$q_f : \mathcal{P}_f \to X$ は $G(f) \supset \mathcal{P}_f$ への自明な拡張 $e(f) : G(f) \to X, e(f)(\mathcal{C}(\mathcal{F}_f)) = *$ を持つ。　そこで、写像 $f : K \to X$ からその拡張 $e(f) : G(f) \to X$ を与える構成法を、Ganea の fibre-cofibre 構成と呼ぶ。

定義 13.1 *CW* **対** (X, A) **に対してその包含写像を** $f : A \hookrightarrow X$ **とするとき、***Ganea* **の** *fibre-cofibre* **構成を** f **に対して** m **回繰り返して得られる写像を** $e_m^{(X,A)} : G_m(X, A) \to X$ **で表す：**

(1) $G_0(X, A) = A$ **かつ** $e_0^{(X,A)} = f$ **である。**

(2) $G_{m+1}(X, A) = G(e_m^{(X,A)})$ **かつ** $e_{m+1}^{(X,A)} = e(e_m^{(X,A)})$ **である。**

定理 13.2 (**Ganea**) **基点付き空间** X **に対して、**$\mathrm{cat}(X) \le m$ **となるには、**$e_m^{(X,A)} : G_m(X) \to X$ **にホモトピー右逆写像が存在することが必要十分である。　ただし、**$G_m(X) = G_m(X, \emptyset)$ **である。**

注 13.3 **与えられた写像** $f : K \to X$ **に対する拡張** $f' : G(f) \to X$ **は一意では無いことを注意する。**

従って Ganea の fibre-cofibre 構成はその様な拡張の中に特別なものを選び出せることを示したと考えることができるが、選び方に依存すること自体がホモトピー圏の中で不安定な構成を与えていると考えざるを得ない。　実は $G_m(X)$ には、ホモトピー圏の中で圏論的にも自然な構成法 (cf. I [71]) が存在する：

定義 13.4 *CW* **対** (X, A) **に対して、包含写像** $k : \mathrm{T}^{m+1}(X, A) \hookrightarrow \prod^{m+1}(X, A)$ **と対角線写像** $\Delta_{m+1} : X \to \prod^{m+1} X$ **の** *homotopy pullback* **を** $G_m(X, A)$ **とし、誘導される** X **への自然な射影を** $e_m^{(X,A)} : G_m(X, A) \to X$ **とする。**

この定義を採用すると、定理 13.2 は補題 6.7 から自明となる。

これ以後小論では、定義 13.4 による Ganea の空間の構成法を Ganea の fibre-cofibre 構成の繰り返しの代わりに採用する。　実は、その標準的な構成が空間 X のループ空間の A_∞ 構造で与えられる：

定理 13.5 (**Stasheff**) *CW 複体 X のループ空間 $\Omega(X)$ に随伴する「標準的」な $\mathcal{A}_\infty$ 構造は、*

(1) fibre 列 $E^{m+1}(\Omega(X)) \overset{p_m^{\Omega(X)}}{\to} P^m(\Omega(X)) \overset{e_m^X}{\to} X, (m \geq 0)$ と

(2) cofibre 列 $E^{m+1}(\Omega(X)) \overset{p_m^{\Omega(X)}}{\to} P^m(\Omega(X)) \hookrightarrow P^{m+1}(\Omega(X)), (m \geq 0)$ および

(3) $P^0(\Omega(X)) = *, E^1(\Omega(X)) = \Omega(X)$ を満たすものとして与えられる。

実はこの標準的な $\mathcal{A}_\infty$ 構造は、定義 13.4 の構成と本質的には一致することが分かる。

定義 13.6 *位相空間 G に対して、以下の3条件を満たす $\{(E^k, B^k, p^k : E^k \to B^k); 1 \leq k < \infty\}$ が存在する時、これを G の $\mathcal{A}_\infty$ 構造と言う。*

(1) $B^1 = \{*\}$ かつ $E^1 = G$ であり、$p_1 : E^1 \to B^1$ は自明な写像である。

(2) E^k は E^{k+1} の <u>中で可縮</u>となり、J. H. C. Whitehead の定理より E^∞ は可縮である。

(3) $p^k : E^k \to B^k$ は G を fibre とする quasi-fibration である。

定理 13.7 (**Stasheff [131]**) *CW 複体 X に対して、与えられた $\Omega(X)$ の $\mathcal{A}_\infty$-構造 $\{(E^k, B^k, p^k : E^k \to B^k); 1 \leq k \leq m\}$ が $B^\infty \simeq X$ を満たすならば、$\Omega(X)$ の標準的な $\mathcal{A}_\infty$-構造に付随する写像 $B^k(X) \subset B^\infty(X) \simeq X$ は、与えられた $\mathcal{A}_\infty$-構造に付随する写像 $B^k \subseteq B^\infty \simeq X$ を経由する。*

系 13.7.1 *CW 複体 X に対して、$\Omega(X)$ の標準的 $\mathcal{A}_\infty$-構造 $\{B^{k+1}(X)\}$ は $B^\infty(X) \simeq X$ をみたす。*

例 13.8 *(1) $B^{k+1}(S^0) = \mathbb{R}P^k$、$B^{k+1}(S^1) = \mathbb{C}P^k$、$\tilde{B}^{k+1}(S^3) = \mathbb{H}P^k$ $(0 \leq k \leq \infty)$。*

(2) $B^1(S^7) = *$、$B^2(S^7) = S^8$、$\tilde{B}^3(S^7) = \mathbb{O}P^2$ (Cayley plane)。

注 13.9 *古典的な射影空間との類比から、$B^{k+1}(X)$ を $P^k(X)$ により表すことがある。*

系 13.9.1 *$\mathrm{Cat}(P^m(\Omega(X))) \leq m$ であり、従って $\mathrm{cat}(P^m(\Omega(X))) \leq m$ である。*

定理 13.10 (**Cornea [25]**) *$\mathrm{cat}(X) = m$ のとき、$i \leq m$ ならば $\mathrm{cat}(P^i(\Omega(X))) = i$ であり、$i \geq m$ ならば $\mathrm{cat}(P^i(\Omega(X))) = m$ である。*

13.2 pushout-pullback 補題

CW 対 $(X, A), (Y, B)$ をとり、$i : A \subset X$ と $j : B \subset Y$ を包含写像とする。 さらに与えられた写像 $f : Z \to X$ と $g : Z \to Y$ に対して写像余錐と（二重）写像余柱をとる：

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_i &= \{(a, \ell_X) \in A \times \mathcal{P}(X) | * = \ell_X(0), i(a) = \ell_X(1)\} \simeq \{\ell_X \in \mathcal{P}(X) | * = \ell_X(0), \ell_X(1) \in A\},\\
\mathcal{F}_j &= \{(b, \ell_Y) \in B \times \mathcal{P}(Y) | * = \ell_Y(0), j(b) = \ell_Y(1)\} \simeq \{\ell_Y \in \mathcal{P}(Y) | * = \ell_Y(0), \ell_Y(1) \in B\},\\
\mathcal{P}_{i,f} &= \{(z, \ell_X) \in Z \times \mathcal{P}(X) | f(z) = \ell_X(0), \ell_X(1) \in A\},\\
\mathcal{P}_{j,g} &= \{(z, \ell_Y) \in Z \times \mathcal{P}(Y) | g(z) = \ell_Y(0), \ell_Y(1) \in B\},
\end{aligned}$$

同様に写像 $i{\times}j : A{\times}B \subset X{\times}Y, k : X{\times}B{\cup}A{\times}Y \subset X{\times}Y$ と $(f, g) = (f{\times}g)\Delta_Z : Z \to X{\times}Y$ に対し

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{i\times j} &= \{(\ell_X, \ell_Y) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) | * = \ell_X(0), * = \ell_Y(0), \ell_X(1) \in A, \ell_Y(1) \in B\} = \mathcal{F}_i{\times}\mathcal{F}_j,\\
\mathcal{F}_k &= \{(\ell_X, \ell_Y) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) | * = \ell_X(0), * = \ell_Y(0) \text{ and } (\ell_X(1), \ell_Y(1)) \in A{\times}Y{\cup}X{\times}B\},\\
\mathcal{P}_{i\times j,(f,g)} &= \{(z, \ell_X, \ell_Y) \in Z \times \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) | f(z) = \ell_X(0), g(z) = \ell_Y(0), (\ell_X, \ell_Y) \in \mathcal{F}_{i\times j}\},\\
\mathcal{P}_{k,(f,g)} &= \{(z, \ell_X, \ell_Y) \in Z \times \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) | f(z) = \ell_X(0), g(z) = \ell_Y(0), (\ell_X, \ell_Y) \in \mathcal{F}_k\}.
\end{aligned}$$

をとり、自然な射影 $\phi : \mathcal{P}_{i\times j,(f,g)} \to \mathcal{P}_{i,f}$ と $\psi : \mathcal{P}_{i\times j,(f,g)} \to \mathcal{P}_{j,g}$ を次で与える：

$$\phi(z, \ell_X, \ell_Y) = (z, \ell_X), \quad \psi(z, \ell_X, \ell_Y) = (z, \ell_Y).$$

このとき、次の補題を得る。

補題 13.11 *CW* **対** $(X, A), (Y, B)$ **と** *CW* **複体** Z**、および写像** $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ **に対して、写像** $(f, g) : Z \to X{\times}Y$ **と** $k : X{\times}B{\cup}A{\times}Y \subset X{\times}Y$ **の** *homotopy pull-back* $\mathcal{P}_{k,(f,g)}$ **は自然に** $\phi : \mathcal{P}_{i\times j,(f,g)} \to \mathcal{P}_{i,f}$ **と** $\psi : \mathcal{P}_{i\times j,(f,g)} \to \mathcal{P}_{j,g}$ **の** *homotopy push-out* **のホモトピー型を持つ：**

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_{i\times j,(f,g)} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "HPO"] & \mathcal{P}_{i,f} \arrow[d, hook] & \\
\mathcal{P}_{j,g} \arrow[r, hook] & \mathcal{P}_{k,(f,g)} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "HPB"] & X{\times}B \cup A{\times}Y \arrow[d, hook, "k"] \\
& Z \arrow[r, "{(f,g)}"] & X{\times}Y
\end{tikzcd}$$

略証: まず $E=\mathcal{P}_{k,(f,g)}$ の部分空間 E_1, E_2 および E_0 を次のように定める：

$$E_1 =\{(z,\ell_X,\ell_Y)\in E|\ell_Y(1)\in B\}\supset\{(z,k(f(z)),\ell_Y)\in E|\ell_Y(0)=g(z),\ell_Y(1)\in B\}\simeq\mathcal{P}_{j,g},$$

$$E_2 =\{(z,\ell_X,\ell_Y)\in E|\ell_X(1)\in A\}\supset\{(z,\ell_X,k(g(z)))\in E|\ell_X(0)=f(z),\ell_X(1)\in A\}\simeq\mathcal{P}_{i,f},$$

$$E_0 =\{(z,\ell_X,\ell_Y)\in E|\ell_X(0)=f(z),\ell_Y(0)=g(z),\ell_X(1)\in A,\ell_Y(1)\in B\}=\mathcal{P}_{i\times j,(f,g)},$$

ただし $k(w)$ は点 w での全く動かない道を表す。 このとき、$E = E_1\cup E_2$, $E_1\cap E_2 = E_0$ が直ちにえられ、さらに $\mathcal{P}_{j,g}$ および $\mathcal{P}_{i,f}$ が E_1 および E_2 の強変位レトラクトであることがわかる。 一方で E_0 の E_1 あるいは E_2 への包含写像は各々 ψ あるいは ϕ とホモトピックとなる。 従って E は (unreduced) homotopy push-out $\Omega_{j,g}\cup\{[0,1]\times\Omega_{i\times j,(f,g)}\}\cup\Omega_{i,f}$ のホモトピー型を持つことが分かる。 終り.

loop 空間 $\Omega(X)$ に対する Stasheff による A_∞-構造と元の空間 X の関係が次のように与えられる。

定理 13.12 **連結な** *CW* **複体** X **に対し、次が成立する。**

(1) Ganea **の空間** $\{G_m(X)\}$ **は** $\Omega(X)$ **の** A_∞ **構造を与える。**

(2) **自然なホモトピー同値** $P^\infty(\Omega X)\simeq X$ **が存在する。**

略証: まず E^{m+1} を包含写像 $X^{[m+1]}\to X^{m+1}$ の homotopy fibre とし、P^m を次の homotopy pull-back で定義する：

$$\begin{array}{ccc} & & X^{[m+1]} \\ & & \big\downarrow \\ X & \xrightarrow{\Delta_{m+1}} & X^{m+1}, \end{array}$$

ただし $X^{[m+1]}=\mathrm{T}^{m+1}X=\{(x_0,...x_m)\in X^{m+1}|x_t=*\text{ for some }t\}$ (fat wedge) であり、Δ_{m+1} は対角線写像である。

次に $Z=X$, $Y=X^m$, $f=1_X$, $g=\Delta_m$, $A=\{*\}$, $B=X^{[m]}$ とすれば、直ちに $\Omega_{k,(f,g)}=P^m$, $\Omega_{i,f}\simeq *$, $\Omega_{j,g}=P^{m-1}$ および、次の pull-back 図式を得る：

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}_j & \longrightarrow & \mathcal{P}_{i\times j,(f,g)} & \longrightarrow & \mathcal{P}_{i,f} \\ \Big\| & & \big\downarrow & PB & \big\downarrow \\ \mathcal{F}_j & \longrightarrow & \mathcal{P}_{j,g} & \longrightarrow & Z. \end{array}$$

ただし j は包含写像 $X^{[m]}\subset X^m$ であり、従って定義から $P_j=E^m$ である。

ここで $f = 1_X$ かつ $A = \{*\}$ であるので、$\mathcal{P}_{i,f}$ は可縮であり、$\mathcal{P}_{i\times j,(f,g)}$ はこの場合、$\mathcal{P}_{j,g} \to Z$ の fibre P_j にホモトピー同値である。 従ってこれらのデータに対して補題 13.11 を用いれば、次のような pushout–pullback 図式が得られる：

$$\begin{tikzcd}
E^m \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "HPO"] & P^{m-1} \arrow[d, hook] & \\
\{*\} \arrow[r, hook] & P^m \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "HPB"] & X\times X^{[m]} \cup \{*\}\times X^m \arrow[d, hook, "k"] \\
& X \arrow[r, "\Delta_{m+1}"] & X\times X^m
\end{tikzcd}$$

ここで $P^m, m \geq 1$ は標準的な包含写像 $E^m \subset P^{m-1}$ の (unreduced) 写像錐のホモトピー型を持つことに注意すれば、同様に補題 13.11 を用いて、次の pushout-pullback 図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
\Omega X\times E^m \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] \arrow[dr, phantom, "HPO"] & E^m \arrow[d, hook] & \\
\Omega X \arrow[r, hook] & E^{m+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "HPB"] & X\times X^{[m]} \cup \{*\}\times X^m \arrow[d, hook, "k"] \\
& \{*\} \arrow[r, "*"] & X\times X^m
\end{tikzcd}$$

従って E^{m+1} は ΩX と E^m の (unreduced) 結のホモトピー型を持つ。 これはそのまま、$\{(E^{m+1}, P^m); m \geq 0\}$ が Stasheff の意味での ΩX の A_∞–構造を与えることを意味する。 従って ∞–次の ΩX–射影空間 $P^\infty(\Omega X)$ は $\underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, P^m \simeq X$ のホモトピー型を持つことがわかる。 終り.

系 13.12.1 $\mathrm{Cat}(P^m(\Omega(X))) \leq m$ であり、従って $\mathrm{cat}(P^m(\Omega(X))) \leq m$ である。

定理 13.13 (**Cornea [25]**) $\mathrm{cat}(X) = m$ のとき、$i \leq m$ ならば $\mathrm{cat}(P^i(\Omega(X))) = i$ であり、$i \geq m$ ならば $\mathrm{cat}(P^i(\Omega(X))) = m$ である。

14 L–S の猫の評価

14.1 A_∞ 構造による特徴づけ

定理 14.1 (**Ganea [50], Gilbert [53], I [71], Sakai [122]**) 空間 X が $\mathrm{cat}(X) \leq m$ を満たす為には $e^X_m : P^m(\Omega(X)) \hookrightarrow P^\infty(\Omega(X)) \simeq X$ が右ホモトピー逆写像 $\sigma : X \to P^m(\Omega(X))$ を持つことが必要十分である：

$$\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0 \,|\, \exists_{\sigma : X \to P^m(\Omega(X))} \textit{ such that } e^X_m \circ \sigma \sim 1 = X\}.$$

定理 14.2 (**Fox [47]), I [71]**) 任意の空間 X と Y に対して $\mathrm{cat}(X{\times}Y) \le \mathrm{cat}(X){+}\,\mathrm{cat}(Y)$ であり、等号が成立 する為には $\bigcup_{i+j<m+n} P^i(\Omega(X)){\times}P^j(\Omega(Y)) \hookrightarrow P^\infty(\Omega(X)){\times}P^\infty(\Omega(Y)) \simeq X{\times}Y$ ($\mathrm{cat}(X){=}m$, $\mathrm{cat}(Y){=}n$ は共に 1 以上) が右ホモトピー逆写像を持たない ことが必要十分である。

略証: まず $\bigcup_{i+j<m+n} P^i(\Omega(X)){\times}P^j(\Omega(Y)) \hookrightarrow P^\infty(\Omega(X)){\times}P^\infty(\Omega(Y)) \simeq X{\times}Y$ が右ホモトピー逆写像を持つとする：k についての帰納法で $\mathrm{Cat}(\bigcup_{i+j<k} P^i(\Omega(X)){\times}P^j(\Omega(Y))) \le k$ が得られるから、$\mathrm{cat}(\bigcup_{i+j<k} P^i(\Omega(X)){\times}P^j(\Omega(Y))) \le k-1$ であり、$X{\times}Y$ は仮定から $\bigcup_{i+j<m+n} P^i(\Omega(X)){\times}P^j(\Omega(Y))$ に支配されるので $\mathrm{cat}(X{\times}Y) < \mathrm{cat}(X){+}\,\mathrm{cat}(Y)$ がわかる。

次に $\mathrm{cat}(X{\times}Y) < \mathrm{cat}(X){+}\,\mathrm{cat}(Y)$ とすると、定理 14.1から $X{\times}Y$ は $P^j(\Omega((X{\times}Y)))$ に支配される。 ここで、$\bigcup_{i+j\le k} P^i(\Omega(X)){\times}P^j(\Omega(Y))$ は $P^\infty(\Omega(X)){\times}P^\infty(\Omega(Y)) \simeq X{\times}Y$ の標準的ではない $\mathcal{A}_\infty$–構造を与え、Stasheff による標準的な A_∞ 構造の普遍性により標準的な写像 $P^j(\Omega((X{\times}Y))) \hookrightarrow P^\infty(\Omega(X)){\times}P^\infty(\Omega(Y))$ は $\bigcup_{i+j\le k} P^i(\Omega(X)){\times}P^j(\Omega(Y)) \hookrightarrow P^\infty(\Omega(X)){\times}P^\infty(\Omega(Y))$ を経由する。 従って $\bigcup_{i+j\le k} P^i(\Omega(X)){\times}P^j(\Omega(Y))$ は $X{\times}Y$ を支配する。 終り.

系 14.2.1 (I [71]) 空間 X が $\mathrm{cat}(X{\times}S^n) = \mathrm{cat}(X)$ を満たす為には、写像 $P^m(\Omega(X)){\times}\{*\}{\cup}P^{m-1}(\Omega(X)){\times}S^n \hookrightarrow P^\infty(\Omega(X)){\times}S^n \simeq X{\times}S^n$ ($m = \mathrm{cat}(X) \ge 1$) が右ホモトピー逆写像を持つことが必要十分である。

略証: まず $P^m(\Omega(X)){\times}\{*\} \cup \cdots \cup P^1(\Omega(X)){\times}P^{m-1}(\Omega(S^n)) \cup \{*\}{\times}P^m(\Omega(S^n)) \subseteq P^m(\Omega(X)){\times}\{*\} \cup P^{m-1}(\Omega(X)){\times}P^\infty(\Omega(S^n)) \subset P^\infty(\Omega(X)){\times}P^\infty(\Omega(S^n))$ に注意する。 従って定理 14.2 から $\mathrm{cat}(X{\times}S^n) = \mathrm{cat}(X)$ ならば $P^m(\Omega(X)){\times}\{*\}{\cup}P^{m-1}(\Omega(X)){\times}P^\infty(\Omega(S^n))$ が $X{\times}S^n$ を支配し、よって $P^m(\Omega(X)){\times}\{*\}{\cup}P^{m-1}(\Omega(X)){\times}S^n$ が $X{\times}S^n$ を支配する。 逆は $\mathrm{Cat}(P^m(\Omega(X)){\times}\{*\} \cup P^{m-1}(\Omega(X)){\times}S^n) \le m$ より明か。 終り.

14.2 Cone 分解と L–S の猫

定理 14.3 (**Ganea**) $\mathrm{cat}(X) \le \mathrm{Cat}(X) \le \mathrm{cat}(X){+}1$.

略証: $\mathrm{cat}(X) = m$ とし、$\sigma : X \to P^m(\Omega(X))$ を定理 14.1 により与えられるものとする。 $\sigma : X \to P^m(\Omega(X))$ と包含写像 $P^i(\Omega(X)) \hookrightarrow P^m(\Omega(X))$ の homotopy pull-back を B_i とし、$\sigma : X \to P^m(\Omega(X))$ と写像 $\tilde{E}^{i+1}(\Omega(X)) \to P^i(\Omega(X)) \hookrightarrow P^m(\Omega(X))$ の homotopy pull-back を A_i とし、σ の homotopy fibre を F する。 このとき、$X_i = B_i/F, Y_i = A_i/F$ とおけば、$X_0 \simeq \{*\}, X_m \simeq X{\vee}\Sigma F$ であり、$Y_i \to X_i \to X_{i+1}$ は up to homotopy で cofibration となる。 従って $\mathrm{Cat}(X) \le m{+}1 = \mathrm{cat}(X){+}1$ が成立する。 終り.

定理 14.4 (**Varadarajan, Hardie**) $F \to E \to B$ を *fibration* とする。 **このとき次式が成立する:**

$$\mathrm{cat}(E){+}1 \leq (\mathrm{cat}(F){+}1)\cdot(\mathrm{cat}(B){+}1)$$

略証: $\mathrm{cat}(B) = m, \mathrm{cat}(F) = n$ とすると、定理 14.1 より必要なら B を $P^m(\Omega(B))$ に取り替えることにより $\mathrm{Cone}(B) = m$ と仮定してよい。 そこで $\{h_i : H_i \to B_i \,|\, 0{\leq}i{\leq}m\}$ を B の cone decomposition とし、$E_i = p^{-1}(B_i)$ とおく:

$$B_{i+1} = B_i \cup \mathcal{C}_{H_i},\ B_0 = \{*\} \text{ and } B_m = B,$$

$$E_{i+1} = E_i \cup \mathcal{C}_{H_i}{\times}F,\ E_0 = F \text{ and } E_m = E.$$

ここで帰納法を用いて $\mathrm{cat}(E_i){+}1 \leq (\mathrm{cat}(F){+}1)\cdot(i{+}1)$ を示す。 まず $i = 0$ の場合は明らかである。

($i{\leq}j$ まで正しかったとして $i{=}j{+}1$ の場合) $E_{j+1} = E_j \cup \mathcal{C}_{H_j}{\times}F$ であり、この式の中の F を定理 14.1 より $F' = P^n(\Omega(F))$ に取り替えれば、$E'_{j+1} = E_j \cup \mathcal{C}_{H_j}{\times}F'$ は E を支配する。 そこで $\{k_i : K'_i \to F'_i \,|\, 0{\leq}i{\leq}m\}$ を F' の cone decomposition とする:

$$F'_{i+1} = F'_i \cup \mathcal{C}(K_i),\ F'_0 = \{*\} \text{ and } F'_n = F',$$

さらに $E'_{j,i} = E_j \cup \mathcal{C}_{H_j}{\times}F'_i$ とおけば、次のような E_{j+1} の cone decomposition を得る:

$$E'_{j,i+1} = E_{j,i} \cup \mathcal{C}_{H_j}{\times}\mathcal{C}(K'_i),\ E'_{j,0} = E_j \text{ and } E'_{j,n} = E'_{j+1},$$

従って $\mathrm{cat}(E) \leq (\mathrm{cat}(F){+}1)\cdot i + \mathrm{cat}(F){+}1 = (\mathrm{cat}(F){+}1)\cdot(i{+}1)$ となり帰納法が成立する。 終り.

15 計算可能な不変量を用いて良い状況を捉える

15.1 Toomer 不変量とその仲间たち

定義 15.1 *Toomer* **不変量とその改良版を導入する。** *Toomer* **不変量は有理ホモトピー論では** $\mathrm{e}(-)$ **と表示されるが、** *Adams* e **不変量との競合を避けて** $\mathrm{wgt}(-)$ **と表示する:**

(1) h **を乗法的なコホモロジー論とする。**

i) $\mathrm{wgt}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, (e^X_m)_* : h^*(X) \to h^*(P^m(\Omega(X)))\ \text{は単射}\right\}$

ii) $\mathrm{Mwgt}(X;h) = \mathrm{Min}\left\{m \geq 0 \,\middle|\, \begin{array}{l}(e^X_m)_* \ :\ h^*(X) \ \to\ h^*(P^m(\Omega(X)))\ \ \text{は}h^*h\text{-} \\ \textit{modules}\ \text{の间の}\ \textit{split mono}\end{array}\right\}$

(2) *i)* $\mathrm{wgt}(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{wgt}(X;h)\,|\,h$ は乗法的なコホモロジー論$\}$

ii) $\mathrm{Mwgt}(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{Mwgt}(X;h)\,|\,h$ は乗法的なコホモロジー論$\}$

(3) *i)* $\mathrm{wgt}_{\mathrm{p}}(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{wgt}(X;h)\,|\,h$ は乗法的なp*-local* コホモロジー論$\}$

ii) $\mathrm{Mwgt}_{p}(X) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{Mwgt}(X;h)\,|\,h$ は乗法的なp*-local* コホモロジー論$\}$

定理 15.2 $\mathrm{cup}(X;h) \leq \mathrm{wgt}(X;h) \leq \mathrm{Mwgt}(X;h) \leq \mathrm{cat}(X)$ が成立する。

さて Rudyak と Strom は Fadell-Husseini [37] (1992) の与えた位相不変量 category weight をホモトピー不変量となるように再定義し、L–S の猫を近似計算する仕組みを与えた：

定義 15.3 (**Rudyak 1997 [117, 118], Strom 1998 [135]**) $u \in \tilde{h}^*(X)$ に対して

$$\mathrm{wgt}(u;h) = \mathrm{Min}\,\left\{m \geq 0 \,\middle|\, (e^X_m)_*(u) \neq 0\right\}$$ と定義する *(*h は乗法的コホモロジー論*)* 。

定理 15.4 (**Rudyak [117, 118], Strom [135]**) h を乗法的なコホモロジー論とする。

(1) $\underline{uv \neq 0}$ *in* $h^*(X)$ ならば $\mathrm{wgt}(u;h) + \mathrm{wgt}(v;h) \leq \mathrm{wgt}(uv;h)$ が成立する。

(2) $\mathrm{wgt}(X;h) = \mathrm{Max}\{\mathrm{wgt}(u;h)\,|\,u \in \tilde{h}^*(X)\}$ が成立する。

定義 15.5 $\{(E^{**}_r(X;h), d_r)\,|\,r \geq 1\}$ を $X \simeq P^\infty(\Omega(X))$ の *filtration* $\{P^m(\Omega(X))\,|\,m \geq 0\}$ に *associate* し、$h^*(X)$ に収束する *Rothenberg-Steenrod* 型の *spectral sequence* とする。

定理 15.6 (**G. W. Whitehead [151], Ginsburg [54], McCleary [104]**) X を単連結とする。

(1) $h^*(\Omega(X))$ が h^* 上 *free* ならば、$E^{**}_2(X;h) \cong \mathrm{Cotor}^{*,*}_{h^*(\Omega X)}(h^*, h^*)$

(2) $d_r : E^{s,t}_r(X;h) \to E^{s+r,t-r+1}_r(X;h)$ であり、$H(E^{*,*}_r(X;h), d_r) \cong E^{*,*}_{r+1}(X;h)$

(3) $E^{*,*}_\infty(X;h) \cong E_0 h^*(X), \qquad E^{s,t}_\infty(X;h) \cong F_s h^{s+t}(X)/F_{s+1}h^{s+t}(X)$

$$F_m h^n(X) = \ker\left\{(e^X_m)_* : h^n(X) \to h^n(P^m(\Omega(X)))\right\}$$

(4) *(Whitehead)* $r > \mathrm{cat}(X)$ ならば $E^{s,t}_r(X;h) \cong E^{s,t}_\infty(X;h)$ である。

(5) *(Ginsburg)* $s > \mathrm{cat}(X)$ ならば $E^{s,t}_\infty(X;h) = 0$ である。

注 15.7 任意の $[u]\ (\neq 0) \in E^{s,*}_\infty(X;h),\ (u \in \tilde{h}^*(X))$ に対して $\mathrm{wgt}(u;h) = s$ である。

例 15.8 *(1)* $\mathrm{wgt}(L^n(p)) = \mathrm{cat}(L^n(p)) = \mathrm{Dim}(L^n(p)) = n$ ($p > 1$ は任意) である。

(2) *Symplectic* 多様体 M が $\pi_2(M)$=0 を満たせば $\mathrm{wgt}(M) = \mathrm{cat}(M) = 2n$ である。

(3) $\mathrm{wgt}(Sp(2); H\mathbb{Z}/2) = 2 < 3 = \mathrm{Mwgt}(Sp(2); H\mathbb{Z}/2) = \mathrm{cat}(Sp(2))$ である。

15.2 二つの「安定」な猫

最近になって、$\mathrm{cup}(-)$ とは異なる形で安定化された L–S の猫たちが導入された：

定義 15.9 (**Rudyak [118]**) $r\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0 \,|\, \exists_{(stably)\ \sigma : X \to P^m(\Omega(X))}\ e^X_m \circ \sigma \sim 1_X\}$.

定義 15.10 (**Vandembroucq [147]**) $Q\mathrm{cat}(X) = \mathrm{Min}\{m \geq 0 \,|\, \exists_{\sigma : X \to (QP)^m(\Omega(X))}\ (Qe)^X_m \circ \sigma \sim 1_X\}$,

ただし、*fibration* $E^{m+1}(\Omega(X)) \longrightarrow P^m(\Omega(X)) \xrightarrow{e^X_m} X$ を安定化関手 $Q = \Omega^\infty\Sigma^\infty$ を用いて *fibrewise* に安定化したものが $Q(E^{m+1}(\Omega(X))) \longrightarrow (QP)^m(\Omega(X)) \xrightarrow{(Qe)^X_m} X$ である。

定理 15.11 (**Rudyak [118, 119], Vandembroucq [147]**) *(1)* $Q\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{cat}(X)$.

(2) 有理化された空間 X_0 は $\mathrm{wgt}(X_0) = r\mathrm{cat}(X_0) \leq Q\mathrm{cat}(X_0) = \mathrm{cat}(X_0)$ をみたす。

(3) $\mathrm{cup}(X) \leq \mathrm{wgt}(X) = \mathrm{Mwgt}(X) = r\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{cat}(X)$.

注 15.12 一般に $\mathrm{cat}(X)$ の近似としては、$\mathrm{cup}(X; h)$ より $\mathrm{wgt}(X; h)$ の方が、$\mathrm{wgt}(X; h)$ より $\mathrm{Mwgt}(X; h)$ の方が良い近似を与える。

16 必要十分条件を用いて微妙な状況を探る

16.1 高次の Hopf 不変量と L–S の猫

Berstein-Hilton [14] (1960) は R 係数のホモトピー群の元に対して高次の Hopf 不変量

$$H_m : \pi_n(X; R) \to \pi_{n+1}(\prod^m X, \prod^m_{m-1} X; R), \quad n\geq 2,\ m\geq 1,$$

を用いて基点以外に二つだけ胞体を持つ複体の L–S 猫を決定した。 Stanley と Iwase はこの高次 Hopf 不変量を ΩX の $\mathcal{A}_\infty$ 構造を用いて集合に値を持つ不変量として再定義した：

定義 16.1 (**I [73], Stanley [130]**) $\sigma : X \to P^m(\Omega(X))$ を定理 *14.1* で定まる $\mathrm{cat}(X) \leq m$ の構造を与える写像とす

る。 任意の $f:\Sigma V\to X$ に対して次の可換図を考える:($e_m^X\circ\Sigma\,\mathrm{ad}(f)=ev\circ\Sigma\,\mathrm{ad}(f)=f=1_X\circ f=e_m^X\circ\sigma\circ f$)

$$
\begin{tikzcd}
 & \Sigma V \arrow[d, "f"] \arrow[dddl, dotted, "H_m^\sigma(f)"'] \arrow[ddr, "\Sigma\,\mathrm{ad}(f)"] \arrow[dddr, dotted] \arrow[dddrr, "f"] & & \\
 & X \arrow[ddr, "\sigma"'] & & \\
 & & \Sigma\Omega(X) \arrow[d, hook] \arrow[dr, "ev"'] & \\
\tilde{E}^{m+1}(\Omega(X)) \arrow[rr, "p_{m+1}^{\Omega(X)}"'] & & P^m(\Omega(X)) \arrow[r, "e_m^X"'] & X.
\end{tikzcd}
$$

そこで $\sigma\circ f$ と $\Sigma\,\mathrm{ad}(f)$ の差 $d_m^\sigma(f)=\sigma\circ f-\Sigma\,\mathrm{ad}(f)$ の持ち上げ ($p_{m+1}^{\Omega(X)}\circ H_m^\sigma(f)=d_m^\sigma(f)$)を $H_m^\sigma(f)\in[\Sigma V,\tilde{E}^{m+1}(\Omega(X))]$ とし、$\mathcal{H}_m^\sigma(f)=\Sigma^\infty H_m^\sigma(f)\in\{\Sigma V,\tilde{E}^{m+1}(\Omega(X))\}$ とする。

問 16.2 ΣV **がホモトピー可換な** *co-Hopf* **空間ならば** H_m^σ **が準同型となるか?**

定理 16.3 (**I [73]**) V **が** *co-Hopf* **空間ならば任意の** σ **に対して** H_m^σ **は準同型である。**

略証: $f,g:\Sigma V\to X$ に対してその adjoints を $\mathrm{ad}(f),\mathrm{ad}(g):V\to\Omega(X)$ とする:

$$\Sigma\,\mathrm{ad}(f):\Sigma V\to\Sigma\Omega(X),\quad \Sigma\,\mathrm{ad}(g):\Sigma V\to\Sigma\Omega(X),\quad \Sigma\,\mathrm{ad}(f+_Sg):\Sigma V\to\Sigma\Omega(X)$$

ここで $+_S$ は suspension 構造によるホモトピー集合の積である。 ところが ΣV と V は、V の co-Hopf 構造によるホモトピー集合の積をもつので、これを $+_V$ で表せば

$$\mathrm{ad}(f+_Sg)\sim\mathrm{ad}(f+_Vg)\sim\mathrm{ad}(f)+_V\mathrm{ad}(g)$$

を得る。 従ってこれらの懸垂をとることで次のホモトピーを得る。

$$\Sigma\,\mathrm{ad}(f+_Sg)\sim\Sigma(\mathrm{ad}(f)+_V\mathrm{ad}(g))\sim\Sigma\,\mathrm{ad}(f)+_S\Sigma\,\mathrm{ad}(g)$$

従って $\Sigma\,\mathrm{ad}(f+_Sg)\sim\Sigma\,\mathrm{ad}(f)+_S\Sigma\,\mathrm{ad}(g)$ となり、定義から $H_m^\sigma(f+g)\sim H_m^\sigma(f)+H_m^\sigma(g)$ が成立する。 終り.

演習 16.4 **任意の** σ **に対して** $H_m^\sigma(f\circ(\Sigma g))=H_m^\sigma(f)\circ(\Sigma g)$ **が成立することを確かめよ。**

例えば $\tilde{\mathcal{A}}_m$ 空間 G に対して $X=P^m(G)$ とおけば、標準的な構造写像 $\sigma:P^m(G)\to P^m(\Omega(P^m(G)))$ に対して $H_m^\sigma:[\Sigma V,P^m(G)]\to[\Sigma V,\tilde{E}^{m+1}(\Omega(P^m(G)))]$ が定まる (I [73]) 。

定理 16.5 **球面** S^{n-1} *(*$n=1,2,4,8$*)* **はノルムを保つ** *(***非結合的***)* **積を持つ** $\mathbb{R}$ **代数の単元の全体としての積構造を持つ。 このとき高次** *Hopf* **不変量** $H^S_m:\pi_{n(m+1)-1}(P^m(S^{n-1}))\to\mathbb{Z}$ **が** 1 **となる元の存在が** S^{n-1} **の** $\mathcal{A}_{m+1}$ **構造の存在と同値である。**

略証: まず $H^S_m:\pi_{n(m+1)-1}(P^m(S^{n-1}))\to\pi_{n(m+1)-1}(\tilde{E}^{m+1}(\Omega(P^m(S^{n-1}))))$ であり、

$$\pi_{n(m+1)-1}(\tilde{E}^{m+1}(\Omega(P^m(S^{n-1}))))\cong\pi_{n(m+1)-1}(S^{n(m+1)-1})\cong\mathbb{Z}$$

となるから、$H^S_m:\pi_{n(m+1)-1}(P^m(S^{n-1}))\to\mathbb{Z}$ と考えて良い。

$H^S_m(f)=1$ となる $f:S^{n(m+1)-1}\to P^m(S^{n-1})$ が存在すれば、f の homotopy fibre が Serre spectral sequence を用いて S^{n-1}) にホモトピー同値であることが分かり、X の Stasheff の意味の $\mathcal{A}_{m+1}$–構造が作られ、定理 13.7 から X は $\mathcal{A}_{m+1}$–空間である。 逆は明らかである。 終り.

16.2 Ganea 予想の反例

定義 16.6 (**I** [**73**]) **位相空間** X **は** $\mathrm{cat}(X)=m$ **をみたす空間であるとする。 高次の** *(***非安定および安定***) Hopf* **不変量は**

$$\begin{cases}H^S_m(\alpha)=\{H^\sigma_m(\alpha)\,|\,\sigma\textit{ is a structure of }\mathrm{cat}(X)=m\}\subseteq[\Sigma V,\tilde{E}^{m+1}(\Omega(X))],\\ \mathcal{H}^S_m(\alpha)=\{\mathcal{H}^\sigma_m(\alpha)\,|\,\sigma\textit{ is a structure of }\mathrm{cat}(X)=m\}\subseteq\{\Sigma V,\tilde{E}^{m+1}(\Omega(X))\}.\end{cases}$$

という集合として各々定義される。

演習 16.7 $d\cdot\mathrm{cat}(X)+d-2\geq\mathrm{Dim}(X)\geq d\cdot\mathrm{cat}(X)$ **ならば** σ **は一意的であることを示せ。**

例 16.8 $X=S^n,\mathbb{R}P^n,\mathbb{C}P^n,\mathbb{H}P^n$ *(***各々** $n\geq1$*)* **は上の条件をみたす。**

定理 16.9 (**I** [**73**]) *CW* **複体** X **が** $\mathrm{cat}(X)=m$ *(*$m\geq1$*)* **かつ** $(d{-}1)$ **連結** *(*$d\geq2$*)* **で条件「**$\mathrm{Dim}(X)\leq d\,\mathrm{cat}(X)+d-2$**」を満たすとき** $W=X\cup_\alpha D^{e+1}\overset{i}{\hookleftarrow}X$ *(*$e\geq d$*)* **とおく。**

(1) 「$\mathrm{cat}(W)=\mathrm{cat}(X)+1$ **である」為には「**$H^S_m(\alpha)\neq0$ **である」が必要十分である。**

(2) **また** $\mathrm{cat}(W)=\mathrm{cat}(X)+1$ **のとき、「すべての** $n\geq1$ **に対して** $\mathrm{cat}(W\times S^n)=\mathrm{cat}(W)+1$ **である」為には「**$\mathcal{H}^S_m(\alpha)\neq0$ **である」が必要十分である。**

略証: (2) は省略し、(1) のみを示す：$P^m(\Omega(i))\circ\sigma:X\to P^m(\Omega(X))\hookrightarrow P^m(\Omega(W))$ が W に extend で

きるための障害が

$$P^m(\Omega(i))\circ\sigma\circ\alpha \simeq P^m(\Omega(i))\circ\sigma\circ\alpha - \Sigma\,\mathrm{ad}\,(i\circ\alpha) \simeq P^m(\Omega(i))\circ\sigma\circ\alpha - P^m(\Omega(i))\circ\Sigma\,\mathrm{ad}\,\alpha$$

$$\simeq P^m(\Omega(i))\circ(\sigma\circ\alpha - \Sigma\,\mathrm{ad}\,\alpha) \simeq p^m_{\Omega(W)}\circ\tilde{E}^{m+1}(\Omega(i))\circ H^\sigma_m(\alpha)$$

で与えられ、$p^m_{\Omega(W)*}$ は単射であるので本質的には $\tilde{E}^{m+1}(\Omega(i))\circ H^\sigma_m(\alpha)$ である。 ここで $m\geq1$ で $\Omega(i):\Omega(X)\hookrightarrow\Omega(W)$ は $(e-1)$ 連結かつ $\Omega(W)$ は連結であるので、$\tilde{E}^{m+1}(\Omega(i))$ は $(e+1)$ 連結となる。 従って $\tilde{E}^{m+1}(\Omega(i))_*$ も単射であり、$P^m(\Omega(i))\circ\sigma$ が W 上に拡張されるための障害は $H^\sigma_m(\alpha)$ で与えられる。終り.

定理 16.10 (**I** [71]) *CW* **複体の族** $\{Q_\ell\,;\,\ell\geq2$ **は素数**$\}$ **で次を満たすものが存在する。**

$$\begin{cases}\mathrm{cat}(Q_2\times S^n)=\mathrm{cat}(Q_2) & \textit{for all } n\geq1,\\ \mathrm{cat}(Q_\ell\times S^n)=\mathrm{cat}(Q_\ell) & \textit{for all } n\geq2 \textit{ and } \ell>2.\end{cases}$$

$\ell=2$ の場合の略証: $\sigma\in\pi_{15}(S^8)$ を Hopf 不変量 1 を与える元とすると、$H_1(\sigma)=1\in\pi_{15}(\Omega(S^8)*\Omega(S^8))\cong\mathbb{Z}$ である。 S^{15} に対する Hopf 不変量 1 の元の非存在は、Toda [142] によって証明され，特に $[\iota_{15},\iota_{15}]\in\pi_{29}(S^{15})$ は懸垂準同型 $E:\pi_{28}(S^{14})\to\pi_{29}(S^{15})$ の像に含まれる自明でない元である。 問題 16.4 に挙げた事実から $H_1(\sigma\circ[\iota_{15},\iota_{15}])=i_*[\iota_{15},\iota_{15}]$ ($i:S^{15}\hookrightarrow\Omega(S^8)*\Omega(S^8)$ は bottom cell の包含写像) となり、$\Omega(S^8)*\Omega(S^8)$ は無限個の球面の一点和にホモトピー同値であるから i_* は split mono である。 従って $H_1(\sigma\circ[\iota_{15},\iota_{15}])\neq0$ であり、Berstein-Hilton の定理から $Q_2=S^8\cup_{\sigma\circ[\iota_{15},\iota_{15}]}e^{30}$ は $\mathrm{cat}(Q_2)=2$ をみたす。

一方で Whitehead 積の懸垂は必ず 0 になることから、$\Sigma([\iota_{15},\iota_{15}])=0$ である。 また $Q_2\times S^n=Q_2\times\{*\}\cup S^8\times S^n\cup_{\psi_n}e^{n+30}$ という CW 分割を考えると $\mathrm{cat}(Q_2\times\{*\}\cup S^8\times S^n)=2$ であり、ψ_n は $\sigma\circ[\iota_{15},\iota_{15}]$ と $\iota_n\in\pi_n(S^n)$ の相対 Whitehead 積で与えられる。 従って $\mathrm{cat}(Q_2\times S^n)=3$ となる為には、$H^S_2(\psi_n)$ が 0 を含んではならない。 しかし $H^S_2(\psi_n)\ni S^{n-1}*H_1(\sigma\circ[\iota_{15},\iota_{15}])=\pm\Sigma^n[\iota_{15},\iota_{15}]=0$ $(n\geq1)$ となるので、$\mathrm{cat}(Q_2\times S^n)=\mathrm{cat}(Q_2)=2$ $(n\geq1)$ が成立する。 終り.

$\mathbb{C}P^3$ は S^4 上の S^2 束の構造を持つことに注意して、うまく自明でない co-Hopf 写像 $\beta:S^q\to S^3$ を選び、$\Sigma\beta:S^{q+1}\to S^4$ を smooth map で近似する。 $E(\beta)$ を $\Sigma\beta$ による $\mathbb{C}P^3$ の引き戻しとして定義すれば、$E(\beta)=S^2\cup_{\eta\circ\beta}e^{q+1}\cup_{\psi(\beta)}e^{q+3}$ となる。 これに対して H^S_3 の計算を自明でない Toda bracket (cf. [143]) を用いて実行することで次の二つの定理を得る。

定理 16.11 (I [73], L–S-V [98]) 単連結な閉多様体 N で次を満たすものが存在する。

$$\mathrm{cat}(N \smallsetminus \{*\}) = \mathrm{cat}(N).$$

定理 16.12 (I [73]) 単連結な閉多様体 M で次の条件を満たすものが存在する。

$$\mathrm{cat}(M{\times}S^n) = \mathrm{cat}(M) \quad \textit{for all } n \geq 2,$$

従って、[105] に挙げられた Problems 642 と 643 は閉多様体に限定しても共に否定的に解決されたことになる。　しかし、これらすべての計算例は次の予想を支持している。

問 16.13 (I [71]) $n(X) = \mathrm{Max}\{n \,|\, \mathrm{cat}(X{\times}S^n){=}\,\mathrm{cat}(X){+}1 \textit{ or } n{=}0\}$ は次をみたすか？

$$\mathrm{cat}(X{\times}S^n) = \begin{cases} \mathrm{cat}(X){+}1 & \textit{for all } n \leq n(X), \\ \mathrm{cat}(X) & \textit{for all } n > n(X). \end{cases}$$

これについては最近、次の結果がアナウンスされた。

定理 16.14 (Stanley-Strom-I. [81]) 単連結有限複体 X が十分大きな $n(X)$ に対し $\mathrm{cat}(X{\times}S^{n'(X)}) = \mathrm{cat}(X)$ をみたすならば次式が成立する。

$$\mathrm{cat}(X{\times}S^n) = \begin{cases} \mathrm{cat}(X){+}1 & \textit{for all } n \leq n(X), \\ \mathrm{cat}(X) & \textit{for all } n \geq n'(X), \end{cases}$$

ただし $n'(X)$ は X の連結性、次元そして *L–S* の猫に依存する非常に大きな自然数である。

さらに Lie 群 Spin(9) に対する結果 $\mathrm{cat}(\mathrm{Spin}(9)) = 8$ が Kono-I. [94] によりアナウンスされ、その中で $\mathrm{cat}(\mathrm{Spin}(9)) = \mathrm{Mwgt}(\mathrm{Spin}(9); \mathbb{F}_2) = 8 > 6 = \mathrm{wgt}(\mathrm{Spin}(9); \mathbb{F}_2)$ が示されている。　この事実は $\mathrm{Mwgt}(-; \mathbb{F}_2)$ が実際に $\mathrm{wgt}(-; \mathbb{F}_2)$ より実際に強い不変量であることを裏付けている。

第６章　　位相的複雑さ

17 一般の場合の評価

17.1 上からの評価

一般に sectional category について、次の事実がよく知られている。

定理 17.1 (**Schwartz**) *Fibration* $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} X$ **に対して、**$\mathrm{secat}(p) \le \mathrm{cat}(X)$ **が成立する。従って** $\mathcal{TC}(B) \le \mathrm{cat}(B{\times}B)+1 \le 2\,\mathrm{cat}(B)+1$ **である。**

証明: 底空間 X の L–S の猫の値が $m \ge 0$ であったとすると、m+1 枚の開集合 $\{U_i\,;\,0 \le i \le m\}$ による X の被覆 $X = \cup_{i=0}^{m} U_i$ が存在し、各々の U_i は X で可縮となる。従って p を U_i 上に引き戻せば自明な fibration $p_i : U_i{\times}F \to U_i$ となるから、up to homotopy で U_i における p の section $\hat{s}_i : U_i \to E$ を持つ。そこで fibration p の HLP (CHP) によりそのホモトピーを持ち上げて U_i における p の本物の section $s_i : U_i \to E$ を得ることができる。従って $\mathrm{secat}(p) \le m = \mathrm{cat}(X)$ を得る。　終り.

系 17.1.1 $\mathcal{TC}(S^n) \le 3$ **である。**

定理 17.2 **空间** B **が位相群のとき、**$\mathcal{TC}(B) \le \mathrm{cat}(B)+1$ **が成立する。**

証明: 位相群 B の L–S の猫の値が $m \ge 0$ であったとすると、m+1 枚の開集合 $\{U_i\,;\,0 \le i \le m\}$ による B の被覆が存在し、各々の $U_i \subset B$ の包含写像 $\iota_i : U_i \hookrightarrow B$ は零ホモトープとなる。このとき $U_i{\times}B$ は $B{\times}B$ の開集合である。位相群は A_2 空間であるので、いわゆる Cooke の shear map

$$\phi : B{\times}B \to B{\times}B, \quad \phi(x,y) = (xy,y)$$

を取れば、一般性を失わずに $\phi(*,b) = (b,b)$ と仮定して良い。ここで ϕ の（ホモトピー）逆写像を $\psi : B{\times}B \to B{\times}B$ とすると、$\Delta(b) = (b,b) = \phi(*,b) = \phi{\circ}\mathrm{in}_2(b)$ より

$$\psi{\circ}\Delta = \psi{\circ}\phi{\circ}\mathrm{in}_2 \sim \mathrm{in}_2 : B \to B{\times}B$$

となるので、$\psi(b,b) = (*,b)$ と仮定して良い。そこで $V_i = \psi^{-1}(U_i{\times}B)$ とおくと、$B{\times}B = \cup_{i=1}^{m} V_i$ は明らかであり、さらに $V_i \subset B{\times}B$ の包含写像 $\hat{\iota}_i : V_i \hookrightarrow B{\times}B$ は

$$\hat{\iota}_i \sim \phi{\circ}\psi{\circ}\hat{\iota}_i = \phi|_{U_i\times B}{\circ}\psi|_{V_i} = \phi{\circ}(\iota_i{\times}1_B){\circ}\psi|_{V_i} \sim \phi{\circ}(*{\times}1_B){\circ}\psi|_{V_i},$$

$$\phi{\circ}(*{\times}1_B)(a,b) = \phi(*,b) = (b,b) \in \Delta(B)$$

となるので、$\hat{\iota}_i$ は $\Delta(B) \subset B{\times}B$ に compressible である。従って V_i 上で $\pi : \mathcal{P}(B) \to B{\times}B$ の section $s_i : V_i$ が存在する。これは $\mathcal{TC}(B) = \mathrm{secat}(\pi) + 1 \leq m + 1 = \mathrm{cat}(B) + 1$ を意味する。 終り.

17.2 下からの評価

一般に path fibration について次の事実がよく知られている。

事実 17.3 *Serre の path fibration* $\pi : \mathcal{P}(B) \to B{\times}B$ *の* $in_1 : B \hookrightarrow B{\times}\{*\} \subset B{\times}B$ **による引き戻し** $\pi_0 : \mathcal{P}_0(B) \to B$ $(\pi_0(\ell) = \ell(0))$ **の全空间** $\mathcal{P}_0(B)$ **は可縮であり、従って** $\mathrm{secat}(\pi_0) = \mathrm{cat}(B)$ **となる。**

これから topological complexity について知られている次の事実が導かれる。

定理 17.4 (**Farber [38]**) $\mathcal{TC}(B) \geq \mathrm{cat}(B) + 1$ **である。従って** $\mathrm{cat}(B) + 1 \leq \mathcal{TC}(B) \leq 2\,\mathrm{cat}(B) + 1$ **である。**

証明: 事実 17.3 から $\mathrm{secat}(\pi_0) \leq \mathrm{secat}(\pi)$ であり、$\mathrm{cat}(B) + 1 \leq \mathcal{TC}(B)$ を得る。 終り.

系 17.4.1 **空间** B **が位相群のとき、**$\mathcal{TC}(B) = \mathrm{cat}(B) + 1$ **が成立する。**

系 17.4.2 $\mathcal{TC}(S^n)$ = 2 *or* 3.

系 17.4.3 **任意の** $n \geq 1$ **に対し** $\mathcal{TC}(\prod^n S^1) = \mathrm{cat}(\prod^n S^1){+}1 = n{+}1$ **である。**

Farber と Grant はこの位相的複雑さを代数的に評価する為に zero-divisors cup-lenth と TC-weight という二つの不変量を定義した：

定義 17.5 (**Farber [38, 39] and Farber-Grant [40]**) **空间** B **と環** $R \ni 1$ **に対して、***zero-divisors cup-length* $\mathcal{Z}_{\mathrm{R}}(B)$ **と**($u \in I_R = \ker\Delta^* : H^*(B{\times}B, R) \to H^*(B; R)$ **に対する**)*TC-weight* $\mathrm{wgt}_\pi(u; R)$ **が次で与えられる：**

(1) (Farber) $\mathcal{Z}_{\mathrm{R}}(B) = \mathrm{Max}\,\{m{\geq}0 | H^*(B{\times}B, R) \supset I_R^m \neq 0\}$

(2) (Farber-Grant) $\mathrm{wgt}_\pi(u; R) = \mathrm{Max}\,\bigl\{m{\geq}0 \bigl| \forall_{f:Y\to B\times B,\ \mathrm{secat}(f^*\pi)<m}\ f^*(u) = 0\bigr\}$

便宜的に $\mathrm{wgt}_\pi(B; R) = \mathrm{Max}\,\{\mathrm{wgt}_\pi(u; R)\,|\,u \in I_R\}$ とおくことにすると、次が成立する。

定理 17.6 *(1) (Farber)* $\mathcal{TC}(B) \geq \mathcal{Z}_{\mathrm{R}}(B) + 1$,

(2) (Farber-Grant) $\mathcal{TC}(B) \geq \mathrm{wgt}_\pi(B; R) + 1$.

(3) (Farber-Grant) $u = v{\cdot}w \neq 0$ **ならば** $\mathrm{wgt}_\pi(u; R) \geq \mathrm{wgt}_\pi(v; R) + \mathrm{wgt}_\pi(w; R)$.

証明: (1) 対角線集合 $\Delta(B) \subset B{\times}B$ はレトラクトであるので、自然に

$$I_R = H^*(B{\times}B, \Delta(B); R)$$

と見なされる。 $\mathcal{TC}(B) = m{+}1$ とすると、$B{\times}B$ の開被覆 $\{U_i\,;\,0 \le i \le m\}$ で包含写像 $U_i \hookrightarrow B{\times}B$ が null-homotopic となるものが取れる。 そこで勝手な $m{+}1$ 個のコホモロジー類 $u_i \in I_R,\ 0 \le i \le m$ をとると、U_i が $\Delta(B)$ に compressible であるので、$u_i|_{U_i} = 0 \in H^*(U_i, \Delta(B); R)$ として良いから

$$u_i \in \mathrm{im}\,\{H^*(B{\times}B, U_i \cup \Delta(B); R) \to H^*(B{\times}B, \Delta(B); R)\}$$

となる。 従って

$$u_0u_1\cdots u_m \in \mathrm{im}\,\{H^*(B{\times}B, \textstyle\bigcup_{i=0}^m U_i \cup \Delta(B); R) \to H^*(B{\times}B, \Delta(B); R)\} = 0.$$

を得るから、$I_R^{m+1} = 0$ となる。

(2) ある $0 \ne u \in I_R$ が $\mathrm{wgt}_\pi(u; R) = m$ を満たすとする。 もし $\mathrm{secat}(\pi) < m$ とすると、$f = \mathbb{1}_{B\times B} : B{\times}B \to B{\times}B$ としても $\mathrm{secat}(f^*\pi) = \mathrm{secat}(\pi) < m$ となるので、仮定から $u = f^*(u) = 0$ となり u の取りかたに矛盾する。 従って $\mathcal{TC}(B) = \mathrm{secat}(\pi)+1 \ge m+1 = \mathrm{wgt}_\pi(u;R)+1$ を得る。 ここで、$0 \ne u \in I_R$ の取り方の任意性より $\mathcal{TC}(B) \ge \mathrm{wgt}_\pi(B; R) + 1$ が成立する。

(3) $\mathrm{wgt}_\pi(v;R) = m$ かつ $\mathrm{wgt}_\pi(w;R) = n$ とする。 任意の写像 $f : Y \to B{\times}B$, $(\mathrm{secat}(f^*\pi) < m{+}n)$ に対して､仮定から Y の開被覆 $\{U_i\,;\,1 \le i \le m{+}n\}$ と各々の開集合上の section $s_i : U_i \to f^*\mathcal{P}(B)$ $(1 \le i \le m{+}n)$ が存在する。 そこで、$V = \cup_{i=1}^m U_i$, $W = \cup_{i=1}^n U_{m+i}$ とおくと、仮定から $\mathrm{secat}((f|_V)^*\pi) < m$ かつ $\mathrm{secat}((f|_W)^*\pi) < n$ となり、v, w の取り方から $(f|_V)^*(v) = 0$ と $(f|_W)^*(w) = 0$ を得る。 従って $f^*(u{\cdot}v) = f^*(u){\cdot}f^*(v) = 0 \in H^*(V \cup W; R) = H^*(Y; R)$ を得る。 ここで、f と Y の取り方の任意性より $\mathrm{wgt}_\pi(u;R) \ge \mathrm{wgt}_\pi(v;R) + \mathrm{wgt}_\pi(w;R)$ が成立する。 終り.

18 球面の位相的複雑さ

18.1 奇数次元球面の位相的複雑さ

定理 18.1 **任意の** $n \ge 1$ **について** $\mathcal{TC}(S^{2n-1}) \le 2$ **であり､従って** $\mathcal{TC}(S^{2n-1}) = 2$ **である。**

証明: $S^{2n-1}{\times}S^{2n-1}$ を覆う二つの開集合 U, V を次のように定める。

$$U = \left\{(x,y) \,\middle|\, \|x-y\| < \frac{3}{2}\right\}, \qquad V = \left\{(x,y) \,\middle|\, \|x-y\| > \frac{1}{2}\right\}.$$

もし $(x,y)\in U$ ならば $x\neq -y$ より、x から y へ向かう大円を通る path（$x=y$ の時は定置 path）が唯一つ定まり、この道は $(x,y)\in U$ に関して連続となる。また $(x,y)\in V$ ならば $x\neq y$ より、x から $-y$ へ向かう大円を通る path（$x=-y$ の時は定置 path）が唯一つ定まり、この道も $(x,y)\in V$ に関して連続である。ここで、$2n{-}1$ 次元球面の -1 倍写像は $2n$ 次のスカラー行列であり、その行列式は 1 であるから連結 Lie 群 SO(m+1) の要素となる。従ってこの写像は恒等写像に homotopic であり、このホモトピーから定まる道を繋ぐことで、$(x,y)\in V$ に関して x から y への道が連続に与えられる。従って、U および V 上で $\pi:\mathcal{P}(S^{2n-1})\to S^{2n-1}{\times}S^{2n-1}$ は sections を持ち、$\mathcal{TC}(S^{2n-1})\leq 2$ となる。 終り.

18.2 偶数次元球面の位相的複雑さ

定理 18.2 **任意の** $n\geq 1$ **について** $\mathcal{TC}(S^{2n})\geq 3$ **であり、従って** $\mathcal{TC}(S^{2n})=3$ **である。**

証明: $u\in H^{2n}(S^{2n})$ を生成元とすると、$w=u{\otimes}1-1{\otimes}u\in H^{2n}(S^{2n}{\times}S^{2n})$ は $\Delta^*(w)=u-u=0$ より $w\in I_R=\ker\{\Delta^*:H^*(S^{2n}{\times}S^{2n})\to H^*(S^{2n})\}$ となる。ここで u は偶数次数であるので $I_R^2\ni w^2=(u{\otimes}1-1{\otimes}u)^2=-2u{\otimes}u\neq 0\in H^{4n}(S^{2n}{\times}S^{2n})\cong\mathbb{Z}$ となり、定理 17.6 より $\mathcal{TC}(S^{2n})\geq \mathcal{Z}_{\mathbb{Z}}(S^{2n})\geq 2{+}1=3$ が分かる。 終り.

演習 18.3 **任意の** $m\geq 1$ **に対し** $\mathcal{TC}(\prod^m S^2)\geq 2m{+}1$ **であり、**$\mathcal{TC}(\prod^m S^2)=2m{+}1$ **が成立することを示せ。**

演習 18.4 *(1)* **任意の** $n\geq 1$ **に対し** $\mathcal{TC}(\mathbb{C}P^n)\geq 2n{+}1$ **であり、**$\mathcal{TC}(\mathbb{C}P^n)=2n{+}1$ **が成立することを示せ。**

(2) **任意の** $n\geq 1$ **に対し** $\mathcal{TC}(\mathbb{H}P^n)\geq 2n{+}1$ **であり、**$\mathcal{TC}(\mathbb{H}P^n)=2n{+}1$ **が成立することを示せ。**

(3) Cayley **射影平面** $\mathbb{O}P^2$ **に対し** $\mathcal{TC}(\mathbb{O}P^2)\geq 5$ **であり、**$\mathcal{TC}(\mathbb{O}P^2)=5$ **が成立することを示せ。**

問 18.5 $\chi(B)=0$ **のとき、**$\mathcal{TC}(B)\leq 2\,\mathrm{cat}(B)$ **となるか？**

References

[1] J. F. Adams, *On the non-existence of elements of the Hopf invariant one*, Ann. of Math., **72** (1960), 20–104.

[2] M. Arkowitz, *Co-H-spaces*, Handbook of algebraic topology, 1143-1173, North Holland, Amsterdam, 1995.

[3] M. Arkowitz and G. Lupton, *Homotopy actions, cyclic maps and their duals*, Homology, Homotopy and Applications, **7** (2005), 169–184

[4] M. Arkowitz and D. Stanley, *The cone length of a product of co-H-spaces and a problem of Ganea*, Bull. London Math. Soc. **33** (2001), 735–742.

[5] John C. Baez, James Dolan, *Higher-dimensional algebra III: n-categories and the algebra of opetopes*, Advances in Mathematics **135** (1998), 145▪-206.

[6] John C. Baez, James Dolan, *Categorification*. In "Higher Category Theory", eds. Ezra Getzler and Mikhail Kapranov. Contemporary Mathematics vol. 230, Amer. Math. Soc., 1998, 1–36.

[7] Batanin:A-infinity Mikhail A. Batanin, *Homotopy coherent category theory and A_∞-structures in monoidal categories*, Journal of Pure and Applied Algebra **123** (1998), 67▪-103.

[8] H. Bass, *Projective modules over free groups are free*, J. of Algebra **1** (1964), 367–373.

[9] H. Bass, *Algebraic K-theory*, Benjamin, Amsterdam,1968.

[10] M. Bendersky, *A functor which localizes the higher homotopy groups of an arbitrary CW-complex*, Lecture Notes in Math. 418, Springer Verlag, Berlin (1975), 13–21.

[11] I. Berstein, *Homotopy mod C of spaces of category 2*, Comment. Math. Helv. **35** (1961), 9–15.

[12] I. Berstein and E. Dror, *On the homotopy type of non-simply connected co-H-space*, Ill. Jour. Math. **20** (1976), 528–534.

[13] I. Berstein and T. Ganea, *The category of a map and of a cohomology class*, Fund. Math. **50** (1961/62), 265–279.

[14] I. Berstein and P. J. Hilton, *Category and generalized Hopf invariants*, Illinois. J. Math. **4** (1960), 437–451.

[15] J. M. Boardman and B. Steer, *On Hopf invariants*, Comment. Math. Helv. **42** (1967), 180–221.

[16] J. M. Boardman and R. M. Vogt, *Homotopy-everything H-spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 1117–1122.

[17] A. K. Bousfield and D. M. Kan, *Homotopy Limits, Completions and Localizations*, Lecture Notes in Math. 304, Springer Verlag, Berlin (1972).

[18] A. Borel, *Topics in the homology theory of fibre bundles*, Lect. Notes in Math. **36**, Springer Verlag, Berlin (1967).

[19] M. Brittenham, *Life gets better as n gets larger (topology-style) The (continuing) saga of the Poincare Conjecture*, http:// www.math.unl.edu/ mbritten/ldt/poincare.html.

[20] F. E. Browder, *Problems of present day mathematics*, in "Mathematical developments arising from Hilbert problems" (De Kalb, IL, 1974), 35–79, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1976.

[21] W. Browder, *Torsion in H-spaces*, Ann. of Math. **74** (1961), 24–51.

[22] M. Clapp and L. Montejano, *Lusternik-Schnirelmann category and minimal coverings with contractible sets*, Manuscripta Math. 58 (1987), no. 1-2, 37–45.

[23] M. Clapp and D. Puppe, *Invariants of the Lusternik-Schnirelmann type and the topology of critical sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **298** (1986), 603–620.

[24] P. M. Cohn, *Free ideal rings*, J. of Algebra **1** (1964), 47–69.

[25] O. Cornea, *Cone-length and Lusternik-Schnirelmann category*, Topology **33** (1994), 95–111.

[26] O. Cornea, *There is just one rational cone-length*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 835–848.

[27] O. Cornea, *Strong LS category equals cone-length*, Topology **34** (1995), 377–381.

[28] M. C. Crabb, J. R. Hubbuck and Kai Xu, *Fields of spaces*, Adams Memorial Symposium on Algebraic Topology, 1 (1990), 241–254, LMS. Lecture Note 175, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[29] O. Cornea, *Some properties of the relative Lusternik-Schnirelmann category*, Stable and unstable homotopy (Toronto, 1996), *Fields Inst. Commun.*, **19** (1998), 67–72.

[30] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea and D. Tanré, "Lusternik-Schnirelmann category", Mathematical Surveys and Monographs **103**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[31] M. C. Crabb. and I. M. James, "Fibrewise Homotopy Theory", Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag London, Ltd., London, 1998.

[32] C. R. Curjel, *A note on spaces of category* ≤ 2, Math. Z. **80** (1963), 293–299.

[33] C. R. Curjel, On the homology decomposition of polyhedra, Illinois J. Math. **4** (1963), 121–136.

[34] B. Eckmann, P. Hilton, *Décomposition homologique d'un polyèdre simplement connexe*, C. R. Acad. Sci. Paris **248** (1959), 2054–2056.

[35] S. Eilenberg and T. Ganea, *On the Lusternik-Schnirelmann category of abstract groups*, Ann. of Math. (2), **65** (1957), 517–518.

[36] E. Fadell and S. Husseini, *Relative category*, products and coproducts, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 64 (1994), 99–115 (1996).

[37] E. Fadell and S. Husseini, *Category weight and Steenrod operations* (Spanish), Bol. Soc. Mat. Mexicana (2), **37** (1992), 151–161.

[38] M. Farber, *Topological complexity of motion planning*, Discrete Comput. Geom. **29** (2003), 211–221.

[39] M. Farber, *Topology of robot motion planning*, "Morse theoretic methods in nonlinear analysis and in symplectic topology", 185–230, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 217, Springer, Dordrecht, 2006.

[40] M. Farber and M. Grant, *Symmetric Motion Planning*, Topology and robotics, 85–104, Contemp. Math., 438, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[41] Y. Felix, S. Halperin and J.-M. Lemaire, *The rational LS category of products and of Poincaré duality complexes*, Topology **37** (1998), 749–756.

[42] Y. Felix, S. Halperin and J.-C. Thomas, "Rational Homotopy Theory", Springer Verlag, Berlin, 2001, Graduate Texts in Math. **205**.

[43] L. Fernández-Suárez, A. Gómez-Tato and D. Tanré, *Hopf-Ganea invariants and weak LS category*, Top. Appl. **115** (2001), 305–316.

[44] L. Fernández-Suárez, A. Gómez-Tato, J. Strom and D. Tanré, *The Lusternik-Schnirelmann category of* $\mathrm{Sp}(3)$, Trans. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 587–595 (electronic).

[45] A. Floer, *Cuplength estimates on Lagrangian intersections*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 335–356.

[46] A. Floer, *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*, Comm. Math. Phys. **120** (1989), 575–611.

[47] R. H. Fox, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, Ann. of Math. (2) **42** (1941), 333–370.

[48] R. H. Fox, *Free differential Calculus I*, Ann. of Math. **57** (1953), 547–560.

[49] K. Fukaya and K. Ono, *Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant*, Topology **38** (1999), 933–1048.

[50] T. Ganea, *Lusternik-Schnirelmann category and strong category*, Illinois. J. Math. **11** (1967), 417–427.

[51] T. Ganea, *Cogroups and suspensions*, Invent. Math. **9** (1970), 185–197.

[52] T. Ganea, *Some problems on numerical homotopy invariants*, In: "Symposium on Algebraic Topology", 23–30, Lecture Notes in Math. **249**, Springer Verlag, Berlin, 1971.

[53] W.J. Gilbert, *Some examples for weak category and conilpotency*, Illinois J. Math. **12** (1968), 421-432.

[54] M. Ginsburg, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, Ann. of Math. (2), **77** (1963), 538–551.

[55] D. Gonçalves, *Mod* 2 *homotopy associative H-spaces*, Geometric Applications of Homotopy Theory I, (Proc. Conf., Evanston Ill. 1977), Lect. Notes in Math. **657**, Springer Verlag, Berlin (1978) 198–216.

[56] J. C. Gómez-Larrañaga and F. González-Acuña, *Lusternik-Schnirelmann category of 3-manifolds*, Topology **31** (1992), 791–800.

[57] K. A. Hardie, *A note on fibrations and category*, Michigan Math. J. **17**, (1970), 351–352.

[58] H. W. Henn, *On almost rational co-H-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **87**, (1983), 164–168.

[59] K. Hess, *A proof of Ganea's Conjecture for Rational Spaces*, Topology **30** (1991), 205–214.

[60] P. Hilton, G. Mislin and J. Roitberg, *On co-H-spaces*, Comment. Math. Helv. **53** (1978), 1–15.

[61] Y. Hirashima, *A convenient axiom to convenient categories for homotopy theory*, Math. J. Okayama U. **42** (2000) 115–122.

[62] H. Hofer, *Lusternik-Schnirelman-theory for Lagrangian intersections*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **5** (1988), 465–499.

[63] J. R. Hubbuck, *On homotopy-commutative H-spaces*, Topology **8** (1969) 119–126.

[64] J. R. Hubbuck, *Two examples on finite H-spaces*, Geometric Applications of Homotopy Theory I, (Proc. Conf., Evanston Ill. 1977), Lect. Notes in Math. **657**, Springer Verlag, Berlin (1978) 282–291.

[65] J. R. Hubbuck, *Products with the seven sphere and homotopy associativity*, Mem. Fac. Sci. Kyushu U. Ser. A **40** (1986), 91–100.

[66] J. R. Hubbuck, *Self maps of H-spaces*, Advances in homotopy theory (Cortona, 1988), 105–110, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 139, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[67] J. R. Hubbuck and N. Iwase, *A p-complete version of the Ganea conjecture on co-H-spaces*, In: "Lusternik-Schnirelmann category and related topics" (South Hadley, MA, 2001), 127–133, Contemp. Math. **316**, 2002.

[68] N. Iwase: *On the ring structure of* $K^*(XP^n)$ (Japanese), Master Thesis, Kyushu University, Fukuoka, 1983.

[69] N. Iwase: *On the A_n-structures of mappings* (Japanese), Research on unstable homotopy theory (Japanese) (Kyoto 1983), Sūri Kaiseki Kenkyūsho Kōkyūroku, **505** (1983), 63–75.

[70] N. Iwase, *On the K-ring structure of X-projective n-space*, Mem. Fac. Sci. Kyushu U. (A) Math. **38** (1984), 285-297.

[71] N. Iwase, *Ganea's conjecture on Lusternik-Schnirelmann category*, Bull. London Math. Soc. **30** (1998), 623–634.

[72] N. Iwase, *Co-H-spaces and the Ganea conjecture*, Topology **40** (2001), 223–234.

[73] N. Iwase, *A_∞-method in Lusternik-Schnirelmann category*, Topology **41** (2002), 695–723.

[74] N. Iwase, *Lusternik-Schnirelmann category of a sphere-bundle over a sphere*, Topology **42** (2003), 701–713.

[75] N. Iwase, *Categorical length, relative L–S category and higher Hopf invariants*, Algebraic Topology: Old and New (Bedlewo, 2007), Banach Center Publ., IMPAN, to appear.

[76] N. Iwase and M. Mimura, *Higher homotopy associativity*, Algebraic Topology, (Arcata CA 1986), 193–220, Lecture Notes in Math. **1370**, Springer Verlag, Berlin, 1989.

[77] N. Iwase and M. Mimura, *L–S categories of* 1 *connected compact simple Lie groups of low rank*, In: "Algebraic Topology: Categorical Decomposition Techniques", (Isle of Skye, 2001), 199–212, *Progr. Math.*, 215, Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.

[78] N. Iwase, M. Mimura and T. Nishimoto, *On the cellular decomposition and the Lusternik-Schnirelmann category of $Spin(7)$*, Topology Appl. **133** (2003), 1–15.

[79] N. Iwase, M. Mimura and T. Nishimoto, *L–S categories of non-simply-connected compact simple Lie groups*, Topology Appl. **150** (2005), 111–123.

[80] N. Iwase, and M. Sakai, *Topological Complexity is a Fibrewise L–S Category*, preprint, 2008.

[81] N. Iwase, D. Stanley and J. Strom, *Implications of the Ganea Condition*, Algebr. Geom. Topol., **4** (2004), 829–839.

[82] I. M. James, *The topology of Stiefel manifolds*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976, London Math. Soc. Lec. Notes **24**.

[83] I. M. James, *On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann*, Topology **17** (1978), 331-348.

[84] I. M. James, *Lusternik-Schnirelmann Category*, In: "Handbook of algebraic topology", 1293-1310, North Holland, Amsterdam, 1995.

[85] I. James and W. Singhof, *On the category of fiber bundles, Lie groups, and Frobenius maps*, In: "Higher homotopy structures in topology and mathematical physics" (Poughkeepsie, NY, 1996), 177–189, Contemp. Math. **227**, 1999.

[86] B. Jessup, *Rational L–S category and a conjecture of Ganea*, Trans. Amer. Math. Soc. **317** (1990), 655–660.

[87] H. Kadzisa, Cone-decompositions of the unitary groups, preprint, 2003.

[88] H. Kadzisa, Cone-decompositions of the special unitary groups, preprint, 2003.

[89] D. M. Kan, *On monoids and their dual*, Bol. Soc. Math. Mex. **3** (1958), 52–61.

[90] G.M. Kelly, "Basic concepts of enriched category theory", London Math. Soc. Lecture Notes Series 64, Cambridge University Press (1982).

[91] J. Klein, R. Schwänzl and R. M. Vogt, *Comultiplication and suspension*, Topology Appl. **77** (1997), 1–18.

[92] K. Komatsu, *On links whose complements have the Lusternik-Schnirelmann category one*, Hiroshima Math. J. **24** (1994), 473–483.

[93] K. Komatsu and T. Matumoto, *Knot-link theory and Lusternik-Schnirelmann category*, In: "Algebra and topology 1992" (Taejǒn), 211–216, Korea Adv. Inst. Sci. Tech., Taejǒn, 1992.

[94] A. Kono and N. Iwase, *Lusternik-Schnirelmann category of* $\mathrm{Spin}(9)$, preprint.

[95] M. A. Krasnosel′skiĭ, *On special coverings of a finite-dimensional sphere* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 103 (1955), 961–964.

[96] G. Liu and G. Tian, *Floer homology and Arnold conjecture*, J. Differential Geom. **49** (1998), 1–74.

[97] L. Lusternik and L. Schnirelmann, "Méthodes Topologiques dans les Problèmes Variationnels", Hermann, Paris, 1934.

[98] P. Lambrechts, D. Stanley and L. Vandembroucq, *Embedding up to homotopy of two-cones into Euclidean space*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 3973–4013.

[99] S. Mac Lane, "Homology", Springer Verlag, Berlin, 1963.

[100] S. MacLane, "Categories for the working mathematician", Springer Verlag, Berlin, GTM series **5**, 1971.

[101] T. Matumoto, *Lusternik-Schnirelmann category and knot complement*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **37** (1990), 103–107.

[102] T. Matumoto, *Lusternik-Schnirelmann category and knot complement II*, Topology **34** (1995), 177–184.

[103] J. P. May, *Fiberwise localization and completion*, Trans. Amer. Math. Soc. **258** (1980), 127–156.

[104] J. McCleary, “A User’s Guide to Spectral Sequences”, Math. Lec. Ser. 12, Publish or Perish Inc., Wilmington Delaware (1985).

[105] J. van Mill and G. M. Reed, “Open problems in topology”, edited by J. van Mill and G.M. Reed, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.

[106] M. Mimura, “Hopf Spaces” (Japanese), Kinokuniya Shoten, Tokyo, 1986.

[107] M. Mimura and T. Nishimoto, *On the cellular decomposition of the exceptional Lie group G_2*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 2451–2459.

[108] L. Montejano, *A quick proof of Singhof’s $\mathrm{cat}(M \times S^1) = \mathrm{cat}(M) + 1$ theorem*, Manuscripta Math. **42** (1983), 49–52.

[109] L. Montejano, *Lusternik-Schnirelmann category: a geometric approach*, Geometric and algebraic topology, 117–129, Banach Center Publ., 18, PWN, Warsaw, 1986.

[110] L. Montejano, *Lusternik-Schnirelmann category and Hilbert cube manifolds*, Topology Appl. **27** (1987), 29–35.

[111] L. Montejano, *Geometric category and Lusternik-Schnirelmann category*, Geometric topology and shape theory (Dubrovnik, 1986), 183–192, Lecture Notes in Math., 1283, Springer, Berlin, 1987.

[112] L. Montejano, *Categorical and contractible covers of polyhedra; some topological invariants related to the Lusternik-Schnirelmann category*, Conference on Differential Geometry and Topology (Sardinia, 1988). Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **58** (1988), 177–264.

[113] N. Oda, *Pairings and copairings in the category of topological spaces*, Publ. RIMS Kyoto U. **28** (1992), 83–97.

[114] S. Oka, *The stable homotopy groups of spheres I*, Hiroshima Math. J. **1** (1971), 305–337.

[115] J. Oprea and Y. Rudyak, *On the Lusternik-Schnirelmann category of symplectic manifolds and the Arnold conjecture*, Math. Z. **230** (1999), 673–678.

[116] J. Oprea and Y. Rudyak, *Detecting elements and Lusternik-Schnirelmann category of 3-manifolds*, In: “Lusternik-Schnirelmann category and related topics” (South Hadley, MA, 2001), 181–191, Contemp. Math. **316**, 2002.

[117] Y. B. Rudyak, *On the Ganea conjecture for manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2511–2512.

[118] Y. B. Rudyak, *On category weight and its applications*, Topology **38** (1999), 37–55.

[119] Y. Rudyak, *On analytical applications of stable homotopy (the Arnold conjecture, critical points)*, Math. Z. **230** (1999), 659–672.

[120] S. Saito, *Notes on Co-H-spaces*, J. Fac. Sci. Shinshu U. **6** (1971), 101–106.

[121] S. Saito, *On higher coassociativity*, Hiroshima Math. J. **6** (1976), 589–617.

[122] M. Sakai, *A proof of the homotopy push-out and pull-back lemma*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 2461–2466.

[123] H. Scheerer, *On rationalized H- and co-H-spaces*, Manuscripta Math. **51** (1984), 63–87.

[124] P. A. Schweitzer, *Secondary cohomology operations induced by the diagonal mapping*, Topology **3** (1965), 337–355.

[125] C. S. Seshadri, *Triviality of vector bundles over the affine space K^2*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S. **44** (1958), 456–458.

[126] W. Singhof, *On the Lusternik-Schnirelmann category of Lie groups*, Math. Z. **145** (1975), 111–116.

[127] W. Singhof, *On the Lusternik-Schnirelmann category of Lie groups II*, Math. Z. **151** (1976), 143–158.

[128] W. Singhof, *Generalized higher order cohomology operations induced by the diagonal mapping*, Math. Z. **162** (1978), 7–26.

[129] W. Singhof, *Minimal coverings of manifolds with balls*, Manuscripta Math. **29** (1979), 385–415.

[130] D. Stanley, *Spaces with Lusternik-Schnirelmann category n and cone length $n + 1$*, Topology **39** (2000), 985–1019.

[131] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces, I & II*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 275–292; 293–312.

[132] J. D. Stasheff, *H-spaces from a Homotopy Point of View*, Lecture Notes in Math. **161**, Springer Verlag, Berlin 1970.

[133] N. E. Steenrod, *Cohomology operations*, Annals of Mathematical Studies **50**, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1962).

[134] J. Strom, *Two special cases of Ganea’s conjecture*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 679–688.

[135] J. Strom, *Essential category weight and phantom maps*, In: “Cohomological methods in homotopy theory” (Bellaterra, 1998), 409–415, Progr. Math., 196, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.

[136] M. Sugawara, *On a condition that a space is an H-space*, Math. J. Okayama U. **5** (1956/57), 109–129.

[137] M. Sugawara, *A condition that a space is group-like*, Math. J. Okayama U. **7** (1957), 123–159.

[138] D. Sullivan, “Geometric Topology, Part I”, Localization and Galois Symmetry (3.1-4.42), M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1970.

[139] F. Takens, *The minimal number of critical points of a function on a compact manifold and the Lusternik-Schnirelman category*, Invent. Math. **6** (1968), 197–244.

[140] F. Takens, *The Lusternik-Schnirelman categories of a product space*, Compositio Math. **22** (1970), 175–180.

[141] H. Toda, *Topology of standard path spaces and homotopy theory. I*, Proc. Japan Acad. **29** (1953), 299–304.

[142] H. Toda, *Non-existence of mappings of* S^{31} *into* S^{16} *with Hopf invariant 1*, J. Inst. Polytech. Osaka City U. Ser. A **8** (1957), 31–34.

[143] H. Toda, "Composition methods in homotopy groups of spheres", Princeton U. Press, Princeton N.J., Ann. of math. studies **49**, 1962.

[144] G. Toomer, *Lusternik-Schnirelmann category and the Moore spectral sequence*, Math. Z. **138** (1974), 123–153.

[145] G. Toomer, *Two applications of homology decompositions*, Canad. J. Math. **27** (1975), 323–329.

[146] L. Vandembroucq, *Suspension of Ganea fibrations and a Hopf invariant*, Topology Appl. **105** (2000), 187–200.

[147] L. Vandembroucq, *Fibrewise suspension and Lusternik-Schnirelmann category*, Topology **41** (2002), 1239–1258.

[148] K. Varadarajan, *On fibrations and category*, Math. Z. **88** (1965), 267–273.

[149] K. Varadarajan, *The Finiteness Obstruction of C.T.C. Wall*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[150] C. T. C. Wall, *An obstruction to finiteness of* CW*-complexes*, Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 269–270.

[151] G. W. Whitehead, *The homology suspension*, In: "Colloque de topologie algébrique, Louvain, 1956", Georges Thone, Liége; 89–95, Masson & Cie, Paris, 1957.

[152] G. W. Whitehead, "Elements of Homotopy Theory", Springer Verlag, Berlin, 1978, Graduate Texts in Mathematics **61**.

[153] K. Xu, *Space of rings*, PhD Thesis at University of Aberdeen (1989).

[154] A. Zabrodsky, "Hopf spaces", Notas de Matemática (59), North-Holland Publ. Co., Amsterdam, North-Holland Mathematics Studies, **22** (1976).